Выпуск 2I(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Численные методы

УДК 5I2.25/26 + 5I3.88

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В.В.Калашников

0. Вопрос о сведении задач последовательной (лексикографической) минимизации к задаче скалярной минимизации рассматривался рядом авторов. Стандартной является замена совокупности целевых функций их взвешенной суммой. В зависимости от выбора весов точка минимума получаемой скалярной задачи будет более или менее приближать искомую точку лексикографического минимума. Такой прием использован в работах Лебедева Б.Д., Подиновского В.В., Стырковича Р.С. [I], Подиновского В.В. [2], Cruceanu St. [3], Еремина И.И. [4], Син Дон Ха [5]. Несколько иная связь между задачами скалярной и лексикографической минимизации выявлена в работах Митягина Б.С. [6], Булавского В.А. и Рубинштейна Г.Ш. [7]. В этих работах решается обратная задача: в терминах задач о лексикографическом минимуме описывается поведение минимальных элементов в шкале ℓ_p-норм при $p \to +\infty$. Аналогичные вопросы для $\ell_{p,q}$-норм в пространстве прямоугольных матриц исследовал В.А.Васильев[8].

В настоящей работе рассмотрены три задачи лексикографической минимизации, исследованные в указанных выше работах. Соответствующие теоремы о сходимости минимальных элементов, которые были ранее доказаны для случая многогранного допустимого множества, обобщены на существенно более широкий класс множеств.

I. Лемма о сдвиге окрестности. В доказательстве всех нижеприведенных теорем существенно используется следующая

ЛЕММА I (о сдвиге окрестности). Пусть Ω - выпуклое замкнутое множество в R^n, обладающее хотя бы одним из следующих свойств:

а) граница Ω не содержит линейных участков, т.е. $\lambda x+(1-\lambda)y \in ri\,\Omega$ при всех $x,y\in\Omega$ и $\lambda\in(0,1)$;

б) $\Omega=\{x\in R^n: f_1(x)\le 0, f_2(x)\le 0,\dots,f_k(x)\le 0\}$, где f_i, $i=\overline{1,k}$, - выпуклые функции, конечные на всем R^n, подчиняющиеся условию:

(ж) если $\exists x^*,\tilde{x}\in R^n$, такие, что $\forall x\in O[x^*,\tilde{x}]$ (отрезка с концами $x^*,\tilde{x}$) $f_i(x)=const$, то $\forall y\in R^n$ и $\forall\lambda\in R$ имеем $f(y+\lambda(x^*-\tilde{x}))=f(y)$.

Пусть, далее, $x^*,\tilde{x}\in\Omega$, причем $x^*\ne x$. Тогда для любой шаровой окрестности $S_{\rho_1}(x^*)$ с центром в точке x^* и радиусом $\rho_1>0$, не содержащей $\tilde{x}$, существует $\rho_2>0$ такое, что при всех $x\in S_{\rho_2}(\tilde{x})\cap\Omega$ точка $y=x+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^*-\tilde{x}\|}\right)(x^*-\tilde{x})$ принадлежит множеству $S_{\rho_1}(x^*)\cap\Omega$ ($\|\cdot\|$ - евклидова норма в R^n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Рассмотрим случай, когда Ω - множество типа а). Пусть $x^*,\tilde{x}\in\Omega$, $x^*\ne\tilde{x}$, а $\rho_1>0$ - произвольное число такое, что $\tilde{x}\notin S_{\rho_1}(x^*)$. Рассмотрим точку $\bar{x}=\tilde{x}+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^*-\tilde{x}\|}\right)(x^*-\tilde{x})$. Очевидно, что $0<\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^*-\tilde{x}\|}\right)<1$. Но тогда по свойству а) точка $\bar{x}\in ri\,\Omega$. Раз так, то существует такое $\rho_2'>0$, что $S_{\rho_2'}(\bar{x})\cap aff\,\Omega\subset\Omega$. Так как $\|x^*-\bar{x}\|<\frac{\rho_1}{2}$, то, взяв $\rho_2=\min\{\rho_2', \rho_1/2\}$, получим, что $S_{\rho_2}(\bar{x})\cap aff\,\Omega\subset S_{\rho_1}(x^*)\cap\Omega$. Вследствие того, что $\forall x\in S_{\rho_2}(\tilde{x})\cap\Omega$ точка $y=x+\left(1-\frac{\rho_2}{2\|x^*-\tilde{x}\|}\right)(x^*-\tilde{x})\in S_{\rho_2}(\bar{x})\cap\Omega$, получаем утверждение леммы.

2. Пусть Ω - множество типа б). Выберем снова для то-

чек $x^*, \tilde{x} \in \Omega$, $x^* = \tilde{x}$, число $\rho_1 > 0$ такое, что $\tilde{x} \notin S_{\rho_1}(x^*)$. В силу вышесказанного, достаточно рассмотреть случаи, когда

$$\bar{x} = \tilde{x} + \left(1 - \frac{\rho_1}{2\|x^* - \tilde{x}\|}\right)(x^* - \tilde{x}) \notin ri\,\Omega .$$

Так как Ω - выпуклое множество, то это возможно только тогда, когда $x^* \notin ri\,\Omega$ и $\tilde{x} \notin ri\,\Omega$. Но это означает, что целый отрезок $O[x^*, \tilde{x}]$ лежит на границе множества Ω, т.е. покажем, что если $I = \{i \in \{1,2,\dots,k\} : f_i(\bar{x}) = 0\}$, то для $i \in I$ $f_i(x) = 0$ при всех $x \in O[x^*, \bar{x}]$. Предположим, напротив, что существуют точка $x' \in O[x^*, \bar{x}]$ и $i_0 \in I$ такие, что $f_{i_0}(x') < 0$. Тогда, беря $\lambda > 0$, $\lambda = \frac{\|\bar{x} - \tilde{x}\|}{\|x' - \tilde{x}\|} < 1$, получим $\bar{x} = \lambda x' + (1-\lambda)\tilde{x}$. В силу выпуклости функции f_{i_0} справедливо $f_{i_0}(\bar{x}) \leq \lambda f_{i_0}(x') + (1-\lambda) f_{i_0}(\tilde{x})$. Так как $f_{i_0}(x') < 0$ по предположению, а $0 < \lambda < 1$ и $f_{i_0}(\tilde{x}) \leq 0$, то получаем $f_{i_0}(\bar{x}) < 0$, что противоречит определению множества I.

Итак, при всех $x \in O[x^*, \bar{x}]$ имеем $f_i(x) = 0$, $i \in I$. Аналогично показывается, что и для $x \in O[\bar{x}, \tilde{x}]$ выполняется $f_i(x) = 0$, $i \in I$, т.е. направление $s = x^* - \tilde{x}$ является направлением постоянства для функций f_i, $i \in I$. Другими словами, при всех $i \in I$, $y \in R^n$ и $\lambda \in R$ справедливо $f_i(y + \lambda(x^* - \tilde{x})) = f_i(y)$ (в силу свойства (ж)).

Так как $f_j(\bar{x}) < 0$ при $j \in \{1,2,\dots,k\} \setminus I = J$, то вследствие непрерывности конечных выпуклых функций, определенных на всем R^n, существует такое $\rho_2' > 0$, что при всех $x \in S_{\rho_2'}(\bar{x})$ выполняется $f_j(x) \leq 0$, $j \in J$. Возьмем $\rho_2 = \min\{\rho_2', \frac{\rho_1}{2}\}$. Тогда $S_{\rho_2}(\bar{x}) \subset S_{\rho_1}(x^*)$.

Пусть $y \in S_{\rho_2}(\tilde{x}) \cap \Omega$ - произвольная точка. Так как $y \in S_{\rho_2}(\tilde{x})$, то $\|y - \tilde{x}\| \leq \rho_2$. Следовательно, если $\bar{y} = y + \left(1 - \frac{\rho_1}{2\|x^* - \tilde{x}\|}\right)(x^* - \tilde{x})$, то $\|\bar{y} - \bar{x}\| = \|y - \tilde{x}\| \leq \rho_2$ и $\bar{y} \in S_{\rho_2}(\bar{x}) \subset S_{\rho_1}(x^*)$. Так как $\bar{y} \in S_{\rho_2}(\bar{x})$, то $f_j(\bar{y}) \leq 0$, $j \in J$; ввиду того, что $y \in \Omega$, имеем $f_i(\bar{y}) = f_i(y) \leq 0$, $i \in I$. Значит, $\bar{y} \in \Omega$. В силу произвольности y, лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В работе [5] утверждение леммы доказано в более сильном предположении, а именно, в случае, когда Ω - выпуклый многогранник.

2. Регуляризованная задача

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Направление $s \in R^n$ называется н а д р а в-

л е н и е м   п о с т о я н с т в а   ф у н к ц и и $F: R^n \to R$, если для любых $x \in R^n$ и $\lambda \in R$ $F(x+\lambda s) = F(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $F: R^n \to R$ называется н е в ы р о ж д е н н о й , если всякое направление $s \in R^n$, для которого существуют $x \in R^n$ и $\bar{\lambda} \in R$ такие, что $F(x+\lambda s) = F(x)$ для всех $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, является направлением постоянства функции F.

В [5] рассматривалась задача последовательной минимизации функций g_0, g_1, ..., g_m на замкнутом выпуклом множестве $\Omega \subset R^n$.

Пусть $\mathcal{L}_{g_i}$ – совокупность направлений постоянства функции g_i, $i=0,1,...,m$. Если функции g_i, $i=\overline{0,m}$, выпуклы и невырождены, достигают минимума на Ω в точках множества $\Omega_{g_i} = \{x \in \Omega : g_i(x) = \min_{y \in \Omega} g_i(y)\}$ и если $\bigcap_{i=0}^{m} \mathcal{L}_{g_i} = \{0\}$, т.е. функции g_i не имеют общих направлений постоянства, то задача

$$\Omega_0^* = \{x \in \Omega : g_0(x) = \min_{y \in \Omega} g_0(y)\},$$

$$\Omega_1^* = \{x \in \Omega_0^* : g_1(x) = \min_{y \in \Omega_0^*} g_1(y)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_m^* = \{x \in \Omega_{m-1}^* : g_m(x) = \min_{y \in \Omega_{m-1}^*} g_m(y)\}$$

имеет единственное решение, т.е. $\Omega_m^* = \{x^*\}$.

Рассмотрим регуляризованную задачу $\min_{x \in \Omega} F(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$, где $F(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m) = g_0(x) + \varepsilon_1 g_1(x) + ... + \varepsilon_m g_m(x)$. Решение x_ε этой задачи, очевидно, также единственно. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. Е с л и $\Omega \subset R^n$ – о г р а н и ч е н н о е   з а м к н у т о е   в ы п у к л о е   м н о ж е с т в о   т и п а   а)   и л и   б)   (с м . л е м м у   I) ,   т о $x_\varepsilon \to x^*$ п р и $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i \to 0$, $i=1,2,...,m-1$.

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 из [5]. Отличие состоит лишь в том, что вместо леммы из указанной работы нужно использовать лемму I данной работы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [5] доказано (см. теорему 3 в [5]), что при выполнении условий $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i \to 0$, $i=1,2,...,m-1$, и

в случае, когда Ω не является ограниченным (но все же является многогранным!), $x_\varepsilon \to x^*$. И так как в лемме I (о сдвиге окрестности) не требуется ограниченности Ω, то можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Утверждение теоремы I справедливо и в том случае, когда Ω – неограниченное множество типа а) или б).

3. Предельный предпорядок, соответствующий шкале ℓ_p-норм. В.А.Булавский и Г.Ш.Рубинштейн [7] доказали теорему о сходимости точек $x(M,p)$, доставляющих минимум строго выпуклым функциям $\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}$ на многогранном выпуклом замкнутом множестве M, к точке x° – минимальной точке множества M в предпорядке $\preccurlyeq_\infty$, если $p \to +\infty$. Предпорядок $\preccurlyeq_\infty$ определяется следующим образом: пусть $f_\infty(x)=(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})$, где $|x_{j_1}| \geq |x_{j_2}| \geq \dots \geq |x_{j_n}|$. Считаем, что в множестве значений f_∞ введено лексикографическое упорядочение, и положим $x \preccurlyeq_\infty y \Longleftrightarrow f_\infty(x) \leq f_\infty(y)$ (лексикографически). Оказывается, с помощью леммы о сдвиге окрестности можно доказать аналогичную теорему о сходимости для более общего класса множеств. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Для любого непустого замкнутого множества $M \subset R^n$ типа а) или б) (см. лемму о сдвиге окрестности) точки $x(M,p)$, на которых достигают минимума ℓ_p-нормы $(p \in (1,+\infty))$, при $p \to +\infty$ сходятся к точке x° – минимальному элементу множества M в строго выпуклом предпорядке $\preccurlyeq_\infty$, описанном выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего в работе [7] было показано, что для любого выпуклого замкнутого множества $M \subset R^n$ минимальный элемент в строго выпуклом предпорядке существует и единствен. Кроме того, точки $x(M,p), p \in (1,+\infty)$, образуют ограниченное семейство. В самом деле, $\max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j(M,p)| \leq \|x(M,p)\|_p \leq \|x^\circ\|_p \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j^\circ|$. Поэтому для доказательства теоремы доста-

точно показать, что никакая отличная от x° точка y° из замкнутого множества M не может быть предельной для соответствующего направленного семейства минимальных точек. Для доказательства теоремы сначала докажем лемму.

ЛЕММА 2. Пусть M – произвольное замкнутое выпуклое множество в R^n и точка $y^\circ \in M$ не совпадает с минимальной в предпорядке $\preccurlyeq_\infty$ на M точкой x°. Тогда найдутся $\rho_0 \in (1, +\infty)$, число ρ_1, удовлетворяющее неравенствам $0<\rho_1<\|x^\circ - y^\circ\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в R^n), и окрестность S точки y° такие, что при $\rho>\rho_0$ и при всех $y \in S\cap M$

$$\|y\|_\rho > \|y + \left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^\circ - y^\circ\|_2}\right)(x^\circ - y^\circ)\|_\rho .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что для минимальной точки $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ выполняются неравенства $x_1^\circ \geq x_2^\circ \geq \dots \geq x_n^\circ \geq 0$, и при этом, если $x_j^\circ = x_{j+1}^\circ$, то $y_j^\circ \geq$ $\geq y_{j+1}^\circ$, а если $x_j^\circ = 0$, то $y_j^\circ \geq 0$ (к этому можно прийти путем перенумерации и изменения направления некоторых координатных осей).

Дословно повторяя начало доказательства леммы 3 из [7], с.17, получим, что для некоторого r, $1 \leq r \leq n$, во-первых, $x_j^\circ = y_j^\circ$, $j = 1,2,\dots, r-1$, а во-вторых, $x_r^\circ < y_r^\circ$. Обозначая, как и в лемме 3 [7], $\delta = \frac{1}{3}(y_r^\circ - x_r^\circ)$, рассматриваем точки x^* и y^* из R^n с компонентами

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq r-1, \\ x_j^\circ + \delta, & j \geq r; \end{cases} \qquad y_j^* = \begin{cases} 0, & j \neq r, \\ y_j^\circ - \delta, & j = r. \end{cases}$$

Поскольку в предпорядке $\preccurlyeq_\infty$ точка x^* предшествует точке y^*, то существует такое $\rho_0 > 1$, что при $\rho > \rho_0$ $\|x^*\|_\rho < \|y^*\|_\rho$. (Это следует из признака сходимости предпорядков, см. [7], § 2, с.12.) Возьмем ρ_1 так, что $0<\rho_1<\min\{2\delta, \|x^\circ - y^\circ\|_2\}$, и $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \delta - \frac{\rho_1}{2}$, и рассмотрим окрестность S точки y°, $S = \{y \in R^n : |y_j - y_j^\circ| < \varepsilon, j = 1,2,\dots,n\}$. Положим $\alpha =$ $= 1 - \frac{\rho_1}{2\|x^\circ - y^\circ\|_2}$. Если $y \in S\cap M$ и $\rho > \rho_0$, то

$$(\|y\|_p)^p-(\|y+\alpha(x^\circ-y^\circ)\|_p)^p=\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p-\sum_{j=1}^{n}|y_j+$$

$$+\alpha(x_j^\circ-y_j^\circ)|^p=\sum_{j=r}^{n}|y_j|^p-\sum_{j=r}^{n}|y_j+\alpha(x_j^\circ-y_j^\circ)|^p\geq$$

$$\geq(y_r^\circ-\varepsilon)^p-\sum_{j=r}^{n}|x_j^\circ+\alpha(y_j-y_j^\circ)+(1-\alpha)(y_j-x_j^\circ)|^p. \quad (\mathrm{I})$$

Рассмотрим

$$|x_j^\circ+\alpha(y_j-y_j^\circ)+(1-\alpha)(y_j-x_j^\circ)|\leq x_j^\circ+\alpha\varepsilon+(1-\alpha)|y_j-x_j^\circ|=x_j^\circ+$$
$$+\alpha\varepsilon+(1-\alpha)|(y_j-y_j^\circ)+(y_j^\circ-x_j^\circ)|\leq x_j^\circ+\alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon+$$
$$+(1-\alpha)\|y^\circ-x^\circ\|_2=x_j^\circ+\varepsilon+\rho_1/2<x_j^\circ+\delta.$$

Отсюда, продолжая неравенство (I), получим $\geq(y_r^\circ-\varepsilon)^p-\sum_{j=r}^{n}(x_j^\circ+\delta)^p>(y_r^\circ-\delta)^p-\sum_{j=r}^{n}(x_j^\circ+\delta)^p$ (в силу того, что $0<\varepsilon<\delta<y_r^\circ$). А последнее выражение в точности равно $(\|y^\circ\|_p)^p-(\|x^\circ\|_p)^p>0$. Значит, нашли такие ρ_0 , ρ_1 и окрестность S точки y°, что для всех $y\in S\cap M$ и $p>p_0$ выполнено $\|y\|_p>\|y+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^\circ-y^\circ\|_2}\right)(x^\circ-y^\circ)\|_p$. Лемма 2 доказана.

Завершение доказательства теоремы 3.

Итак, предположим, что некоторая точка $y^\circ\in M$, $y^\circ\neq x^\circ$, является предельной для направленного семейства точек $x(M,p)$, $p\to+\infty$. Это означает, что для любой окрестности $\mathcal{U}$ точки y° и любого $p_0>1$ существует $p_1>p_0$ такое, что

$$x(M,p_1)\in\mathcal{U}\cap M.$$

Рассмотрим гарантированные леммой 2 числа $p_0>1$, $\rho_1\in(0,\|x^\circ-y^\circ\|_2)$ и окрестность S точки y° такие, что при всех $p>p_0$ и $y\in S\cap M$ имеем $\|y\|_p>\|y+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^\circ-y^\circ\|_2}\right)(x^\circ-y^\circ)\|_p$.

Так как $\rho_1<\|x^\circ-y^\circ\|_2$, то $y^\circ\notin S_{\rho_1}(x^\circ)$. А тогда, по лемме I (о сдвиге окрестности), существует число $\rho_2>0$ такое, что при $z\in S_{\rho_2}(y^\circ)\cap M$ точка $\bar{z}=z+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^\circ-y^\circ\|_2}\right)(x^\circ-y^\circ)$ принадлежит $S_{\rho_1}(x^\circ)\cap M$. Теперь, положив $\mathcal{U}=S\cap S_{\rho_2}(y^\circ)$ и взяв при $p_1>p_0$ точку $y=x(M,p_1)\in\mathcal{U}\cap M$, получим, что точка $\bar{y}=y+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|x^\circ-y^\circ\|_2}\right)\times$ $\times(x^\circ-y^\circ)$ принадлежит M (так как $x(M,p_1)=y\in S_{\rho_2}(y^\circ)\cap M$) и в то же время $\|\bar{y}\|_{p_1}<\|y\|_{p_1}=\|x(M,p_1)\|_{p_1}$ (так как $y=x(M,p_1)\in$ $\in S\cap M$ и $p_1>p_0$). Полученное противоречит с опреде -

лением точки $x(M,p_1)$ как минимальной в l_{p_1}-норме на M и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим в R^n набор n линейно-независимых линейных форм $g_1(x), g_2(x),\dots,g_n(x)$ $(g_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j)$ и семейство строго выпуклых функций $\left(\sum_{j=1}^{n}|g_j(x)|^p\right)^{1/p}$, $p\in(1,+\infty)$. Легко установить, что порождаемые ими на R^n строго выпуклые предпорядки сходятся в указанном ранее смысле (см. [7], § 2, с.II) к предельному предпорядку $\preccurlyeq_{\infty}^{(g)}$, порождаемому на R^n отображением $F_{\infty}^{(g)}(x)=(|g_{j_1}(x)|,|g_{j_2}(x)|,\dots$ $\dots,|g_{j_n}(x)|)$, где, как и ранее, $|g_{j_1}(x)|\geq|g_{j_2}(x)|\geq\dots\geq$ $\geq|g_{j_n}(x)|$, и в множестве значений $F_{\infty}^{(g)}$ введено лексикографическое упорядочение. Нетрудно доказать, что если $M\subset R^n$ - выпуклое замкнутое множество типа а) или б), то для каждого $p>1$ на M существует единственный минимальный элемент $x^{(g)}(M,p)$ функции $\left(\sum_{j=1}^{n}|g_j(x)|^p\right)^{1/p}$, и при $p\to+\infty$ $x^{(g)}(M,p)\to x^{(g)}(M)$ - минимальному элементу в предпорядке $\preccurlyeq_{\infty}^{(g)}$ на M. Это можно представить себе следующим образом: рассмотрим линейное невырожденное преобразование на R^n

$$
\begin{aligned}
y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\\
y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}
$$

и рассмотрим функции $\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{1/p}$. Поскольку при неособенном линейном преобразовании множества типа а) или б), описанные в лемме о сдвиге окрестности, переходят в множества того же типа, то все утверждения автоматически распространяются на функции, полученные указанным преобразованием аргументов.

4. Предельный предпорядок в пространстве матриц. В этом пункте также формулируется и доказывается теорема, обобщающая имевшийся ранее результат (см.[8], теорема I). Именно, с помощью леммы о сдвиге окрестности докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M - замкнутое непустое выпуклое множество типа

а) или б) (см. п. I, лемму о сдвиге) в пространстве $R^{m,n}$ $(m\times n)$-матриц. Тогда при любом натуральном k элементы $x(M,p,kp)$, доставляющие на M минимум строго выпуклым функциям $\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_{ij}|^p\right)^k\right)^{1/kp}$, сходятся при $p\to+\infty$ к элементу $\bar{x}\in M$, являющемуся минимальным в строго выпуклом предпорядке $\preccurlyeq^{(k)}$ на M, определяемом следующим образом. Для всех $x\in R^{m,n}$ и $\alpha=(j;i_1,i_2,\dots,i_k)$, где $1\leq j\leq n$ и $1\leq i_s\leq m$, $s=\overline{1,k}$, упорядочим по убыванию неотрицательные величины $y_\alpha=|x_{i_1j}\cdot x_{i_2j}\cdot\ldots\cdot x_{i_kj}|$ и полученный набор обозначим через $f^{(k)}(x)=(z_1,z_2,\dots,z_N)$. Таким образом, $N=n\cdot m^k$ и $z_1\geq z_2\geq\ldots\geq z_N$. Определив в множестве значений отображения $f^{(k)}$ лексикографическое упорядочение $\leq_\wedge$, получим в $R^{m,n}$ индуцированный порядок: $x\preccurlyeq^{(k)}y\Longleftrightarrow f^{(k)}(x)\leq_\wedge f^{(k)}(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства потребуется следующее предложение, полученное в [8] для любого выпуклого замкнутого множества $M\subset R^{m,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\bar{x}=[\bar{x}_{ij}]$ - минимальный элемент выпуклого множества $M\subset R^{m,n}$ в предпорядке $\preccurlyeq^{(k)}$, а $x=[x_{ij}]$ - любой другой элемент этого множества. Тогда, в силу определения предпорядка $\preccurlyeq^{(k)}$, для векторов $f^{(k)}(\bar{x})=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\dots,\bar{z}_N)$ и $f^{(k)}(x)=(z_1,z_2,\dots,z_N)$ найдется $r\in\{0,1,\dots,N-1\}$ такое, что $\bar{z}_s=z_s$, $s=1,2,\dots,r$, и $\bar{z}_{r+1}<z_{r+1}$. Пусть $r\geq 1$. Тогда в $R^{m,n}$ существует окрестность нуля $\mathcal{U}'$ такая, что, во-первых, $(\bar{x}+\mathcal{U}')\cap(x+\mathcal{U}')=\varnothing$ и, во-вторых, при $f^{(k)}(\bar{x}+u)=(\bar{z}_1^u,\dots,\bar{z}_N^u)$ и $f^{(k)}(x+u)=(z_1^u,\dots,z_N^u)$ для $u\in\mathcal{U}'$ имеют место неравенства $\bar{z}_s^u\leq z_s^u$, $s=1,2,\dots,r$, и $\sup\limits_{u\in\mathcal{U}'}\bar{z}_{r+1}^u<\inf\limits_{u\in\mathcal{U}'}z_{r+1}^u$.

Итак, имея это предложение, докажем теорему. Учитывая замкнутость M и ограниченность множества минимальных элементов (действительно, $\max\limits_{i,j}|x_{ij}(M,\rho,k\rho)| \le \|x(M,\rho,k\rho)\|_{\rho,k\rho} \le \le \|\bar{x}\|_{\rho,k\rho} \le \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}|\bar{x}_{ij}|$), достаточно показать, что для любой точки $x \in M$, отличной от $\bar{x} = x(M,\preccurlyeq^{(k)})$, найдутся $\rho_0 > 1$ и окрестность нуля $\mathcal{U}$, для которых выполнено соотношение

$$(x+\mathcal{U}) \cap M \cap \{x(M,\rho,k\rho)\}_{\rho>\rho_0} = \varnothing. \qquad (2)$$

Для точки $\bar{x}$ и отличной от нее точки $x \in M$ положим $f^{(k)}(\bar{x}) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_N)$ и $f^{(k)}(x) = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$. Ввиду минимальности точки $\bar{x}$ в предпорядке $\preccurlyeq^{(k)}$, найдется $r < N$ такое, что $\bar{z}_s = z_s$, $s = 1,2,\ldots,r$, $\bar{z}_{r+1} < z_{r+1}$. Предположим сначала, что $r = 0$, т.е. уже $\bar{z}_1 < z_1$. Действуя аналогично [8], покажем, что в качестве искомой окрестности нуля можно взять $\mathcal{U} = \{y = [y_{ij}] : |y_{ij}| < \frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{6}\}$. В самом деле, возьмем положительное $\varepsilon < \frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{4}$. Так как $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\|x\|_{\rho,k\rho} = \max\limits_{i,j}|x_{ij}| = z_1^{1/k}$, то существует $\rho_1 > 1$ такое, что при $\rho > \rho_1$ $\|x\|_{\rho,k\rho} > z_1^{1/k} - \varepsilon$. Далее, $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\|\bar{x}\|_{\rho,k\rho} = \max\limits_{i,j}|\bar{x}_{ij}| = \bar{z}_1^{1/k}$, значит, существует такое $\rho_2 > 1$, что при $\rho > \rho_2$ выполнено $\|\bar{x}\|_{\rho,k\rho} < \frac{z_1^{1/k} + \bar{z}_1^{1/k}}{2}$. Так как при $y \in \mathcal{U}$ имеем $|y_{ij}| < \frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{6}$, то $\|y\|_{\rho,k\rho} < (n\cdot m^k)^{1/k\rho} \times \left(\frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{6}\right)$ при $\rho > 1$. Взяв $\rho_3 > 1$ таким, чтобы $(n\cdot m^k)^{1/k\rho} < 3/2$ при $\rho > \rho_3$, получим, что $\|y\|_{\rho,k\rho} < \frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{4}$ при $\rho > \rho_3$ и $y \in \mathcal{U}$. Положим $\rho_0 = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$. Тогда при $y \in \mathcal{U}$ и $\rho > \rho_0$ получим

$$\|x+y\|_{\rho,k\rho} \ge \|x\|_{\rho,k\rho} - \|y\|_{\rho,k\rho} > z_1^{1/k} - \varepsilon - \frac{z_1^{1/k}}{4} + \frac{\bar{z}_1^{1/k}}{4} = \frac{3z_1^{1/k}}{4} + \frac{\bar{z}_1^{1/k}}{4} - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon < \frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{4}$, то $\|x+y\|_{\rho,k\rho} > \frac{z_1^{1/k} + \bar{z}_1^{1/k}}{2} > \|\bar{x}\|_{\rho,k\rho}$. Таким образом, при $r = 0$ справедливо соотношение (2).

Пусть теперь $r \ge 1$. Возьмем сначала $\mathcal{U}'$ – окрестность нуля, существование которой гарантируется предложением I, т.е. $(\bar{x}+\mathcal{U}') \cap (x+\mathcal{U}') = \varnothing$, и если $f^{(k)}(\bar{x}+u) = (\bar{z}_1^u, \bar{z}_2^u, \ldots, \bar{z}_N^u)$ и $f^{(k)}(x+u) = (z_1^u, z_2^u, \ldots, z_N^u)$, то при $u \in \mathcal{U}'$ имеем $\bar{z}_s^u \le z_s^u$, $s = 1, 2, \ldots, r$, и $\ell = \sup\limits_{u\in\mathcal{U}'} \bar{z}_{r+1}^u < \inf\limits_{u\in\mathcal{U}'} z_{r+1}^u = L$. Очевидно, что при

$u\in\mathcal{U}'$ имеем $(\|\bar{x}+u\|_{p,k_p})^{k_p}\le\sum_{s=1}^{r}(\bar{z}_s^u)^p+(N-r)\ell_s^p(\|x+u\|_{p,k_p})^{k_p}\ge$

$\ge\sum_{s=1}^{r}(z_s^u)^p+L^p$. Поэтому, выбирая $p_0>1$ из условия $(N-r)<$ $<\left(\frac{L}{\ell}\right)^{p_0}$, получим $\|\bar{x}+u\|_{p,k_p}<\|x+u\|_{p,k_p}$ при $p>p_0$ и $u\in\mathcal{U}'$.

Возьмем, далее, положительное $\rho_1<\|\bar{x}-x\|$ $\left(\|x\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|x_{ij}|^2}\right)$ так, чтобы $S_{\rho_1}(0)$ (шаровая окрестность нуля в смысле указанной нормы) содержалась в $\mathcal{U}'$. Так как $x\notin(\bar{x}+S_{\rho_1}(0))$, то, применяя лемму о сдвиге окрестности, найдем число $\rho_2>0$, при котором для всех $u\in S_{\rho_2}(0)$ таких, что $x+u\in M$, точка $(x+u)+$ $+\left(1-\frac{\rho_1}{2\|\bar{x}-x\|}\right)(\bar{x}-x)$ принадлежит $(\bar{x}+S_{\rho_1}(0))\cap M\subset(\bar{x}+\mathcal{U}')\cap M$. Положим $\alpha=1-\frac{\rho_1}{2\|\bar{x}-x\|}$, так что $1/2<\alpha<1$. Очевидно, что $\|x+u+\alpha(\bar{x}-x)\|_{p,k_p}=$

$$=\|\alpha(\bar{x}+u)+(1-\alpha)(x+u)\|_{p,k_p}\le\alpha\|\bar{x}+u\|_{p,k_p}+(1-\alpha)\|x+u\|_{p,k_p}=$$

$$=\|x+u\|_{p,k_p}+\alpha(\|\bar{x}+u\|_{p,k_p}-\|x+u\|_{p,k_p})<\|x+u\|_{p,k_p},$$

если $\|\bar{x}+u\|_{p,k_p}<\|x+u\|_{p,k_p}$. И так как последнее соотношение верно при $u\in\mathcal{U}'$ и $p>p_0$, то, положив $\mathcal{U}=\mathcal{U}'\cap S_{\rho_2}(0)$, при $u\in\mathcal{U}$ таких, что $x+u\in M$, получим

1) $\|x+u+\alpha(\bar{x}-x)\|_{p,k_p}<\|x+u\|_{p,k_p}$ при $p>p_0$,

2) $x+u+\alpha(\bar{x}-x)\in(\bar{x}+\mathcal{U}')\cap M$.

Отсюда уже следует, что при наших p_0 и $\mathcal{U}$ выполнено соотношение (2). В самом деле, пусть, напротив, нашлось $p_1>p_0$ такое, что $x(M,p_1,k_{p_1})\in(x+\mathcal{U})\cap M$, тогда

1') $\|x(M,p_1,k_{p_1})+\alpha(\bar{x}-x)\|_{p_1,k_{p_1}}<\|x(M,p_1,k_{p_1})\|_{p_1,k_{p_1}}$,

2') $x(M,p_1,k_{p_1})+\alpha(\bar{x}-x)\in(\bar{x}+\mathcal{U}')\cap M$.

Но соотношения 1′ и 2′ противоречат определению точки $x(M,p_1,k_{p_1})$ как минимальной на M в норме $\|\cdot\|_{p_1,k_{p_1}}$. Таким образом, теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следует отметить, что доказательство этой теоремы так же, как и трех предыдущих теорем в пп.2 и 3, построено таким образом, что справедливость утверждения леммы о сдвиге окрестности для какого-либо выпуклого замкнутого множества немедленно влечет справедливость утверждений всех четырех теорем для этого множества.

Автор приносит глубокую благодарность В.А.Булавскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛЕБЕДЕВ Б.Д., ПОДИНОВСКИЙ В.В., СТЫРИКОВИЧ Р.С. Задачи оптимизации по упорядоченной совокупности критериев. - "Экономика и мат. методы", 1971, т. 7, вып. 4, с. 612-616.
2. ПОДИНОВСКИЙ В.В. Лексикографическая задача линейного программирования. - "Журн. вычислит. математики и мат. физики", 1972, т.6, № 12, с. 1568-1571.
3. Cruceanu St. Sur la minimization des foncteonelles. - "C.r.Acad. sci.", 1971,273, N 17, A763-A765.
4. ЕРЕМИН И.И. О задачах последовательного программирования. - "Сиб. мат. журн.",1973, т.14, № 1, с. 53-63.
5. СИН ДОН ХА. Задачи математического программирования с несколькими критериями.- В кн.: Оптимизация. Вып. 18 (35). Новосибирск, 1976, с. 76-81.
6. МИТЯГИН Б.С. Экстремальные точки одного семейства выпуклых функций. -"Сиб. мат. журн", 1965, т.6, № 3, с. 556-563.
7. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном обобщении понятия строго выпуклой функции.-"Оптимальное планирование",Новосибирск, 1969, № 14, с. 7-20.
8. ВАСИЛЬЕВ В.А. О сходимости минимальных элементов в некоторых шкалах строгих норм в пространстве прямоугольных матриц. - "Оптимальное планирование", Новосибирск, 1969, № 14, с. 21-27.

Поступила в ред.-изд.отдел
12.11.1977 г.