Выпуск 21(38) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 519.95

ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛЕЙ НЕЙМАНА - ГЕЙЛА

И.В.Разбаев

Введение

I. Обозначения. Пусть X - метрическое пространство. Через $\Pi(X)$ обозначим совокупность всех непустых подмножеств пространства X, а через $\tilde{\Pi}(X)$ - совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства X. Пусть $\rho_H: \tilde{\Pi}(X)\times\tilde{\Pi}(X)\to\mathbb{R}$ - метрика Хаусдорфа в пространстве $\tilde{\Pi}(X)$ (определение см., например, в [I,2]). Если ρ - метрика в пространстве X, то через $\mathcal{D}^{\rho}_{\delta}(x)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса δ с центром в точке $x\in X$. Обозначим через $\mathbb{R}^n_+$ подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех векторов с неотрицательными координатами. Пусть $x,y\in\mathbb{R}^n$. Будем писать $x\leq y$, если $y-x\in\mathbb{R}^n_+$, и $x<<y$, если $y-x\in \operatorname{Int}\mathbb{R}^n_+$, где через $\operatorname{Int}\mathbb{R}^n_+$ обозначается внутренность множества $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $[0,x]$ множество точек y в пространстве $\mathbb{R}^n_+$, для которых выполнено неравенство $y\leq x$. Отображение $f:\mathbb{R}^n_+\to\Pi(\mathbb{R}^n_+)$ назовем суперлинейным, если оно супераддитивно, положительно однородно, замкнуто и является гейловским (см.[I,2]). Графиком суперлинейного отображения f назовем подмножество пространства $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+$, определенное формулой

$$\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+ : y\in f(x)\}.$$

Множество Γ_f является выпуклым замкнутым конусом с центром в нуле в пространстве $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+$ и удовлетворяет условию

$$pr_1(\Gamma_f) = \mathbb{R}^n_+, \quad (1)$$

где pr_1 – проекция произведения $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ на первую координату, т.е. $pr_1(x,y)=x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n_+$. Будем называть, следуя [1], множество Γ_f моделью Неймана – Гейла. Совокупность всех моделей Неймана – Гейла в $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ обозначим через $\mathcal{A}_n$. В дальнейшем нам будет удобно считать, что точкой пространства $\mathcal{A}_n$ является не график суперлинейного отображения, а само это отображение, т.е. через $\mathcal{A}_n$ будем обозначать совокупность всех суперлинейных отображений пространства $\mathbb{R}^n_+$, а через $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ – совокупность всех нормальных суперлинейных отображений пространства $\mathbb{R}^n_+$ (определение см. в [1]).

Определим неймановский темп роста суперлинейного отображения f по формуле

$$\alpha(f) = \max_{x \neq 0;\, (x,y)\in\Gamma_f} \beta(x,y), \quad (2)$$

где β определяется равенством

$$\beta(x,y) = \min_{i=1,\dots,n} y^i/x^i \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^n_+). \quad (3)$$

При этом x^i, y^i, $i=1,\dots,n$, являются i-ми координатами векторов x, y соответственно, и, по определению, $a/0 = \infty$ для любого вещественного a. Определим отображение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ по формуле (2).

2. Основные результаты. В работе определяется естественная топология на пространстве $\mathcal{A}_n$ и доказывается, что неймановский темп роста α является полунепрерывной сверху функцией на $\mathcal{A}_n$, но не является непрерывной при $n \geq 2$. Также показывается, что для моделей Неймана имеет место тот же результат, т.е. малое изменение матриц, задающих модель Неймана [1], может лишь резко уменьшить неймановский темп роста. Определяется множество $S_n \subset \mathcal{A}_n$, внутренность которого есть всюду плотное подмножество пространства $\mathcal{A}_n$, и функция α является непрерывной в каждой точке $f \in S_n$. Из этого результата, в частности, вытекает, что множество суперлинейных отображений $f \in \mathcal{A}_n$, не имеющих неймановского состояния равновесия, нигде не плотно в пространстве $\mathcal{A}_n$ (следствие 2 теоремы 3). Кроме того, в пространстве $\mathcal{A}_n$ вводится

другая топология, в которой неймановский темп роста становится непрерывной функцией.

Пусть теперь P_n - подмножество пространства $\tilde{\mathcal{A}}_n$, состоящее из нормальных суперлинейных отображений, у которых существует неймановское состояние равновесия со строго положительным функционалом равновесных цен. Доказывается, что множество P_n является всюду плотным подмножеством пространства $\tilde{\mathcal{A}}_n$ в обеих топологиях.

§ I. Топология пространства $\mathcal{A}_n$

I. Топология τ_1. Пусть T^{n-1} - стандартный симплекс размерности $n-1$ в пространстве $\mathbb{R}^n_+$. Всякое суперлинейное отображение $f:\mathbb{R}^n_+ \to \Pi(\mathbb{R}^n_+)$ однозначно определяется своим сужением на T^{n-1}, а следовательно, и графиком этого сужения. Таким образом, имеется естественное собственное взаимно-однозначное отображение $i:\mathcal{A}_n \to \tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathbb{R}^n_+)$, которое сопоставляет суперлинейному отображению f график Γ'_f сужения на T^{n-1} отображения f. Пусть ρ_H - метрика Хаусдорфа в пространстве $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathbb{R}^n_+)$. Тогда отображение i позволяет ввести в пространстве $\mathcal{A}_n$ метрику ρ по формуле $\rho(f,g)= =\rho_H(\Gamma'_f,\Gamma'_g)$. Обозначим через τ_1 топологию пространства $\mathcal{A}_n$, порожденную этой метрикой. Отметим, что $i(\mathcal{A}_n)$ состоит из всех компактных подмножеств K пространства $T^{n-1}\times\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющих условиям

$$pr_1(K)=T^{n-1}, \qquad (4)$$

K - выпуклое множество.

Для любого суперлинейного отображения f и числа $\lambda>0$ определено произведение λf формулой $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$. Отображение $\mathcal{O}:\mathbb{R}^n_+\to\tilde{\Pi}(\mathbb{R}^n_+)$, определенное следующим образом: $\mathcal{O}(x)=\{0\}$, где 0 - нуль пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет равенству $\mathcal{O}+f=f$. Подмножество K пространства $\mathcal{A}_n$ будем называть основанием, если для любого $f\in\mathcal{A}_n$ и $f\neq\mathcal{O}$ существует единственное число $\lambda>0$ такое, что $\lambda f\in K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пространство $\mathcal{A}_n$ имеет компактное основание.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим норму отображения $f\in\mathcal{A}_n$ по формуле

$$|f| = \rho(f, \mathbb{O}). \qquad (5)$$

Пусть $\mathcal{A}_n' = \{f\in\mathcal{A}_n : |f|=1\}$ и $co\mathcal{A}_n' = \{f\in\mathcal{A}_n : |f|\le 1\}$. Обозначим через $\mathcal{D}_+^n$ пересечение стандартного единичного шара в пространстве $\mathbb{R}^n$ с множеством $\mathbb{R}_+^n$. Имеется включение $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n)\subset\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathbb{R}_+^n)$, индуцированное включением $T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n\subset T^{n-1}\times\mathbb{R}_+^n$. Очевидно, что $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n)$ – замкнутое подмножество пространства $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathbb{R}_+^n)$. Так как $i(co\mathcal{A}_n')$ – совокупность таких компактных подмножеств пространства $T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n$, для которых выполнены условия (4), то $i(co\mathcal{A}_n')$ замкнуто в $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n)$. Пространство $\mathcal{A}_n'$ замкнуто в $co\mathcal{A}_n'$, следовательно, $i(\mathcal{A}_n')$ замкнуто в $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n)$. По теореме Бляшке пространство $\tilde{\Pi}(T^{n-1}\times\mathcal{D}_+^n)$ компактно. Таким образом, $\mathcal{A}_n'$ – компактное подмножество пространства $\mathcal{A}_n$. Кроме того, $\mathcal{A}_n'$ – основание пространства $\mathcal{A}_n$.

ТЕОРЕМА I. Функция $\alpha:\mathcal{A}_n\to\mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху, но не является непрерывной при $n\ge 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что α полунепрерывна сверху. Пусть $f_0\in\mathcal{A}_n$ и β – функция, определенная формулой (3). Так как β полунепрерывна сверху (см. [I]), то для любой точки $x\in\Gamma_{f_0}'$ существует число $\delta_x>0$ такое, что $\beta(x')\le\beta(x)+\varepsilon$ для любого $x'\in\mathrm{Int}\,\mathcal{D}\delta_x(x)$. Покроем множество Γ_{f_0}' такими открытыми шарами. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие. Получим, что $\Gamma_{f_0}'\subset\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{Int}\,\mathcal{D}\delta_{x_i}(x_i)$. Очевидно, что существует число $\delta>0$ такое, что $\delta\Gamma_{f_0}'\subset\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{Int}\,\mathcal{D}\delta_x(x)$, где через $\delta\Gamma$ обозначается замкнутая δ-окрестность множества Γ в $T^{n-1}\times\mathbb{R}_+^n$. Пусть $f\in\mathcal{A}_n$ такое, что $\rho(f,f_0)<\delta$, тогда имеет место неравенство $\rho_H(\Gamma_f',\Gamma_{f_0}')<\delta$ и включение $\Gamma_f'\subset\delta\Gamma_{f_0}'$. Из определения α и последнего включения следует, что

$$\alpha(f)\le\alpha(f_0^\delta), \qquad (6)$$

где f_0^δ – суперлинейное отображение, график сужения которого на T^{n-1} есть $\delta\Gamma_{f_0}'$. Пусть $x\in\delta\Gamma_{f_0}'$, тогда $\beta(x)\le\beta(x_i)+\varepsilon$ для некоторого i_0. Но $\beta(x_i)+\varepsilon\le\alpha(f_0)+\varepsilon$. Тем самым доказано неравенство $\alpha(f_0^\delta)\le\alpha(f_0)+\varepsilon$. Принимая во внимание (6), получаем $\alpha(f)\le\alpha(f_0)+\varepsilon$ для любого $f\in\mathcal{A}_n$ такого, что $\rho(f,f_0)<\delta$.

Для доказательства оставшейся части теоремы построим последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ суперлинейных отображений, сходящуюся к отображению $f_0 \in A_n$ и такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(f_k) < \alpha(f_0). \qquad (7)$$

Определим f_0 и $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ на симплексе T^{n-1} при $n \geq 2$ по формулам

$$f_0(x_1,\dots,x_n) = [0,(1/2\, x_1,\dots,1/2\, x_{n-1},x_n)],$$

$$f_k(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} f_0(x_1,\dots,x_n) \text{ при } \sum\limits_{i=1,\dots,n-1} x_i \geq 1/k, \\ [0,(\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i)(1/2\, x_1,\dots,1/2\, x_{n-1},x_n)] \\ \qquad \text{при } \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1/k, \end{cases}$$

где $(x_1,\dots,x_n)$ – барицентрические координаты точки симплекса T^{n-1}. Ясно, что $\alpha(f_0)=1, \alpha(f_k)=1/2$ и последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f_0. Построенные отображения обладают свойством (7). Доказательство теоремы теперь закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $\alpha : A_1 \to \mathbb{R}$ является непрерывной.

Рассмотрим частный случай модели Неймана. В этом случае конус Γ_f, задающий модель, многогранен. Модель Неймана обычно задается парой матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$, $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$ так, что векторы

$$(a_{1j},\dots,a_{nj};b_{1j},\dots,b_{nj}),\ j=1,\dots,m,$$

являются образующими конуса Γ_f. Эти векторы называются обычно базисными процессами. Отображение f определяется матрицами A и B следующим ооразом:

$$f(x)=\{y\in\mathbb{R}^n_+ : x^i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ij},\ y^i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j b_{ij},\ \lambda_j\geq 0\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать матрицы A и B такими, что определяемая ими модель удовлетворяет условию (I). Совокупность всех таких матриц при фиксированных m и n обозначим через $N_{n,m}$. Мы сопоставили каждому элементу множества $N_{n,m}$ суперлинейное отображение, т.е. задали отображение $q: N_{n,m}\to A_n$. Кроме того, имеется естественное включение $j: N_{n,m}\to R^{2nm}$, определенное формулой $j(A,B)=(a_{11},\dots,a_{n1},b_{11},\dots,b_{n1},\dots,a_{1m},\dots,a_{nm},b_{1m},\dots,b_{nm})$. Рассмотрим тополо-

гию в $N_{n,m}$, индуцированную включением j. Тогда ясно, что отображение $q: N_{n,m} \to A_n$ является непрерывным и имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Композиция $\alpha \circ q: N_{n,m} \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху функцией, но не является непрерывной при $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пример теоремы I доказывает вторую часть утверждения, первая же часть утверждения следует из непрерывности q и теоремы I.

Это предложение показывает, что малое изменение элементов матриц, задающих модель Неймана, может привести лишь к резкому уменьшению неймановского темпа роста модели.

2. Топология τ_2. Определим метрику r на пространстве A_n формулой

$$r(f,g) = \sup_{x \in T^{n-1}} \rho_H(f(x), g(x)), \quad f, g \in A_n .$$

Пусть τ_2 - топология, порожденная метрикой r.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Неймановский темп роста $\alpha: A_n \to \mathbb{R}$ является непрерывной функцией в топологии τ_2 пространства A_n.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы 2, и мы не будем его приводить.

3. Точки непрерывности функции α. В связи с тем, что функция α не является непрерывной в топологии τ_1 пространства A_n (а именно, эта топология является естественной, как показывает частный случай модели Неймана), возникает задача о нахождении точек непрерывности функции α. Будем обозначать пространство A_n, с введенной в нем топологией τ, через (A_n, τ). Здесь через A_n обозначается пара (A_n, τ_1).

Рассмотрим множество

$$\mathcal{R}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ : x \neq 0 ,$$

и если $x^i = 0$, то $y^i > 0, \; i = 1, \dots, n\}$.

Очевидно, что $\mathcal{R}_n$ является открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$. Пусть β - функция, определенная формулой (3).

ЛЕММА. Функция β является непрерывной в точке $(x,y)\in R^n_+\times R^n_+$ тогда и только тогда, когда $(x,y)\in \mathcal{R}_n$.

Доказательство леммы опустим ввиду его простоты.

Будем говорить, что $(x_0,y_0)\in \Gamma_f'$ – регулярный неймановский процесс модели Γ_f, если $\alpha(f)=\beta(x_0,y_0)$ и $(x_0,y_0)\in\mathcal{R}_n$ а суперлинейное отображение f будем называть устойчивым, если у модели Γ_f существует регулярный неймановский процесс.

ТЕОРЕМА 2. Если $f\in\mathcal{A}_n$ и f устойчиво, то функция $\alpha:(\mathcal{A}_n,\tau_1)\to R$ непрерывна в точке f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0\in\mathcal{A}_n$ и f_0 устойчиво и (x_0,y_0) – регулярный неймановский процесс такой, что $(x_0,y_0)\in T^{n-1}\times R^n_+$. Тогда из леммы вытекает, что функция β будет непрерывна в точке (x_0,y_0), а так как множество $\mathcal{R}$ открыто в $R^n_+\times R^n_+$, то функция β будет непрерывна в некоторой окрестности W точки (x_0,y_0). Пусть ε – произвольное положительное число и число $\delta_\varepsilon>0$ такое, что

$$\beta(x_0,y_0)\le\beta(x,y)+\varepsilon\quad \forall (x,y)\in\mathcal{D}_{\delta_\varepsilon}(x_0,y_0)\subset W.$$

Пусть теперь f – суперлинейное отображение, для которого $\rho(f,f_0)<\delta_\varepsilon$. Тогда существует точка $(\tilde{x},\tilde{y})$, принадлежащая множеству $\Gamma_f'\cap\mathcal{D}_{\delta_\varepsilon}(x_0,y_0)$. Следовательно, получаем

$$\alpha(f_0)=\beta(x_0,y_0)\le\beta(\tilde{x},\tilde{y})+\varepsilon\le\alpha(f)+\varepsilon\quad \forall f\in\mathcal{D}^{\rho}_{\delta_\varepsilon}(f_0).$$

Таким образом, функция α полунепрерывна снизу в точке f_0. Доказательство заканчивается ссылкой на теорему I.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f\in\mathcal{A}_n$; если модель обладает неймановским процессом (x,y) с вектором $x\gg 0$, то α непрерывна в точке f.

Теорема 2 показывает, что малое изменение устойчивой модели не может привести к скачку неймановского темпа роста.

Пусть теперь S_n – совокупность всех устойчивых суперлинейных отображений $f: R^n_+\to\Pi(R^n_+)$. В следующем параграфе покажем, что множество $\mathcal{A}_n\setminus S_n$ всех суперлинейных отображений, не являющихся устойчивыми, есть нигде не плотное подмножество в $\mathcal{A}_n$ (см. следствие теоремы 3). Тем самым функция α непрерывна на множестве S_n, внутренность которого всюду плотна

в пространстве $\mathcal{A}_n$.

§ 2. Теоремы плотности

I. Пространство S_n. Обозначим через Q_n подмножество пространства $\mathcal{A}_n$, состоящее из всех моделей, у которых все неймановские процессы являются регулярными. Ясно, что $Q_n \subset S_n$.

ТЕОРЕМА 3. *Множество Q_n является открытым и всюду плотным подмножеством пространства $(\mathcal{A}_n, \tau_1)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как для произвольных $f_0 \in \mathcal{A}_n$ и $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{D}_\varepsilon^\rho(f_0)$ содержит шар $\mathcal{D}_{\varepsilon/2}^2(f)$, то из теоремы 3 следует, что множество Q_n открыто в пространстве $(\mathcal{A}_n, \tau_2)$. На самом деле, из приведенного ниже доказательства ясно, что множество Q_n всюду плотно в пространстве $(\mathcal{A}_n, \tau_2)$. Так как нас прежде всего интересует топология τ_1, то не будем уделять этому особого внимания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Покажем, что множество Q_n открыто в $(\mathcal{A}_n, \tau_1)$. Пусть $f_0 \in Q_n$ и для любого натурального n существует отображение $f_k \in \mathcal{A}_n$ такое, что

$$\rho(f_k, f_0) < 1/k, \quad f_k \in Q_n. \tag{8}$$

Следовательно, существует последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $(x_k, y_k) \in \Gamma'_{f_k}, (x_k, y_k) \in \mathcal{B}_n$ и $\alpha(f_k) = \beta(x_k, y_k)$. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f_0 в топологии τ_1, а f_0 является устойчивым отображением, поэтому теорема 2 дает

$$\lim_{k \to \infty} \alpha(f_k) = \alpha(f_0). \tag{9}$$

Пусть теперь точка (x_0, y_0) - произвольная точка сгущения последовательности $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $\mathcal{B}_n$ открыто в $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$, то $(x_0, y_0) \notin \mathcal{B}_n$ и $(x_0, y_0) \in \Gamma'_{f_0}$. Кроме того,

$$\beta(x_0, y_0) = \lim_{k \to \infty} \beta(x_k, y_k) = \alpha(f_0).$$

Последнее вытекает из равенства (9). Следовательно, модель Γ_{f_0} имеет неймановский процесс, который не является регулярным, и поэтому $f_0 \notin Q_n$. Полученное противоречие показывает, что Q_n является открытым подмножеством пространства $(\mathcal{A}_n, \tau_1)$.

Пусть $f_0 \notin Q_n$, (x_0, y_0) – нерегулярный неймановский процесс модели Γ_{f_0} и $\varepsilon > 0$. Из определения функции β следует, что существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in T^{n-1} \times R^n_+$, близкая к точке (x_0, y_0) и такая, что

$$\rho(K, \Gamma_{f_0}) < \varepsilon, \beta(\bar{x}, \bar{y}) > \beta(x_0, y_0), \bar{x} \gg 0, \quad (10)$$

где K – выпуклая оболочка точки $(\bar{x}, \bar{y})$ и множества Γ_{f_0}. Определим f равенством $K = \Gamma'_f$. Из (10) следует, что $\rho(f, f_0) < \varepsilon$ и $\alpha(f) > \alpha(f_0)$. Кроме того, если ∂R^n_+ – граница R^n_+ в R^n, то $\Gamma_f / \partial R^n_+ = \Gamma_{f_0} / \partial R^n_+$, и, следовательно, если (x, y) – неймановский процесс модели Γ_f, то $x \in \partial R^n_+$, и поэтому (x, y) регулярен. Таким образом, $f \in Q_n$, и доказательство теоремы закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Доказательство теоремы показывает, что плотным в (A_n, τ_1) является совокупность Ω_n всех моделей, у которых все неймановские процессы (x, y) удовлетворяют условию: $x \gg 0$. Рассуждая так же, как в теореме, нетрудно показать, что Ω_n является открытым подмножеством в пространстве (A_n, τ_1).

СЛЕДСТВИЕ I. Совокупность $A_n \setminus S_n$ всех суперлинейных отображений, не являющихся устойчивыми, образует нигде не плотное подмножество пространства (A_n, τ_1).

Используя замечание I, можно показать, что имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. Совокупность моделей Γ_f таких, что $f \in A_n$, и для которых не существует неймановского состояния равновесия, является нигде не плотным подмножеством пространства A_n.

2. Пространство P_n. Пусть $f \in \tilde{A}_n$ – нормальное суперлинейное отображение, а Γ_f – модель Неймана – Гейла с производным отображением f. Пусть теперь P_n – совокупность нормальных суперлинейных отображений $f \in P_n$, у которых существует неймановское состояние равновесия со строго положительным функционалом равновесных цен. Иначе говоря, $f \in P_n$ тогда и только тогда, когда у модели Γ_f су-

ществует состояние равновесия $(\alpha, \bar{x}, \bar{y}, p)$ такое, что $\alpha = \alpha(f)$ и $p = \mathcal{J}nt\,R^n_+$.

ЛЕММА. Пусть K_1 и K_2 - замкнутые выпуклые конусы в пространстве R^n с центром в 0. Если существует линейный функционал $p \in (R^n)^*$ такой, что $p(x) > 0$ $\forall x \in K_2 \setminus \{0\}$ и $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, тогда существует линейный функционал f, удовлетворяющий условиям:

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in K_1; \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in K_2, \quad x \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_+ = \{x \in R^n : p(x) > 0\}$, S^{n-1} - стандартная $(n-1)$- мерная сфера в R^n и $K_3 = K_2 \cap S^{n-1}$. Рассмотрим ε-окрестность K' множества K_3 такую, что $K' \subset M_+$ и $K' \cap K_1 \neq \emptyset$. Обозначим через K коническую оболочку множества K'. Очевидно, что K - выпуклый конус и $K \cap K_1 = \{0\}$. Теперь искомым будет всякий функционал f, разделяющий K и K_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Следующие условия эквивалентны:

I) $f \in P_n$;

2) если (x, y) - неймановский процесс модели Γ_f, то $y = \alpha(f)x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in P_n$. Тогда существует строго положительный функционал p на R^n такой, что

$$p(y) \leq \alpha(f)p(x) \quad \forall (x, y) \in \Gamma_f \tag{II}$$

и

$$p(\bar{y}) = \alpha(f)\,p(\bar{x}) \tag{I2}$$

для любого неймановского процесса $(\bar{x}, \bar{y})$ модели Γ_f. А так как $\bar{y} - \alpha(f)\bar{x} \geq 0$ и $p >> 0$, то $\bar{y} = \alpha(f)\bar{x}$, т.е. выполнено условие 2).

Пусть теперь выполнено условие 2). Рассмотрим в пространстве R^n множество $K = \{y - \alpha(x)x : (x, y) \in \Gamma_f\}$. Множество K является выпуклым конусом и $K \cap \mathcal{J}nt\,R^n_+ = \emptyset$. Условие 2) означает, что $K \cap R^n_+ = \{0\}$. Следовательно, из леммы вытекает, что существует строго положительный функционал p на R^n, удовлетворяющий условию

$$\max_{z \in K} p(z) = 0 = \min_{z \in R^n_+} p(z).$$

Если $(\bar{x},\bar{y})$ - неймановский процесс модели Γ_f, то четверка $(\bar{x},\bar{y},\alpha(f),p)$ будет состоянием равновесия модели Γ_f. Таким образом, $f\in P_n$ и предложение полностью доказано.

ТЕОРЕМА 4. Множество P_n является всюду плотным подмножеством пространства (A_n,τ_2).

СЛЕДСТВИЕ. Множество P_n является всюду плотным подмножеством пространства (A_n,τ_1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Построим по произвольному суперлинейному отображению $f:R^n_+\to\Pi(R^n_+)$ и $\varepsilon>0$ суперлинейное отображение $f_\varepsilon\in P_n$, для которого $\tau(f,f_\varepsilon)<\varepsilon$. Опишем искомую аппроксимацию геометрически.

Пусть $\alpha(f)$ - неймановский темп роста модели Γ_f и $x\in T^{n-1}$. Рассмотрим в R^n_+ конус $X_+=\{y\in R^n_+: y\geq\alpha(f)x\}$. Конус X_+ есть результат параллельного переноса конуса R^n_+ в точку $\alpha(f)x$. Так как $\alpha(f)$ - неймановский темп роста модели Γ_f, то $\operatorname{Int}X_+\cap f(x)=\emptyset$. Согласно предложению 4, наша задача состоит в том, чтобы построить отображение f_ε, для которого множество $X_+\cap f(x)$ либо пусто, либо состоит из одной точки $\alpha(f)x$, а $\tau(f_\varepsilon,f)<\varepsilon$. Для этого каждое ребро конуса X_+ повернем на малый угол $\delta>0$. Чтобы определить поворот на малый угол $\delta>0$, определим плоскость и направление поворота каждого ребра. Для определения плоскости поворота рассмотрим пространство R^n_+.

Пусть ℓ_1 - ребро конуса R^n_+, проходящее через точку $(0,\dots,0,1)$. Тогда выпуклый конус, натянутый на остальные ребра, совпадает с R^{n-1}_+. Выделим в R^{n-1}_+ луч ℓ_2, определенный следующим образом:

$$\ell_2=\{x\in R^{n-1}_+: x^1=x^2=\dots=x^{n-1}\}.$$

Поворот ребра ℓ_1 будем осуществлять в плоскости, проходящей через ℓ_1 и ℓ_2. Аналогично определяются плоскости поворота всех остальных ребер конуса R^n_+. Требование, чтобы после поворота на малый угол $\delta>0$ ребро не пересекалось с конусом R^n_+, однозначно определяет направление поворота каждого ребра. Так как конус X_+ есть результат переноса конуса R^n_+ в точку $\alpha(f)x$, то для ребер конуса X_+ естественным образом определен поворот на малый угол δ. Рассмот-

рим в $\mathbb{R}^n$ конус L_x с началом в точке $\alpha(f)x$ и являющийся выпуклой оболочкой лучей, полученных из ребер конуса X_+ в результате поворота каждого из них на малый угол $\delta > 0$.

Пусть $\tilde{f}_\delta(x) = f(x) \cap \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} L_x$. Если δ достаточно мало, то $\rho_H(\tilde{f}_\delta(x), f(x)) < \varepsilon$. Обозначим через $\tilde{f}_\delta / T^{n-1}$ отображение пространства T^{n-1} в пространство $\Pi(\mathbb{R}^n_+)$, определенное для каждой точки пространства T^{n-1} описанным выше способом. Вследствие компактности симплекса T^{n-1}, существует число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\rho_H(\tilde{f}_{\delta_0}(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in T^{n-1}.$$

Следовательно, $r(\tilde{f}_\delta(x), f(x)) < \varepsilon$. Положим теперь $f_\varepsilon / T^{n-1} = \tilde{f}_{\delta_0} / T^{n-1}$. Ясно, что f_ε - суперлинейное отображение и $f_\varepsilon \in P_n$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из доказательства теоремы видно, что всякое суперлинейное отображение $f \in \mathcal{A}_n$ можно аппроксимировать отображением f_ε так, что $r(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\alpha(f_\varepsilon) = \alpha(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Обозначим через $\Pi(\mathbb{R}^n_+)$ совокупность всех замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n_+$ $(\phi \in \Pi(\mathbb{R}^n_+))$. Отображение $f: \mathbb{R}^n_+ \to \Pi(\mathbb{R}^n_+)$ назовем однородным, если $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любого $\lambda \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{A}'_n$ совокупность всех однородных отображений $f: \mathbb{R}^n_+ \to \Pi(\mathbb{R}^n_+)$. Точно так же, как и в случае множества $\mathcal{A}_n$, в пространстве $\mathcal{A}'_n$ вводится топология τ_1. Легко проверить, что предложения I, 2 и теоремы I-3 остаются верными для пространства $\mathcal{A}'_n$.

Автор благодарит А.М.Рубинова за полезные обсуждения работы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., "Наука", 1973.

2. КРАСС И.А. Математические модели экономической динамики. М., "Советское радио", 1976.

Поступила в ред.-изд. отдел
19.05.1978 г.