УДК 51.330.115

ОБ ОДНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А.М.Рубинов

В настоящей работе рассматривается некоторая макромодель экономической динамики. Основное внимание уделено описанию асимптотики бесконечных траекторий этой модели.

1. Дадим описание модели. Фазовое пространство ее совпадает с конусом R_+^n векторов с неотрицательными компонентами координатного n-мерного пространства R^n. Модель функционирует в дискретном времени, т.е. информация о ее состояниях поступает в моменты времени $0, 1, \ldots, t, \ldots$ В каждый момент времени t экономика описывается производственным отображением a_t, имеющим вид

$$a_t(x) = \langle 0, A_t x \rangle + \varphi_t(x) \xi_{t+1} \quad (t = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Здесь A_t – диагональная матрица (оператор), имеющая вид

$$A_t = \begin{pmatrix} \gamma_t^1 & & & 0 \\ & \gamma_t^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_t^n \end{pmatrix}$$

причем $0 \le \gamma_t^i < 1$ при всех i и t. Символом $\langle 0, y \rangle$ обозначается конусный отрезок *) $\{u : 0 \le u \le y\}$; $\varphi_t : R_+^n \to R_+$ –

---

*) Если $x \in R^n$, то i-я координата x обозначается через x^i; запись $x \ge y$ ($x \gg y$) означает, что $x^i \ge y^i$ ($x^i > y^i$) при всех i; запись $x > y$ означает, что $x \ge y$ и $x \ne y$.

непрерывный суперлинейный (т.е. вогнутый, однородный первой степени) функционал; $\mathfrak{F}_t = \{x \geq 0 : l_t(x) \leq 1\}$ (t = 1,2,...); здесь $l_t = (l_t^1, \ldots, l_t^n)$ – линейный функционал, причем $l_t^i > 0$ при всех i и t. Нетрудно проверить, что отображение a_t суперлинейно в смысле [I], т.е.

$$a_t(x+y) \supset a_t(x) + a_t(y), \; a_t(\lambda x) = \lambda a_t(x) \; (\lambda \geq 0),$$

$$a_t(0) = \{0\}, \quad a_t(R_+^n) \cap \operatorname{int} R_+^n \neq \emptyset;$$

отображение a_t замкнуто. Это означает, что рассматриваемая модель является моделью типа Неймана – Гейла.

2. Приведем простейшую экономическую интерпретацию модели. Некоторое предприятие, имея в наличии в момент t вектор продуктов $x = (x^1, \ldots, x^n)$, может в результате производственного процесса и продажи произведенных продуктов получить за единицу времени $\Phi_t(x)$ денежных единиц. За одну денежную единицу оно может получить любой набор продуктов из множества $\mathfrak{F}_{t+1}$ (координата l_{t+1}^i функционала l_{t+1} интерпретируется как цена i-го продукта в момент $t+1$); кроме того, после произведенного цикла у него остается $\nu_t^i x^i$ единиц i-го продукта. Таким образом, множество $a_t(x)$ состоит из всех наборов продуктов, которыми предприятие может располагать в момент $t+1$, если в момент t оно имело вектор x. (Термин "продукт" здесь, как обычно, понимается в обобщенном смысле. Под продуктами понимаются не только продукты в обычном смысле слова, но и виды фондов, природных ресурсов и т.д.) Функционал Φ_t можно трактовать как производственную функцию. В связи с этим предположение о суперлинейности Φ_t представляется достаточно естественным; для многих производственных функций это предположение выполняется. Отметим еще, что если i-й продукт представляет собой какой-либо вид фондов, то естественно считать, что коэффициент ν_t^i не равен нулю; этот коэффициент характеризует степень износа фондов указанного вида за период $[t, t+1]$.

3. Прежде всего рассмотрим случай, когда модель стационарна, т.е. $a_t = a$ при всех t,

$$a(x) = \langle 0, Ax \rangle + \Phi(x)\mathfrak{F}, \qquad (2)$$

где A – диагональная матрица, главная диагональ которой имеет вид

$(\nu^1, \dots, \nu^n)$, $0 \le \nu^i < 1$, $\xi = \{u \ge 0 : l(u) \le 1\}$, $l = (l^1, \dots, l^n)$, $l^i > 0 \ (i = 1, \dots, n)$;

Φ – суперлинейный функционал.

В стационарном случае рассматриваемая модель является моделью Неймана – Гейла. Важнейшей характеристикой модели Неймана – Гейла является ее неймановское состояние равновесия (см., например, [I]). Для того чтобы описать это состояние, введем в рассмотрение функционал $\Psi : R^n_+ \to R_+$, определяемый равенством

$$\Psi(x) = \max\{l(y) : y \in a(x)\}.$$

Непосредственно из определения следует, что

$$\Psi(x) = l(Ax) + \Phi(x) \quad (x \ge 0). \tag{3}$$

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$\Psi(x) \to \max; \ l(x) \le 1, \ x \ge 0, \tag{4}$$

где Ψ – функционал, определяемый формулой (3).

ТЕОРЕМА I. *Значение задачи (4) является неймановским темпом роста модели (2), решение этой задачи – неймановским равновесным вектором, функционал l – неймановскими равновесными ценами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение функцию $\alpha(x)$, положив для $x > 0$

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha x \in a(x)\}.$$

Эта функция однородна нулевой степени.

Положим

$$\bar{\alpha} = \sup\{\alpha(x) : l(x) = 1, \ x \ge 0\}. \tag{5}$$

Тогда $\bar{\alpha} = \sup\{\alpha(x) : x > 0\}$ и поэтому (см. [I], с.130) является неймановским темпом роста модели.

Пусть $l(x) = 1$ и число $\alpha \ge 0$ таково, что $\alpha x \in a(x)$, т.е. $\alpha x = y + \Phi(x) z$, где $0 \le y \le Ax$, $z \in \xi$. Применяя к обеим частям написанного равенства функционал l, получим

$$\alpha = l(y) + \Phi(x) l(z) \le l(Ax) + \Phi(x) = \Psi(x),$$

откуда следует, что $\alpha(x) \leq \Psi(x)$.

Пусть $\bar{x}$ - решение задачи (4). Предположим, что $\alpha(\bar{x})=\Psi(\bar{x})$. Тогда

$$\alpha(\bar{x}) \leq \sup\{\alpha(x): x \in \xi\} \leq \max\{\Psi(x): x \in \xi\} = \alpha(\bar{x}).$$

Привлекая (5), получим, что $\alpha(\bar{x})=\bar{\alpha}$ - неймановский темп роста, $\bar{x}$ - неймановский равновесный вектор. Так как функционал Ψ однороден первой степени, то

$$\bar{\alpha} = \max\left\{\frac{\Psi(x)}{\ell(x)} : x > 0\right\},$$

откуда следует, что для всех $x \geq 0$

$$\Psi(x) \leq \bar{\alpha}\, \ell(x).$$

Поскольку, кроме того, $\Psi(x)=\max\{\ell(y): y \in a(x)\}$, то $\ell(y) = \bar{\alpha}\, \ell(x)$ для всех $x \geq 0$, $y \in a(x)$. Это и означает, что ℓ - неймановские равновесные цены. Таким образом, для завершения доказательства осталось проверить, что $\alpha(\bar{x}) = \Psi(\bar{x})$.

Покажем с этой целью, что

$$\Psi(\bar{x})\bar{x} \geq A\bar{x}. \tag{6}$$

Положим $x_i = (0,\dots,0,(\ell^i)^{-1},0,\dots,0)$, где ненулевая координата стоит на i-м месте. Тогда $\ell(x_i)=1$, и поэтому

$$\Psi(\bar{x}) = \max\{\Psi(x): \ell(x)=1, x \geq 0\} \geq \Psi(x_i) =$$
$$= \ell(Ax_i) + \Phi(x_i) = \gamma^i + \Phi(x_i) \geq \gamma^i. \tag{7}$$

Следовательно, $\Psi(\bar{x})\bar{x}^i \geq \gamma^i \bar{x}^i$ $(i=1,\dots,n)$, откуда и следует (6).

Предположим сначала, что $\Phi(\bar{x})>0$, и рассмотрим вектор

$$z = [\Phi(\bar{x})]^{-1}\,(\Psi(\bar{x})\bar{x} - A\bar{x}). \tag{8}$$

Из (6) следует, что $z \geq 0$. Кроме того,

$$\ell(z) = [\Phi(\bar{x})]^{-1}\,(\Psi(\bar{x}) - \ell(A\bar{x})) = 1.$$

Таким образом, $z \in \xi$. Используя (8), имеем

$$\Psi(\bar{x})\bar{x} = A\bar{x} + \Phi(\bar{x})z \in a(\bar{x}).$$

Отсюда и вытекает равенство $\Psi(\bar{x})=\alpha(\bar{x})$ в данном случае.

Пусть теперь $\Phi(\bar{x})=0$. В этом случае $\Psi(\bar{x})=\ell(A\bar{x})$. Положим $z=\Psi(\bar{x})\bar{x}-A\bar{x}$. Тогда $\ell(z)=\Psi(\bar{x})-\ell(A\bar{x})=0$. Кроме того, в силу (6), $z \geq 0$. Из сказанного следует, что $z=0$, т.е. $\Psi(\bar{x})\bar{x}=A\bar{x} \in a(\bar{x})$. Таким образом, равенство $\Psi(\bar{x})=\alpha(\bar{x})$ про-

верено и в данном случае. Теорема доказана.

4. Предположим, что производственная функция Φ строго суперлинейна в том смысле, что если $x, y \in R^n_+$ не пропорциональны и хоть одна из этих точек строго положительна, то $\Phi(x+y) > \Phi(x) + \Phi(y)$. (Указанным свойством обладает, например, функция Кобба - Дугласа или CES -функция [2].) Предположим далее, что равновесный вектор $\bar{x}$ строго положителен. Тогда, как нетрудно проверить, функция Ψ достигает максимума на $\hat{F}$ в единственной точке $\bar{x}$. Поэтому, если вектор x не пропорционален $\bar{x}$, то $\Psi(x) = \max\{l(y) : y \in a(x)\} < \bar{\alpha} l(x)$. Используя это неравенство и рассуждая так же, как в [I], с.237, можно показать, что для любой бесконечной траектории $\chi = (x_t)$ рассматриваемой модели существует предел

$$\lim \bar{\alpha}^{-t} x_t = \lambda \bar{x},$$

где $\lambda = \lambda(\chi) \geq 0$. Таким образом, каждая траектория χ либо растет темпом, меньшим $\bar{\alpha}$ (т.е. $\lambda(\chi) = 0$), либо растет темпом, равным $\bar{\alpha}$ (т.е. $\lambda(\chi) > 0$) и при этом стремится (с точностью до нормировки) к равномерному вектору. Траектории, растущие небольшим темпом, являются "хорошими" с точки зрения модели.

Покажем, что для оптимальных (эффективных) траекторий рассматриваемой модели (определение см., например, в [I]) справедлива теорема о магистрали в сильнейшей форме: эти траектории выходят на равновесный луч за конечное число шагов. Точнее говоря, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть функционал Φ строго суперлинеен, равновесный вектор $\bar{x} \gg 0$. Если $\chi = (x_t)$ - оптимальная бесконечная траектория рассматриваемой модели, причем $x_0 \gg 0$, то найдется номер T такой, что при $t \geq T$ выполняется равенство $x_t = \lambda_t \bar{x}$, где λ_t - некоторое положительное число.

Доказательство теоремы опирается на следующие утверждения.

ЛЕММА I. Пусть функционал $q : R^n_+ \to R_+$ определен равенством $q = \lim \bar{\alpha}^{-t} q_t$, где

$$q_t(x)=\max\{l(y): y\in a^t(x)\} \quad (x\geq 0).$$

Тогда I) $\bar{\alpha} q(x)=\max\{q(y): y\in a(x)\}$ для любого $x\geq 0$; 2) для любой оптимальной бесконечной траектории $\mathcal{X}=(x_t)$, исходящей из внутренней точки x_0 конуса R_+^n, выполняется

$$q(x_{t+1})=\max\{q(y): y\in a(x_t)\}.$$

Доказательство см. в [3].

ЛЕММА 2. Множество $\mathcal{H}=\{x\geq 0: \psi(x)\bar{x}\geq Ax\}$ является конусом, причем $\bar{x}$ - внутренняя точка этого конуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То обстоятельство, что $\mathcal{H}$ - конус, вытекает непосредственно из суперлинейности функционала ψ. Из неравенства (6) следует включение $\bar{x}\in\mathcal{H}$. Покажем, что $\mathcal{H}$ - телесный конус и, в частности, что $\bar{x}$ - внутренняя точка $\mathcal{H}$. Для этого достаточно проверить строгую положительность вектора $z=\psi(\bar{x})\bar{x}-A\bar{x}$ (как следует из (6), $z\geq 0$). Покажем с этой целью, что $\bar{\alpha}=\psi(\bar{x})>\nu^j$ при всех j. Из (7) вытекает неравенство $\psi(\bar{x})\geq\nu^j$. Предположим, что $\psi(\bar{x})=\nu^i$ при некотором i. Положим $x_i=(0,\dots,0,(l^i)^{-1},0,\dots,0)$. Тогда $\psi(x_i)=\Phi(x_i)+\nu^i$, откуда следует $\Phi(x_i)=0$ и $\psi(x_i)=\nu^i$. Поскольку по условию теоремы $\bar{x}$ строго положителен, а функционал Φ (и, следовательно, ψ) строго суперлинеен, то $\psi(1/2(x_i+\bar{x}))>1/2(\psi(x_i)+\psi(\bar{x}))$, что невозможно, так как $l(1/2(x_i+\bar{x}))=1$. Тем самым неравенство $\psi(\bar{x})>\nu^j$ $(j=1,\dots,n)$ доказано.

Для координаты z^i вектора z имеем

$$z^i=\psi(\bar{x})\bar{x}^i-(A\bar{x})^i=(\psi(\bar{x})-\nu^i)\bar{x}^i>0.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Разобьем доказательство на несколько этапов. Предварительно отметим, что основная часть доказательства заключается в проверке следующих соотношений:

$$\bar{\alpha} q(x)\leq\psi(x) \quad (x\geq 0);\quad \bar{\alpha} q(x)=\psi(x) \quad (x\in\mathcal{H}), \tag{9}$$

где q - функционал, определенный в лемме I, $\mathcal{H}$ - конус, определенный в лемме 2.

I) Для проверки соотношений (9) понадобится вычислить $\max\{\psi(y): y\in a(x)\}$ при $x\in\mathcal{X}$. Рассмотрим с этой целью многозначные отображения

$$b(x)=Ax+\Phi(x)\xi\ ;\quad c(x)=[\psi(x)]^{-1}b(x)\quad (x\gg 0).$$

(Заметим, что $\psi(x)>0$ при $x\gg 0$, поэтому определение $c(x)$ корректно.) Включение $z\in c(x)$ эквивалентно равенству $\psi(x)z=Ax+\Phi(x)u$, где $u\geq 0$, $\ell(u)\leq 1$. Исключая вектор u, получим

$$z\in c(x)\Longleftrightarrow \psi(x)z\geq Ax,\quad \ell(z)\leq 1.$$

Отсюда следует, что для $x\in\mathcal{X}\cap \operatorname{int}R^n_+$ выполняется включение $\bar{x}\in c(x)$. Используя это обстоятельство, имеем

$$\max\{\psi(z): z\in c(x)\}\geq\psi(\bar{x})=\bar{\alpha}.$$

В то же время

$$\max\{\psi(x): z\in c(x)\}\leq\max\{\psi(z): \ell(z)\leq 1, z\geq 0\}=\bar{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\bar{\alpha}=\psi(\bar{x})=\max\{\psi(z): z\in c(x)\}\quad (x\in\mathcal{X}\cap\operatorname{int}R^n_+).$$

Отсюда следует, что для $x\in\mathcal{X}\cap\operatorname{int}R^n_+$

$$\max\{\psi(y): y\in a(x)\}=\max\{\psi(y): y\in b(x)\}=$$

$$=\psi(x)\max\{\psi(z): z\in c(x)\}=\psi(x)\cdot\psi(\bar{x})=\bar{\alpha}\,\psi(x). \qquad (10)$$

Так как $\psi(\bar{x})\psi(x)=\psi(\psi(x)\bar{x})$ и $\psi(x)\bar{x}\in b(x)\subset a(x)$, то ψ достигает наибольшего на $a(x)$ значения в точке $\psi(x)\bar{x}$.

2) Покажем, что при всех t = I,2,... выполняются соотношения

$$q_t(x)=\bar{\alpha}^{t-1}\psi(x)\qquad (x\in\mathcal{X}\cap\operatorname{int}R^n_+), \qquad (11)$$

$$q_t(x)\leq\bar{\alpha}^{t-1}\psi(x)\qquad (x\gg 0). \qquad (12)$$

Здесь $q_t(x)=\max\{\ell(y): y\in a^t(x)\}$. Из определения функционала ψ следует, что $q_1(x)=\psi(x)$ $(x\geq 0)$, так что при $t=1$ формулы (II) и (I2) имеют место. Предположим, что эти формулы справедливы при некотором t, и докажем их истинность при $t+1$. Покажем вначале, что

$$\max\{q_t(y): y\in a(x)\}=\bar{\alpha}^t\psi(x)\quad (x\in\mathcal{X}\cap\operatorname{int}R^n_+).$$

В самом деле, используя (II) и (I2), имеем

$$\max\{q_t(y): y\in a(x)\} = \sup\{q_t(y): y\in a(x), y\gg 0\} \le$$
$$\le \bar{\alpha}^{t-1}\sup\{\psi(y): y\in a(x), y\gg 0\} = \bar{\alpha}^{t}\psi(x);$$
с другой стороны, так как $\psi(x)\bar{x}\in a(x)$ и $\bar{x}\in\mathcal{H}$, то
$$\max\{q_t(y): y\in a(x)\} \ge \psi(x)q_t(\bar{x}) = \psi(x)\bar{\alpha}^{t-1}\psi(\bar{x}) = \bar{\alpha}^{t}\psi(x).$$

Вычислим функционал q_{t+1} при $x\in\mathcal{H}\cap \operatorname{int} R^n_+$. Имеем
$$q_{t+1}(x) = \max_{z\in a^{t+1}(x)} l(z) = \max_{y\in a(x)}\max_{z\in a^{t}(y)} l(z) =$$
$$= \max_{y\in a(x)} q_t(y) = \bar{\alpha}^{t}\psi(x).$$
Если же $x\gg 0$, то
$$q_{t+1}(x) = \max_{y\in a(x)} q_t(y) \le \bar{\alpha}^{t-1}\max_{y\in a(x)}\psi(y) = \bar{\alpha}^{t}\psi(x).$$
Таким образом, соотношения (II) и (I2) выполняются при всех t.

3) Функционалы q_t непрерывны. Поэтому равенство $q_t(x) = \bar{\alpha}^{t-1}\psi(x)$ выполняется для всех $x\in\mathcal{H}$, а неравенство $q_t(x) \le \bar{\alpha}^{t-1}\psi(x)$ для всех $x\ge 0$ (t = I,2,...). Переходя в этих соотношениях к пределу, получим
$$\bar{\alpha} q(x) \le \psi(x) \quad (x\ge 0); \quad \bar{\alpha} q(x) = \psi(x) \quad (x\in\mathcal{H}).$$

4) Пусть $x\in\mathcal{H}$. В силу леммы I
$$\max\{q(y): y\in a(x)\} = \bar{\alpha} q(x) = \psi(x).$$
В то же время
$$q(\psi(x)\bar{x}) = \psi(x)q(\bar{x}) = \psi(x).$$
(Равенство $q(\bar{x}) = 1$ вытекает непосредственно из определения q.) Учитывая включение $\psi(x)\bar{x}\in a(x)$, убедимся в том, что функционал q достигает максимума на множестве $a(x)$ в точке $\psi(x)\bar{x}$. Покажем, что максимум достигается только в этой точке. Предположим противное, и пусть точка $z_1\in a(x)$ такова, что $q(z_1) = \psi(x)$ и $z_1 \ne \psi(x)\bar{x}$. Обозначим $\psi(x)\bar{x}$ через z_0 и выберем число $\lambda\in(0,1)$ насколько малым, чтобы $z = \lambda z_0 + (1-\lambda)z_1$. Такое число найдется, так как по лемме $z_0\in \operatorname{int}\mathcal{H}$. Используя сильную супераддитивность функционала Φ и учитывая неравенство $z_0\gg 0$, нетрудно показать, что

$$\psi(z) > \lambda\psi(z_0) + (1-\lambda)\psi(z_1) \geq \lambda\alpha q(z_0) +$$
$$+ (1-\lambda)\alpha q(z_1) = \alpha\psi(x).$$

В то же время, так как $z \in \mathcal{H}$, то $\psi(z) = \alpha q(z)$. Таким образом, $q(z) > \psi(x) = max\{q(y) : y \in a(x)\}$, что невозможно, поскольку $z \in a(x)$.

5) Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $\chi = (x_t)$ – оптимальная траектория, исходящая из внутренней точки x_0 конуса R^n_+. Согласно известным магистральным теоремам, в каждой конической окрестности луча $(\lambda\bar{x})_{\lambda\geq 0}$ содержатся все члены этой траектории, начиная с некоторого места. Поскольку конус $\mathcal{H}$ является конической окрестностью указанного луча, то существует номер T такой, что $x_T \in \mathcal{H}$. В силу леммы I точка x_{T+1} находится из соотношения

$$q(x_{T+1}) = max\{q(y) : y \in a(x_T)\}.$$

Это означает, что $x_{T+1} = \psi(x_T)\bar{x}$. Применяя далее те же соображения, получим, что вектор x_t пропорционален вектору $\bar{x}$ при всех $t > T$. Теорема доказана.

5. Вернемся к рассмотрению общей нестационарной модели, описанной в п.I. Напомним, что производственные отображения этой модели a_t заданы формулой (I):

$$a_t(x) = \langle 0, A_t x \rangle + \Phi_t(x)\xi_{t+1} \quad (t = 0, 1, \dots).$$

Считаем в дальнейшем, что производственные функции Φ_t строго суперлинейны. Нас будут интересовать траектории этой модели, т.е. последовательности $\chi = (x_t)$ такие, что $x_{t+1} \in a_t(x_t)$.

Допустим, что равновесные векторы отображений a_t образуют оптимальную траекторию, а равновесные цены (оценки) дают ее характеристику (в смысле [I]). Тогда естественно считать, что эти векторы и цены образуют аналог состояния равновесия, и попытаться с помощью них изучать траектории. Ниже реализуется это простое соображение.

Положим $\psi_t(x) = \ell_{t+1}(A_t x) + \Phi_t(x)$ и рассмотрим аналог задачи (4):

$$\psi_t(x) \to max; \quad \ell_t(x) = 1 \quad x \geq 0 \quad (t = 1, 2, \dots).$$

(Так как функционалы ℓ_t заданы лишь при $t>0$, то будем считать, что рассматриваемые траектории начинаются при $t=1$.)
Пусть $\bar{\alpha}_t$ - значение, а $\bar{x}_t$ - решение этой задачи. (Предполагаем, что $\bar{x}_t \gg 0$; тогда решение этой задачи единственно.)
Положим

$$\beta_1=\bar{\alpha}_1;\ \beta_2=\bar{\alpha}_1\cdot\bar{\alpha}_2, \dots ;\ \beta_t=\prod_{\tau=1}^{t}\bar{\alpha}_\tau, \dots$$

и рассмотрим последовательность

$$\bar{\chi}=(\bar{x}_1, \beta_1\bar{x}_2, \dots, \beta_t\bar{x}_{t+1}, \dots).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Последовательность $\bar{\chi}$ является траекторией в том и только в том случае, когда

$$\bar{\alpha}_t\bar{x}_{t+1} \geqslant A_t\bar{x}_t \quad (t=1,2,\dots). \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z_t=[\Phi_t(\bar{x}_t)]^{-1}(\bar{\alpha}_t\bar{x}_{t+1}-A_t\bar{x}_t)$. Заметим, что $\ell_{t+1}(z_t)=1$. Поэтому справедлива следующая цепочка:
$\bar{\chi}$ - траектория $\Longleftrightarrow \beta_t\bar{x}_{t+1}\in\beta_{t-1}a(\bar{x}_t)\Longleftrightarrow\bar{\alpha}_t\bar{x}_{t+1}\in$
$\in a(\bar{x}_t)\Longleftrightarrow z_t\in \mathfrak{F}_{t+1}\Longleftrightarrow z_t\geqslant 0\Longleftrightarrow\bar{\alpha}_t x_{t+1}\geqslant A_t\bar{x}_t$.

Предложение доказано.

Поясним смысл условия (I3). Как установлено по сути дела в доказательстве леммы 2, точка $\bar{\alpha}_t\bar{x}_t-A_t\bar{x}_t$ является внутренней точкой конуса R^n_+. Поэтому (I6) заведомо выполнено, если $\bar{x}_{t+1}$ мало отличается от $\bar{x}_t$; последнее имеет место, например, если a_{t+1} мало отличается от a_t (т.е. Φ_{t+1}, A_{t+1}, ℓ_{t+1} мало отличаются от Φ_t, A_t, ℓ_t).

В дальнейшем считаем, что условие (I3) выполнено, т.е. $\bar{\chi}$ является траекторией.

Последовательность линейных функционалов $\varphi=(f_t)$ называется характеристикой траектории $\chi=(x_t)$, если $f_t(x_t)=const>0$ при всех t и $f_{t+1}(y)\leqslant f_t(x)$ для всех t, x и $y\in a_t(x)$. Положим $\bar{\varphi}=(\ell_1, 1/\beta_1\ \ell_2, \dots, 1/\beta_t\ \ell_{t+1}, \dots)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Последовательность $\bar{\varphi}$ является характеристикой траектории $\bar{\chi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\ell_t(\bar{x}_t)=1$, то в доказательстве нуждается лишь неравенство $\beta_t^{-1}\ell_{t+1}(y)\leqslant\beta_{t-1}^{-1}\ell_t(x)$ или, что то же самое, $\ell_{t+1}(y)\leqslant\bar{\alpha}_t\ell_t(x)$ $(y\in a_t(x))$. Последнее неравенство

эквивалентно соотношению $\psi_t(x) \le \bar{\alpha}_t \ell_t(x)$, которое верно. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что если последовательность $(\ell_1, \theta, \ell_2, \ldots, \theta_{t-1}\ \ell_t, \ldots)$ является характеристикой некоторой траектории $\chi = (x_t)$, то $\theta_t = \beta_t^{-1}$, а $x_t = \lambda \beta_{t-1} \bar{x}_t$ при некотором $\lambda > 0$.

6. Рассмотрим асимптотическое поведение траектории. Для этого используем результаты работы [4]. Как следует из этих результатов, асимптотика траекторий существенно зависит от оценки величины

$$\delta_t(\varepsilon) = \inf_{\rho(x, \bar{x}_t) \ge \varepsilon} \ \inf_{y \in a_t(x)} \left(1 - \frac{\ell_{t+1}(y)}{\bar{\alpha}_t \ell_t(x)}\right).$$

Здесь через $\rho(x, y)$ обозначено угловое расстояние:

$$\rho(x, y) = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| .$$

Дадим эту оценку, предполагая, что производственные функции Φ_t дважды непрерывно дифференцируемы. Положим $\tilde{\xi}_t = \{x : \ell_t(x) = 1, x \ge 0\}$. Пусть $\tilde{\Phi}_t$ – сужение функции Φ_t на $\tilde{\xi}_t$. Функция $\tilde{\Phi}_t$ дважды непрерывно дифференцируема и строго вогнута, поэтому ее вторая производная отрицательно определена, т.е.

$$-\tilde{\Phi}_t''(x)(u)(u) > 0$$

(для u таких, что $\ell_t(u) = 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) $0 < c = \inf_t \|\ell_t\| \le \sup_t \|\ell_t\| = C < +\infty$;

2) существует число $m > 0$ такое, что при всех t, всех $y \in \tilde{\xi}_t$ выполняется

$$-\tilde{\Phi}_t''(y)(u)(u) \ge \tilde{\Phi}_t(w)\, m \|u\|^2$$

(здесь $\ell_t(u) = 0$; $w = (1, 1, \ldots, 1)$);

3) $\sup_t \bar{\alpha}_t^{-1} \cdot \lambda_t < 1$; здесь $\lambda_t = \max\{\ell_{t+1}(A_t(x)) : x \in \tilde{\xi}_t\}$.

(Напомним, что

Тогда $\inf_t \delta_t(\varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \tilde{\xi}_t$. Имеем при некотором $\theta \in (0,1)$

$$\psi_t(\bar{x}_t) - \psi_t(x) = \ell_{t+1}(A_t(\bar{x}_t - x) + \tilde{\Phi}_t(\bar{x}_t) - \tilde{\Phi}_t(x) =$$

$$= \ell_{t+1}(A_t(\bar{x}_t - x)) - \tilde{\Phi}_t'(\bar{x}_t)(x - \bar{x}_t) - \tilde{\Phi}_t''(\bar{x}_t + \theta x)(x - \bar{x}_t)(x - \bar{x}_t) =$$

$$= (A_t^* \ell_{t+1} + \tilde{\Phi}_t'(\bar{x}_t))(\bar{x}_t - x) - \tilde{\Phi}_t''(\bar{x}_t + \theta x)(x - \bar{x}_t)(x - \bar{x}_t) \ge$$

$$\geq \Psi_t'(x_t')(\bar{x}_t - x) + \Phi_t(w)m\,\|x - \bar{x}_t\|^2.$$

Поскольку функционал Ψ_t достигает в точке $\bar{x}_t$ наибольшего значения на множестве $\tilde{\xi} = \{x \geq 0 : l_t(x) = 1\}$ и, по предположению, $\bar{x}_t$ – внутренняя точка конуса R_+^n, то, как следует из необходимых условий экстремума, $\Psi_t'(\bar{x}_t) = \omega\, l_t$ при некоторм вещественном ω. Поскольку $l_t(\bar{x}_t) = l_t(x) = 1$, то $\Psi_t'(\bar{x}_t)(\bar{x}_t - x) = 0$. Таким образом,

$$\Psi_t(\bar{x}_t) - \Psi_t(x) \geq \Phi_t(w)m\,\|x - \bar{x}_t\|^2.$$

Не умаляя общности, можно считать, что рассматриваемая норма евклидова. В этом случае, как легко проверить, справедливо тождество

$$\|x - \bar{x}_t\|^2 = \|x\|\,\|\bar{x}_t\|\,\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{\bar{x}_t}{\|\bar{x}_t\|}\right\|^2 + (\|x\| - \|\bar{x}_t\|)^2.$$

Так как $x \in \tilde{\xi}_t$ и $\|l_t\| \leq C$, то из неравенства $1 = l_t(x) \leq C\|x\|$ следует, что $\|x\| \geq C^{-1}$. Таким же образом $\|\bar{x}_t\| \geq C^{-1}$. Поэтому

$$\|x - \bar{x}_t\|^2 \geq 1/C^2 \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{\bar{x}_t}{\|\bar{x}_t\|}\right\|^2 = \frac{\rho(x, \bar{x}_t)^2}{C^2},$$

и, стало быть,

$$\Psi_t(\bar{x}_t) - \Psi_t(x) \geq \Phi_t(w)m\,\frac{\rho(x, \bar{x}_t)^2}{C^2}. \qquad (14)$$

Учитывая, что $\alpha_t = \Psi_t(\bar{x}_t)$, получим, используя (14),

$$\delta_t(\varepsilon) = \inf_{\rho(x, \bar{x}_t) \geq \varepsilon}\ \inf_{y \in a_t(x)} \left(1 - \frac{l_{t+1}(y)}{\alpha_t\, l_t(x)}\right) =$$

$$= \inf_{\rho(x, \bar{x}_t) \geq \varepsilon} \left(1 - \sup_{y \in a_t(x)} \frac{l_{t+1}(y)}{\alpha_t\, l_t(x)}\right) =$$

$$= \inf_{\rho(x, \bar{x}_t) \geq \varepsilon} \left(1 - \Psi_t\left(\frac{x}{l_t(x)}\right) 1/\alpha_t\right) =$$

$$= \inf_{\rho(x, \bar{x}_t) \geq \varepsilon} 1/\alpha_t \left(\Psi_t(\bar{x}_t) - \Psi_t\left(\frac{x}{l_t(x)}\right)\right) \geq 1/\alpha_t\, \Phi_t(w)\frac{m\varepsilon^2}{C^2}.$$

(Здесь использовалось равенство $\rho(x, \bar{x}_t) = \rho\left(\frac{x}{l_t(x)}, \bar{x}_t\right)$.

Для завершения доказательства осталось оценить величину $\Phi_t(w)\alpha_t^{-1}$. Так как $\|l_t\| \geq c > 0$ при всех t, то множество $\bigcup_t \tilde{\xi}_t$ ограничено; поэтому существует число λ такое, что $\lambda w \geq x$ для всех t и всех $x \in \tilde{\xi}_t$. Имееем

$$\alpha_t = \max\{\Psi_t(x) : x \in \tilde{\xi}_t\} = \max\{l_{t+1}(A_t x) + \Phi_t(x) :$$
$$: x \in \tilde{\xi}_t\} \leq \max\{l_{t+1}(A_t(x) : x \in \tilde{\xi}_t\} + \max\{\Phi_t(x) :$$
$$x \in \tilde{\xi}_t\} \leq \lambda_t + \lambda_t\, \Phi_t(w).$$

Отсюда вытекает
$$\frac{\Phi_t(w)}{\alpha_t} \geq 1/2\left(1-\frac{\lambda_t}{\alpha_t}\right).$$
Из условия 3 предложения следует $\inf_t \Phi_t(w)\alpha_t^{-1} > 0$, что и завершает доказательство.

Предположим, что последовательность (ℓ_t) равномерно положительна, т.е. при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется $\ell_t + \varepsilon\|\ell_t\| S^* \subset (R^n_+)^*$ (t = I,2,...). (Здесь $S^* = \{f : \|f\| = \max_{\|x\| \leq 1} f(x) \leq 1$.) Тогда, как следует из [4], существует наибольший темп роста траекторий рассматриваемой модели. Если, кроме того, последовательность $(\|\ell_t\|)$ имеет темп, равный I, т.е. $0 < \inf\|\ell_t\| \leq \leq \sup\|\ell_t\| < +\infty$, то наибольший темп роста определяется последовательностью (β_t) . Приведем теперь теорему об асимптотике траекторий. Эта теорема является просто переформулировкой теоремы 2 в [4] для рассматриваемой ситуации.

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность ℓ_t равномерно положительна и, кроме того, $0 < \inf\|\ell_t\| \leq \sup\|\ell_t\| < +\infty$. Пусть, далее, выполнены условия 2 и 3 предложения 3. Тогда для каждой траектории $X = (x_t)$ выполняется одно и только одно из следующих двух условий:

а) $\lim x_t/\beta_t = 0$;

б) существует числовая последовательность $\gamma = (\gamma_t)$ такая, что $0 < \inf_t \gamma_t \leq \leq \sup_t \gamma_t < +\infty$ и
$$\lim\left(x_t/\beta_t - \gamma_t \bar{x}_t\right) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.,"Наука", 1973.

2. ТЕРЕХОВ Л.Л. Производственные функции. М., "Статистика", 1974.

3. РУБИНОВ А.М. Оптимальные траектории в моделях Неймана - Гейла со строгим состоянием равновесия. - В кн.: Оптимизация. Вып. I7 (34). Новосибирск, 1975, с. 40-45.

4. РУБИНОВ А.М. Темпы роста траекторий в моделях с переменной технологией. – В кн.: Оптимизация. Вып. I9 (36). Новосибирск, 1977, с. II9–I26.

Поступила в ред.-изд.отдел
28.04.1978 г.