Выпуск 22 (39) О П Т И М И З А Ц И Я 1978 г.
Численные методы

УДК 512.25

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧНОЙ БЛОЧНОСТЬЮ МАТРИЦ

Р.А.Звягина

Рассматриваются новые обобщения блочных подходов [1-4] к решению систем линейных уравнений, позволяющие учитывать иерархическое симметричное блочное строение матрицы (очередная ступень такого строения изображена на рис.I). Алгоритмы основаны на приведении матрицы системы к блочно-треугольному виду с помощью лево- и правосторонних преобразований, построенных с учетом структуры этой матрицы. Особое внимание уделяется выявлению блочной треугольности путем упорядочения блоков на диагонали, а также выбору хранимой информации, которая в частных случаях совпадает с использовавшейся ранее [I,4].

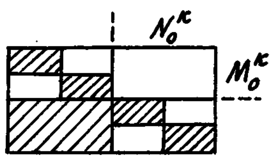

Рис.I

§ I. Описание класса матриц

Пусть $A[M,N]$ - матрица с множествами M номеров строк и N номеров столбцов и пусть, кроме того, в ней можно выделить горизонтальную и вертикальную полосы, распадающиеся на независимые блоки, причем клетка в пересечении этих полос нулевая. Если допустить, что каждый из блоков, в свою очередь, имеет аналогичное строение (рис.2), то появляется возможность рекурсивного определения класса матриц симметричной блочной структуры с разветвлением.

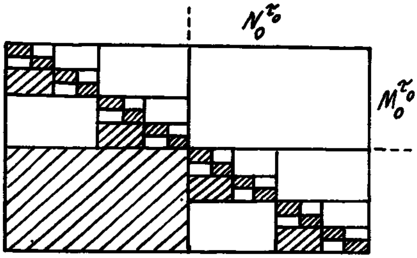

Рис.2

При этом в множестве блоков, включающем саму матрицу $A[M,N]$ и отождествленном с некоторым множеством P, например, номеров 1,2,..., p, устанавливается естественная иерархия. Старшим является блок $A[M,N]$, например, с номером $\tau_0 \in P$, ему подчинены подблоки $A[M^\tau, N^\tau], \tau \in P(\tau_0) \subset P$, на которые распадаются его блочно-диагональные полосы, как горизонтальная, так и вертикальная. Вообще каждому очередному раскраиваемому блоку $A[M^k, N^k], k \in P \setminus \{\tau_0\}$ подчинены подблоки $A[M^\tau, N^\tau], \tau \in P(k) \subset P$, на которые распадаются его блочно-диагональные полосы, как горизонтальная, так и вертикальная (см. рис.1). Положив $M^{\tau_0} = M$ и $N^{\tau_0} = N$, нетрудно заметить, что если блок $A[M^k, N^k], k \in P$, не окончательный, т.е. подвергается дальнейшему раскрою, то множества $M^\tau, \tau \in P(k)$, попарно не пересекаются, а их объединение можно считать равным множеству M^k (аналогичное утверждение верно и для множеств N^k и $N^\tau, \tau \in P(k)$).

Эту иерархию можно изобразить в виде ориентированного графа (дерева), отождествляя каждый блок (а тем самым и его номер) с некоторой вершиной и соединяя с ним направленными дугами те подблоки, которые получаются при его раскрое. При этом вершины, соответствующие блокам горизонтальной полосы, можно отмечать, например, знаком -1, а вершины, соответствующие блокам вертикальной полосы, - знаком +1 (рис. 2,3).

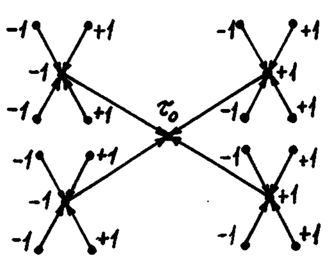

Рис.3

1.1. Определения. Дадим теперь формальное определение рассмотренной выше конструкции. Предположим, что для матрицы $A[M,N]$ заданы семейство пар

$$(M^k, N^k), \ k \in P, \qquad (1.1)$$

в которых $M^k \subset M, N^k \subset N$ для всех $k \in P$, и ориентированный граф (P, Q) с множествами P вершин и Q дуг, являю-

щийся деревом с корнем в вершине τ_0. При этом все вершины, кроме τ_0, отмечены знаками -I или +I. Будем считать, что ориентация каждой дуги выбрана так, что ее начальная вершина расположена по графу дальше от корня, чем конечная.

Обозначим через $P(k)$ множество начальных вершин тех дуг, для которых вершина k является конечной, и разобьем $P(k)$ на два подмножества $P_-(k)$ и $P_+(k)$, отнеся в $P_-(k)$ вершины, отмеченные знаком -I, а в $P_+(k)$ - вершины, отмеченные знаком +I. Множество тех $k \in P$, для которых $P(k) = \phi$, обозначим через P_{max}. Для каждого $k \in P$ положим

$$M_0^k = \bigcup_{\tau \in P_-(k)} M^\tau, \quad N_0^k = \bigcup_{\tau \in P_+(k)} N^\tau.$$

Будем говорить, что семейство (I.I) и граф (P, Q) с отмеченными вершинами и корнем τ_0 задают в матрице $A[M, N]$ симметричную блочную структуру с разветвлением, если

а) $M^{\tau_0} = M$, $N^{\tau_0} = N$;

б) $M_0^k \subset M^k$ и $N_0^k \subset N^k$ при всех $k \in P$, $M^k = \bigcup_{\tau \in P(k)} M^\tau$ при $P_+(k) \neq \phi$ и $N^k = \bigcup_{\tau \in P(k)} N^\tau$ при $P_-(k) \neq \phi$;

в) $M^\tau \cap M^\sigma = \phi$ и $N^\tau \cap N^\sigma = \phi$ при $\tau \in P(k), \sigma \in P(k), \sigma \neq \tau$;

г) для любого $k \in P$ все ненулевые элементы блока $A[M^k, N^k]$ заключены в клетке $A[M^k \setminus M_0^k, N^k \setminus N_0^k]$ и в подблоках $A[M^\tau, N^\tau]$, $\tau \in P(k)$.

Заметим, что если одно из множеств M_0^k или N_0^k, выделяющих в блоке $A[M^k, N^k]$ нулевую клетку, пусто, то $A[M^k, N^k]$ является блочно-диагональной матрицей соответственно с вертикальным или горизонтальным окаймлением, что соответствует также случаям $P_-(k) = \phi$ или $P_+(k) = \phi$. Если же для каждого $k \in P$ одно из множеств $P_-(k)$ или $P_+(k)$ пусто, то матрица $A[M, N]$ принадлежит одному из рассматривавшихся ранее классов [I-4].

I.2. Свойства. Обозначим через L_k совокупность вершин $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{t-1}$ в цепочке

$$\tau_0 \leftarrow \tau_1 \leftarrow \ldots \leftarrow \tau_{t-1} \leftarrow \tau_t = k, \quad (I.2)$$

соединяющей вершину k с корнем τ_0, а через L_k^+ - совокупность тех вершин τ_s $(0 \leq s < t)$ в цепочке (I.2), для которых $\tau_{s+1} \in P_+(\tau_s)$. Аналогично, через L_k^- обозначим совокупность тех вершин τ_s $(0 \leq s < t)$, для которых $\tau_{s+1} \in P_-(\tau_s)$.

Тогда очевидно, что при каждом $k\in P$ в полосе $A[M^k, N]$ отличны от нуля разве лишь клетки

$$A[M^k,N^k],\ A[M^k,N^\tau\setminus N_0^\tau],\ \tau\in L_k^+$$

(см. рис. 2,3), а в полосе $A[M,N^k]$ – разве лишь клетки

$$A[M^k,N^k],\ A[M^\tau\setminus M_0^\tau,N^k],\ \tau\in L_k^-.$$

§ 2. Разложение базисной матрицы

Пусть $A[I,J]$ – квадратная неособенная подматрица матрицы $A[M,N]$, иерархическая симметричная блечность которой определена в § I.

2.I. Разбиение базисной матрицы на клетки. Положив $I^{\tau_0}=I$, $J^{\tau_0}=J$, каждой вершине k графа (P,Q) сопоставим пару множеств (I^k,J^k), определяемых рекуррентно в порядке удаления от корня τ_0. Начиная с $k=\tau_0$, положим

$$I^\tau=I^k\cap M^\tau,\ \tau\in P_-(k),\quad J^\tau=J^k\cap N^\tau,\ \tau\in P_+(k), \qquad (2.I)$$

и выберем $J^\tau\subset J^k$ при $\tau\in P_-(k)$ и $I^\tau\subset I^k$ при $\tau\in P_+(k)$ из условия, что при всех $\tau\in P(k)$ матрицы $A[I^\tau,J^\tau]$ квадратные и неособенные. Кроме того, для каждого $k\in P$ положим

$$I_k=I^k\setminus\Big(\bigcup_{\tau\in P(k)} I^\tau\Big),\quad J_k=J^k\setminus\Big(\bigcup_{\tau\in P(k)} J^\tau\Big).$$

Существование такого семейства пар (I^k,J^k), $k\in P$, легко доказывается по индукции на основании неособенности исходной матрицы $A[I,J]$ и неособенности матриц $A[I^\tau,J^\tau]$, $\tau\in P(k)$, выбираемых на очередном шаге.

Таким образом, если семейство (I^τ,J^τ), $\tau\in P$, выбрано из указанных выше условий, то при каждом $k\in P$ матрица $A[I^k,J^k]$ разбивается на клетки так, как это изображено на рис.4, где $I_0^k=M_0^k\cap I^k$, $J_0^k=N_0^k\cap J^k$; $I_1^k=I^k\setminus I_0^k$, $J_1^k=J^k\setminus J_0^k$.

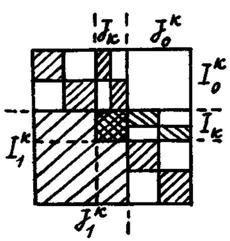

Рис.4

2.2. Приведение базисной матрицы к блочно-треугольному виду. Из каждой вершины $k\in P$ вытянем цепочку (I.2) и обозначим через S_t множество тех $k\in P$, для которых число вершин в цепочке L_k равно t. Пусть l – наибольшее из чисел $t=|L_k|$, $k\in P_{max}$.

Для приведения матрицы $A[I,J]$ к блочно-треугольному виду теперь достаточно при всех $k\in S_t$ исключить ненулевые элементы в блочно-диагональных клетках $A[I_k,J_0^k]$ и $A[I_0^k,J_k]$, изменяя $t=0,1,\dots,l-1$ в порядке возрастания (рис. 3,5 при $l=2$). С этой целью при каждом $\tau\in P$ найдем матрицу $T_\tau[I,I^\tau]$ - решение системы

$$T_\tau[I,I^\tau]\cdot A[I^\tau,J^\tau]=A[I,J^\tau]. \qquad (2.2)$$

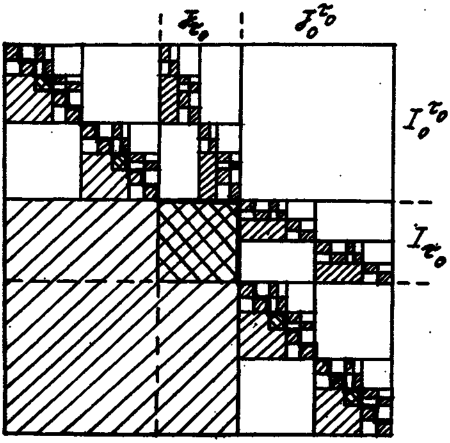

Рис. 5

С помощью вырезок $T_\tau[I_k\cap M_\tau^\tau I^\tau]$, $\tau\in P_+(k)$, $k\in S_t$, построим левосторонний мультипликатор $T^t[I,I]$, заменяя в единичной матрице $E[I,I]$ при каждом $k\in S_t$ нулевые клетки $E[I_k\cap M_\tau^\tau I^\tau]$ на клетки $-T_\tau[I_k\cap M^\tau, I^\tau]$ для всех $\tau\in P_+(k)$. Аналогично, при каждом $\tau\in P$ найдем матрицу $R_\tau[J^\tau,J]$ - решение системы

$$A[I^\tau,J^\tau]\cdot R_\tau[J^\tau,J]=A[I^\tau,J]. \qquad (2.3)$$

С помощью вырезок $R_\tau[J^\tau,J_k\cap N^\tau]$, $\tau\in P_-(k)$, $k\in S_t$, построим правосторонний мультипликатор $R^t[J,J]$, заменяя в единичной матрице $E[J,J]$ при каждом $k\in S_t$ клетки $E[J^\tau,J_k\cap N^\tau]$ на $-R_\tau[J^\tau,J_k\cap N^\tau]$ для всех $\tau\in P_-(k)$. В результате получим матрицу

$$B[I,J]=T[I,I]\cdot A[I,J]\cdot R[J,J], \qquad (2.4)$$

где $T[I,I]$ - произведение матриц $T^t[I,I]$, $t=l-1,\dots,1,0$, а $R[J,J]$ - произведение матриц $R^t[J,J]$, $t=0,1,\dots,l-1$. При этом для любого $k\in P$ в полосе $B[I_k,J]$ отличны от нуля квадратная неособенная клетка $B[I_k,J_k]$ и, возможно, клетки

$$B[I_k,J^\tau],\ \tau\in P_-(k),\quad B[I_k,J_+^\tau],\ \tau\in L_k^+.$$

Аналогично, для любого $k \in P$ в полосе $B[I, J_k]$ отлична от нуля клетка $B[I_k, J_k]$ и, возможно, клетки

$$B[I^{\tau}, J_k],\ \tau \in P_+(k),\ B[I_1^{\tau}, J_k],\ k \in L_k^-.$$

Для выявления блочной треугольности матрицы $B[I, J]$ осталось указать порядок перебора пар (I_k, J_k), $k \in P$.

2.3. Упорядочение вершин структурного графа. По определению симметричной блочной структуры каждая вершина τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, t$, в цепочке (1.2) отмечена знаком $\sigma_\nu = +1$ или $\sigma_\nu = -1$. Кроме того, каждой вершине τ_ν $(1 \le \nu \le t)$ сопоставим число $2^{l-\nu}$ и для $k = \tau_t$ $(t > 0)$ определим число

$$\rho_k = \sigma_1 \cdot 2^{l-1} + \sigma_2 \cdot 2^{l-2} + \ldots + \sigma_t \cdot 2^{l-t} = \sum_{1 \le \nu \le t} \sigma_\nu \cdot 2^{l-\nu}.$$

Положим также $\rho_{\tau_0} = 0$. Тогда нетрудно заметить, что вершинам $k \in P$, расположенным на одной и той же вертикали рис.3, соответствует одно и то же число ρ_k, а значения ρ_k на всех вертикалях монотонно возрастают от $-(2^l - 1)$ до $2^l - 1$. Для каждого $\rho = 0, \pm 1, \ldots, \pm(2^l - 1)$ положим

$$U_\rho = \{k \in P : \rho_k = \rho\}.$$

При этом, конечно, некоторые из множеств U_ρ могут быть пустыми, в частности, для классов задач [1-4] множества U_ρ всегда пусты либо при $\rho < 0$, либо при $\rho > 0$. Как будет видно из дальнейшего (п.3.1), блочная треугольность матрицы $B[I, J]$ проявляется, если пары (I_k, J_k), $k \in P$, перебирать, например, в порядке неубывания номера ρ_k (т.е. слева направо по вертикалям рис. 3), порядок же перебора в пределах множества U_{ρ_k} безразличен.

2.4. Решение систем с учетом разложения базисной матрицы. Если в систему

$$A[I, J] \cdot g[J] = u[I] \qquad (2.5)$$

(относительно столбца $g[J]$) подставить представление матрицы $A[I, J]$ из соотношения (2.4), то решение системы (2.5) сведется к трем процедурам: вычислению столбца

$$a[I] = T[I, I] \cdot u[I], \qquad (2.6)$$

решению системы

$$B[I, J] \cdot g^0[J] = a[I] \qquad (2.7)$$

(относительно столбца $g^\circ[J]$) с блочно-треугольной матрицей и, наконец, вычислению столбца

$$g[J] = R[J,J]\cdot g^\circ[J]. \tag{2.8}$$

Нас интересует алгоритм решения системы (2.5) в условиях, когда в явном виде доступна лишь матрица $A[I,J]$, а вместо остальных матриц соотношения (2.4) имеется некоторая значительно меньшая по объему информация.

§ 3. Решение системы при неполной информации о блочно-треугольной матрице

Докажем сначала две леммы, обеспечивающие возможность использования блочной треугольности в матрице $B[I,J]$.

ЛЕММА 3.I. Если $k \in U_\rho$, то множество L_k^+ содержится в объединении множеств U_λ , $\lambda < \rho_k = \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вершины $k \in U_\rho$ вытянем цепочку (I.2) в сторону корня τ_0 . Если $\tau_s \in L_k^+$ $(0 \le s < t)$, то, по определению,

$$\rho_{\tau_s} = \rho_k - 2^{\ell-(s+1)} - \sum_{s+2\le\nu\le t} \sigma_\nu \cdot 2^{\ell-\nu} \le \rho_k - 2^{\ell-t}.$$

Поскольку $t \le \ell$, то из полученного неравенства выполняется $\rho_{\tau_s} \le \rho_k - 1$, откуда следует утверждение леммы.

Для каждой вершины $k \in P$ выделим в множестве P подмножества P_-^k и P_+^k , собрав в P_-^k и P_+^k те вершины $\tau \in P$, из которых имеется путь в вершину k , состоящий лишь из вершин, отмеченных знаком -I и +I соответственно. Очевидно, что $P_-(k) \subset P_-^k$ и $P_+(k) \subset P_+^k$.

ЛЕММА 3.2. Если $k \in U_\rho$, то множество P_+^τ при $\tau \in P_-^k$ и множество P_-^k содержатся в объединении множеств U_λ, $\lambda < \rho_k = \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершину $\tau \in P_-^k$ соединить цепочкой

$$k = \tau_t \longleftarrow \tau_{t+1} \longleftarrow \ldots \longleftarrow \tau_p = \tau \quad (p > t)$$

с вершиной k , соединенной цепочкой (I.2) с корнем τ_0 , то, по определению,

$$\rho_\tau = \rho_k - \sum_{t+1\le\nu\le p} 2^{\ell-\nu} = \rho_k - 2^{\ell-p}(2^{p-t}-1).$$

Поскольку $t < p \le \ell$, то, следовательно, $\rho_\tau < \rho_k$ для любого

$\tau \in P_-^k$. Аналогично, если вершину $\sigma \in P_+^\tau$ соединить цепочкой

$$\tau = \tau_p \leftarrow \tau_{p+1} \leftarrow \ldots \leftarrow \tau_q = \sigma \quad (q > p > t)$$

с вершиной τ, то

$$\rho_\sigma = \rho_k - 2^{l-q}\{1 + 2^{q-p+1}(2^{p-t-1} - 1)\}.$$

Поскольку $t < p < q \le l$, то $\rho_\sigma < \rho_k$ для любого $\sigma \in P_+^\tau$, $\tau \in P_-^k$.

3.I. Блочная треугольность матрицы $B[I,J]$. Предположим, что в процессе решения системы (2.7) для некоторого ρ уже вычислены столбцы $g^\circ[J_1^k]$, $k \in U_\lambda$, $\lambda < \rho$. Это значит (в силу леммы 3.I), что для каждого $k \in U_\rho$ известны столбцы $g^\circ[J_1^\tau]$, $\tau \in L_k^+$, и, кроме того, столбцы $g^\circ[J^\tau]$, $\tau \in P_-(k)$, известны полностью. Последнее - на основании леммы 3.2, поскольку для каждого $\tau \in P_-(k)$ множество J^τ равно объединению множеств J_1^σ, $\sigma \in P_+^\tau \cup \{\tau\}$. Следовательно, можно вычислить столбец

$$a_k[I_k] = a[I_k] - \sum_{\tau \in P_-(k)} B[I_k, J^\tau] \cdot g^\circ[J^\tau] -$$

$$- \sum_{\tau \in L_k^+} B[I_k, J_1^\tau] \cdot g^\circ[J_1^\tau] \qquad (3.I)$$

и решить систему

$$B[I_k, J_k] \cdot g^\circ[J_k] = a_k[I_k]. \qquad (3.2)$$

Поскольку J_1^k является объединением множеств J_k и J^τ, $\tau \in P_-(k)$, то столбец $g^\circ[J_1^k]$ $(k \in U_\rho)$ теперь известен полностью.

Таким образом, наличие множеств U_ρ, $-2^l < \rho < 2^l$, обеспечивает возможность решения системы (2.7) с матрицей $B[I,J]$ указанным алгоритмом за один просмотр вершин графа (P, Q), т.е. мы тем самым доказали теорему о блочной треугольности матрицы $B[I,J]$.

3.2. Вычисление столбца $g[J]$. Предположим теперь, что вместо матрицы $B[I,J]$ нам известны лишь способы решения систем (3.2), например, известны матрицы $(B[I_k, J_k])^{-1}$, $k \in P$, и, разумееется, множества U_ρ, $-2^l < \rho < 2^l$. Преобразуем формулу (3.I), подставив в нее вместо вырезок матрицы $B[I,J]$ их выражения из формулы (2.4), а вместо столбца $a[I_k]$ - его представление из (2.6). Тогда получим $a_k[I_k] = T[I_k, I] \cdot u_k[I]$, где

$$u_k[I] = u[I] - \sum_{\tau\in P_-(k)} A[I,J]\cdot R[J,J^\tau]\cdot g^\circ[J^\tau] -$$

$$- \sum_{\tau\in L_k^+} A[I,J]\cdot R[J,J_1^\tau]\cdot g^\circ[J_1^\tau]. \qquad (3.3)$$

Из определения матрицы $T[I,I]$ следует, что если $k\in S_t$ $(0\le t<\ell)$, то $T[I_k,I]=T^t[I_k,I]$, причем $T[I_k,I]=E[I_k,I]$ в случае $P_+(k)=\phi$. Отсюда ясно, что $a_k[I_k]=u_k[I_k]$ при $P_+(k)=\phi$, а в противном случае на основании определения матрицы $T^t[I_k,I]$ получаем

$$a_k[I_k\cap M^\tau]=u_k[I_k\cap M^\tau]-T_\tau[I_k\cap M^\tau, I^\tau]\cdot u_k[I^\tau], \tau\in P_+(k). \qquad (3.4)$$

Преобразуем теперь правую часть формулы (3.3). Из определения матрицы $R[J,J]$ следует, что при любом $\tau\in P$ в полосе $R[J,J^\tau]$ отлична от нуля лишь часть $R[J^\tau, J^\tau]$. Поэтому если ввести обозначение $g_\tau[J^\tau]=R[J^\tau,J^\tau]\cdot g^\circ[J^\tau]$, то

$$R[J,J^\tau]\cdot g^\circ[J^\tau]=E[J,J^\tau]\cdot g_\tau[J^\tau]. \qquad (3.5)$$

Далее, для любого $k\in P$ множество J^k равно объединению множеств J^k и J^τ, $\tau\in P(k)$. Поэтому на основании (3.5) для столбца $g_k[J^k]$ получаем рекуррентное соотношение

$$E[J,J^k]\cdot g_k[J^k]=R[J,J_k]\cdot g^\circ[J_k]+\sum_{\tau\in P(k)} E[J,J^\tau]\cdot g_\tau[J^\tau]. \qquad (3.6)$$

Из определения матрицы $R[J,J]$ также следует, что если $k\in S_t$ $(0\le t<\ell)$, то $R[J,J_k]=R^t[J,J_k]$, причем $R[J,J_k]=E[J,J_k]$ в случае $P_-(k)=\phi$. Это значит (на основании равенства (3.6)), что в любом случае столбец $g_k[J_k\cup J_0^k]$ выражается формулами

$$g_k[J_k]=g^\circ[J_k], \qquad (3.7)$$

$$g_k[J^\tau]=g_\tau[J^\tau], \quad \tau\in P_+(k). \qquad (3.8)$$

Если $P_-(k)=\phi$, то столбцы $g_k[J^k]$ и $g_k[J_k\cup J_0^k]$ совпадают. Если же $P_-(k)\ne\phi$, то части $g_k[J^\tau]$, $\tau\in P_-(k)$, столбца $g_k[J^k]$ определяются формулами

$$g_k[J^\tau]=g_\tau[J^\tau]-R_\tau[J^\tau, J_k\cap N^\tau]\cdot g_k[J_k\cap N^\tau], \tau\in P_-(k). \qquad (3.9)$$

Заменив в (3.7)-(3.9) индекс k на τ, аналогичным образом получим

$$R[J,J_1^\tau]\cdot g^\circ[J_1^\tau]=E[J,J_1^\tau]\cdot g_\tau[J_1^\tau], \tau\in L_k^+.$$

Для столбца $u_k[I]$ имеем окончательное выражение

$$u_k[I] = u[I] - \sum_{\tau\in P_-(k)} A[I, J^\tau]\cdot g_\tau[J^\tau] -$$

$$- \sum_{\tau\in L_k^+} A[I, J_1^\tau]\cdot g_\tau[J_1^\tau]. \qquad (3.10)$$

Таким образом, получается следующий алгоритм вычисления столбца $g_{\tau_0}[J^{\tau_0}]$, равного $g[J]$ на основании (2.8) и (3.5). Пусть для некоторого ρ уже вычислены столбцы $g_\tau[J_1^\tau]$, $\tau\in U_\lambda$, $\lambda<\rho$. Тогда для $k\in U_\rho$ столбцы $g_\tau[J^\tau], \tau\in P_-(k)$, известны полностью, так как на основании (3.8) $g_\tau[J^\sigma]=g_\sigma[J^\sigma]$, $\sigma\in P_+^\tau$ (а множество J^τ, как уже отмечалось, равно объединению множеств J_1^σ, $\sigma\in P_+^\tau\cup\{\tau\}$). Поэтому для каждого $k\in U_\rho$ можно вычислить часть $u_k[I_1^k]$ столбца (3.10), а затем, если $P_+(k)\neq\emptyset$, по формулам (3.4) найти столбец $a_k[I_k]$. Решив систему (3.2), найдем столбец (3.7) и, если $P_-(k)\neq\emptyset$, по формулам (3.9) досчитаем столбцы $g_k[J^\tau], \tau\in P_-(k)$. Тем самым определим столбец $g_k[J_1^k]$ при любом $k\in U_\rho$.

Замечание. При вычислении столбцов $g_k[J_1^k], k\in P$, на ЭВМ можно обойтись полем, отводимым для вектора $g[J]$. Для этого достаточно после вычисления столбца $g_k[J_k]$ при некотором $k\in U_\rho$ иметь возможность "забывать" столбцы $g_\tau[J^\tau]$, $\tau\in P_-(k)$, а на их месте вычислять столбец $g_k[J_1^k\setminus J_k]$ по формулам (3.9). Поскольку при этом будут "забыты" столбцы $g_\sigma[J_1^\sigma], \sigma\in P_+^\tau\cup\{\tau\}, \tau\in P_-(k)$, то достаточно показать, что они нам не понадобятся при переходе к множествам $U_\lambda, \lambda>\rho$. А это нетрудно получить, используя доказанные леммы.

§ 4. Решение системы при неполной информации о мультипликаторах

Вместо матрицы $B[I,J]$ по-прежнему будем считать известными лишь способы решения систем (3.2) и множества $U_\rho, -2^\ell<\rho<2^\ell$. Из матриц $T_\tau[I,I^\tau], \tau\in P_+(k)$, и $R_\tau[J^\tau,J], \tau\in P_-(k)$ $(k\in P)$, - решений уравнений (2.2) и (2.3) соответственно - возьмем вырезки, общий объем которых меньше, чем у вырезок, используемых в алгоритме п.3.2. С этой целью для каждого $\tau\in P$ определим множества $I_{1\tau}$ и $J_{1\tau}$ следующим (симметричным) образом, считая $\tau=\tau_t$ $(t\geq 0)$ в цепочке (1.2). Положим $I_{1\tau}=\emptyset$ $(J_{1\tau}=\emptyset)$, если $\tau=\tau_0$ или $\tau\in P_-(\tau_{t-1})$ $(\tau\in P_+(\tau_{t-1}))$.

В противном случае в цепочке (1.2) определим самую левую вершину τ_s, при которой $\tau \in P_+^{\tau_s}$ ($\tau \in P_-^{\tau_s}$), и положим множество $I_{1\tau}$ (множество $J_{1\tau}$) равным объединению множеств $I_{\tau_\nu} \cap M^\tau$ (множеств $J_{\tau_\nu} \cap N^\tau$), $\nu = s, s+1, \ldots, t-1$. Заметим, что в любом случае хотя бы одно из множеств $I_{1\tau}$ или $J_{1\tau}$ пусто. Известными будем считать клетки

$$T_\tau[I_{1\tau}, I_\tau \cup I_0^\tau],\ R_\tau[J_\tau \cup J_0^\tau, J_{1\tau}],\ \tau \in P. \qquad (4.1)$$

Здесь рассматривается видоизменение алгоритма, описанного в п.3.2, в тех его частях, которые связаны с матрицами $T_\tau[I, I^\tau]$ и $R_\tau[J^\tau, J]$. В сделанных предположениях лишь формулы (3.4) и (3.9) непригодны для вычислений.

4.1. Вычисление столбца $a_k[I_k]$. Для всех $\tau \in P_+^k$ положим

$$\beta_\tau[I_{1\tau}] = T_\tau[I_{1\tau}, I^\tau] \cdot u_k[I^\tau] \qquad (4.2)$$

и для всех $\tau \in P_+^k \cup \{k\}$ определим столбец $\alpha_\tau[I_{1\tau} \cup I_\tau]$, полагая его равным нулю, если $P_+(\tau) = \phi$, а в противном случае

$$\alpha_\tau[(I_{1\tau} \cup I_\tau) \cap M^\sigma] = \beta_\sigma[I_{1\sigma}],\ \sigma \in P_+(\tau). \qquad (4.3)$$

Здесь $I_{1\sigma} = (I_\tau \cup I_{1\tau}) \cap M^\sigma$, так как $\sigma \in P_+(\tau)$. В формуле (3.4) последнее слагаемое известно лишь при $I^\tau = I_\tau \cup I_0^\tau$, т.е. при $P_+(\tau) = \phi$. Поэтому вместо (4.2) построим рекуррентный процесс. Так как при $P_+(\tau) \neq \phi$ множество I^τ равно объединению множеств $I_\tau \cup I_0^\tau$ и I^σ, $\sigma \in P_+(\tau)$, то

$$\beta_\tau[I_{1\tau}] = T_\tau[I_{1\tau}, I_\tau \cup I_0^\tau] \cdot u_k[I_\tau \cup I_0^\tau] + \\ + \sum_{\sigma \in P_+(\tau)} T_\tau[I_{1\tau}, I^\sigma] \cdot u_k[I^\sigma]. \qquad (4.4)$$

Воспользуемся представлением

$$T_\tau[I, I^\sigma] = T_\sigma[I, I^\sigma] - T_\tau[I, I_\tau \cap M^\sigma] \cdot T_\sigma[I_\tau \cap M^\sigma, I^\sigma],\ \sigma \in P_+(\tau),$$

которое можно получить из (2.2) умножением справа на матрицу $E[J^\tau, J^\sigma]$. В силу определения (4.2) каждое слагаемое под знаком $\sum$ в (4.4) можно заменить по формуле

$$T_\tau[I_{1\tau}, I^\sigma] \cdot u_k[I^\sigma] = \\ = T_\sigma[I_{1\tau}, I^\sigma] \cdot u_k[I^\sigma] - T_\tau[I_{1\tau}, I_\tau \cap M^\sigma] \cdot \beta_\sigma[I_\tau \cap M^\sigma].$$

Поскольку в матрице $T_\sigma[I_{1\tau}, I^\sigma]$ отлична от нуля лишь часть $T_\sigma[I_{1\tau} \cap M^\sigma, I^\sigma]$, то, используя определение (4.3), интересующую нас часть $\beta_\tau[I_{1\tau} \cap I^k]$ столбца (4.2) можно получить

из рекуррентного представления

$$\beta_\tau[I_{1\tau}]=\alpha_\tau[I_{1\tau}]+T_\tau[I_{1\tau},I_0^\tau]\cdot u_k[I_0^\tau]+$$
$$+T_\tau[I_{1\tau},I_\tau]\cdot\{u_k[I_\tau]-\alpha_\tau[I_\tau]\},\ \tau\in P_+^k. \qquad (4.5)$$

Таким образом, перебирая вершины $\tau\in P_+^k$ в порядке их приближения к вершине k, по формулам (4.5) и (4.3) можно получить столбец $\alpha_k[I_k]$, что позволяет вычислить столбец $a_k[I_k]=u_k[I_k]-\alpha_k[I_k]$.

4.2. Вычисление столбцов $g_k[J^\tau],\tau\in P_-(k)$. Покажем сначала, что для каждого $\sigma\in P_-^k$ верна формула

$$g_k[J^\sigma]=g_\sigma[J^\sigma]-R_\sigma[J^\sigma,J_{1\sigma}\cap J^k]\cdot g_k[J_{1\sigma}\cap J^k]. \qquad (4.6)$$

Возьмем любое $\tau\in P_-^k$ и предположим, что формула (4.6) верна для вершин $\sigma=k_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,s$, цепочки

$$k\leftarrow k_1\leftarrow k_2\leftarrow\cdots\leftarrow k_s\leftarrow\tau.$$

При $s=1$ это действительно так, поскольку $k_1\in P_-(k)$, и тогда формулы (4.6) и (3.9) совпадают, если положить $\tau=\sigma=k_1$. Так как $\tau\in P_-(k_s)$, то на основании (3.9) имеем

$$g_{k_s}[J^\tau]=g_\tau[J^\tau]-R_\tau[J^\tau,J_{k_s}\cap N^\tau]\cdot g_{k_s}[J_{k_s}\cap N^\tau], \qquad (4.7)$$

и, кроме того, верно представление

$$R_{k_s}[J^\tau,J]=R_\tau[J^\tau,J]-R_\tau[J^\tau,J_{k_s}\cap N^\tau]\cdot R_{k_s}[J_{k_s}\cap N^\tau,J], \qquad (4.8)$$

которое можно получить из (2.3) при $\tau=k_s$ умножением слева на матрицу $E[I^\tau,I^{k_s}]$. Следовательно, при $\sigma=k_s$ в выражение для вырезки $g_k[J^\tau]$ столбца (4.6) можно подставить и (4.7), и вырезку $R_{k_s}[J_{k_s}\cap N^\tau,J_{1k_s}\cap J^k]$ матрицы (4.8). Воспользовавшись тем, что в матрице $R_\tau[J^\tau,J_{1k_s}]$ отлична от нуля лишь часть $R_\tau[J^\tau,J_{1k_s}\cap N^\tau]$, а множество $J_{1\tau}$ равно $(J_{1k_s}\cup J_{k_s})\cap N^\tau$, получим формулу, совпадающую с (4.6) с точностью до замены в последней σ на τ.

Таким образом, поскольку множество J^τ является объединением множеств $J_\sigma\cup J_0^\sigma$, $\sigma\in P_-^\tau\cup\{\tau\}$ (а объединение множеств $P_-^\tau\cup\{\tau\}$ по всем $\tau\in P_-(k)$ дает множество P_-^k), то, перебирая вершины $\sigma\in P_-^k$ в порядке их удаления от вершины k, по формуле (4.6) можно вычислять вырезки $g_k[J_\sigma\cup J_0^\sigma]$, $\sigma\in P_-^\tau\cup\{\tau\}$, столбцов $g_k[J^\tau]$, $\tau\in P_-(k)$.

§ 5. Решение транспонированной системы

Алгоритмы решения системы $h[I]\cdot A[I,J]=v[J]$ относительно строки $h[I]$ получаются совершенно симметрично. Нужно лишь проводить процесс перебора вершин $k\in P$ в порядке невозрастания ρ_k (т.е. справа налево по вертикалям рис.3) и поменять ролями матрицы $R_k[J^k,J]$ и $T_k[I,I^k]$, множества P_-^k и P_+^k, множества I^k и J^k вместе с их разбиениями, а также транспонировать векторно-матричные выражения. Поэтому здесь приводятся два варианта алгоритма без вывода формул и формулируются без доказательства леммы, симметричные леммам 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 5.1. Если $k\in U_\rho$, то множество L_k^- содержится в объединении множеств U_λ, $\lambda>\rho$.

ЛЕММА 5.2. Если $k\in U_\rho$, то множества P_-^τ при $\tau\in P_+^k$ и множество P_+^k содержатся в объединении множеств U_λ, $\lambda>\rho$.

Для каждого $k\in P$ положим $h_\tau[I^\tau]=h^\circ[I^\tau]\cdot T[I^\tau,I^\tau]$, где $h^\circ[I]$ - решение системы

$$h^\circ[I]\cdot B[I,J]=v[J]\cdot R[J,J].$$

Положим также

$$v_k[J]=v[J]-\sum_{\tau\in P_+(k)} h_\tau[I^\tau]\cdot A[I^\tau,J]-$$

$$-\sum_{\tau\in L_k^-} h_\tau[I_1^\tau]\cdot A[I_1^\tau,J]. \qquad (5.1)$$

5.1. Пусть для некоторого ρ уже вычислены строки $h_\tau[I_1^\tau]$, $\tau\in U_\lambda,\lambda>\rho$. В этом случае для $k\in U_\rho$ строки $h_\tau[I^\tau],\tau\in P_+(k)$, известны полностью. Поэтому можно вычислить часть $v_k[J_1^k]$ строки (5.1) и найти строку $b_k[J_k]$ по формулам

$$b_k[J_k\cap N^\tau]=v_k[J_k\cap N^\tau]-v_k[J^\tau]\cdot R_\tau[J^\tau,J_k\cap N^\tau],\ \tau\in P_-(k), \qquad (5.2)$$

считая $b_k[J_k]=v_k[J_k]$ при $P_-(k)=\phi$. Решив систему $h_k[I_k]\cdot B[I_k,J_k]=b_k[J_k]$, досчитаем строки

$$h_k[I^\tau]=h_\tau[I^\tau]-h_k[I_k\cap M^\tau]\cdot T_\tau[I_k\cap M^\tau,I^\tau],\ \tau\in P_+(k). \qquad (5.3)$$

При этом $h_k[I^\tau]=h_\tau[I^\tau]$ для $\tau\in P_-(k)$.

5.2. Если матрицы $T_\tau[I,I^\tau]$ и $R_\tau[J^\tau,J]$ заменены вырезками (4.1), то для вычисления строк (5.2) нужно найти строки

$$\beta_\tau[J_{1\tau}\cap J^k]=v_\tau[J^\tau]\cdot R_\tau[J^\tau; J_{1\tau}\cap J^k],\ \tau\in P_-^k,$$

с помощью рекуррентного процесса

$$\beta_\tau[J_{1\tau}]=\gamma_\tau[J_{1\tau}]+v_k[J_0^\tau]\cdot R_\tau[J_0^\tau, J_{1\tau}]+$$
$$+\{v_k[J_\tau]-\gamma_\tau[J_\tau]\}\cdot R_\tau[J_\tau, J_{1\tau}],\ \tau\in P_-^k,$$

где

$$\gamma_\tau[(J_{1\tau}\cup J_\tau)\cap N^\sigma]=\begin{cases}0 & \text{, если } P_-(\tau)=\phi,\\ \beta_\sigma[J_{1\sigma}], & \sigma\in P_-(\tau).\end{cases}$$

При этом вершины $\tau\in P_-^k$ перебираются в порядке их приближения к вершине k. В результате получим $b_k[J_k]=v_k[J_k]-\gamma_k[J_k]$.

Вместо формулы (5.3) воспользуемся формулой

$$h_k[I^\sigma]=h_\sigma[I^\sigma]-h_k[I_{1\sigma}\cap I^k]\cdot T_\sigma[I_{1\sigma}\cap I^k; I^\sigma],\ \sigma\in P_+^k,$$

вычисляя по ней части $h_k[I_\sigma\cup I_0^\sigma],\ \sigma\in P_-^\tau\cup\{\tau\}$, строк $h_k[I^\tau]$, $\tau\in P_+(k)$. При этом вершины $\sigma\in P_+^k$ перебираются в порядке их удаления от вершины k.

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Решение задач линейного программирования с матрицами разветвленной блочной структуры. – В кн.: Оптимизация. Вып. 19(36), 1977, с.5-28.
2. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с матрицами произвольной блочной структуры. – "ДАН СССР", 1971, т.196, № 4, с.755-758.
3. ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. О методе решения задач линейного программирования на основе многоступенчатой блочной структуры с окаймлением. – "ДАН СССР", 1974, т.217, № 2, с.268-271.
4. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. М., "Наука", 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
28.09.1978 г.