Выпуск 23 (40) ОПТИМИЗАЦИЯ 1979 г.

Выпуклый анализ

УДК 513.88

# О ПРИЗНАКАХ КРАЙНИХ ОПЕРАТОРОВ

С.С. Кутателадзе

В этой заметке на основе результатов [1,2] выводятся операторные варианты признаков Бука - Фелпса - Жоли и Бауэра для крайних точек субдифференциалов выпуклых операторов.

Пусть $X$ - векторное пространство, $Y$ - некоторое $K$-пространство и $P: X \to Y$ - сублинейный оператор. Символом $Ch(P)$ обозначается множество крайних точек субдифференциала $\partial(P)$ оператора $P$, т.е.

$$\partial(P) = \{A \in L(X,Y) : Ax \leq Px \quad (x \in X)\}.$$

Если $Z$ - еще одно $K$-пространство и $T \in L^+(Y,Z)$ - положительный оператор из $Y$ в $Z$, то оператор $A \in \partial(P)$ такой, что $T \circ A \in Ch(T \circ P)$, называется $T$-крайним.

В дальнейшем нам понадобятся две операции конволюции. Именно, если $Q_1$ и $Q_2$ - (для простоты положительные) сублинейные операторы, то полагаем

$$Q_1 \square Q_2 : x \longmapsto \inf_{x_1 + x_2 = x} (Q_1 x_1 + Q_2 x_2);$$

$$Q_1 \underset{T}{\varphi} Q_2 : x \longmapsto \sup_{\substack{T_1 \geq 0,\, T_2 \geq 0 \\ T_1 + T_2 = T}} (T_1 \circ Q_1 \square T_2 \circ Q_2).$$

Отметим, что в силу теоремы о векторном минимаксе выполняется

$$Q_1 \underset{T}{\varphi} Q_2 : x \longmapsto \inf_{x_1 + x_2 = x} T(Q_1 x_1 \vee Q_2 x_2).$$

ТЕОРЕМА 1. Для оператора $A$ из $\partial(P)$ положим

$$Q_1 = P - A; \quad Q_2 : x \longrightarrow Q_1(-x).$$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

(I) Оператор $A$ является $T$-крайним.

(2) $T \circ Q_1 \,\square\, T \circ Q_2 = 0.$

(3) $Q_1 \underset{T}{\circ} Q_2 = 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как установлено в [I], оператор $A$ является $T$-крайним в том и только в том случае, если для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется

$$Ty^+ = \inf_{u \in X} (T((Pu - Au) \vee (P(u-x) - A(u-x) + y))). \quad (*)$$

Таким образом, (I)$\Longrightarrow$(3).

Импликация (3)$\Longrightarrow$(2) очевидна. Более того, если $0 \leq T' \leq T$, то из (2) вытекает, что $T' \circ Q_1 \square (T - T') \circ Q_2 = 0$. Отсюда, в частности, следует, что (2) обеспечивает справедливость равенства (*) при $y = 0$.

Таким образом, привлекая теорему о векторном минимаксе и формулу

$$\partial(y \longmapsto Ty^+) = [0, T],$$

последовательно получаем

$$\inf_{u \in X} (T((Pu - Au) \vee (P(u-x) - A(u-x) + y))) =$$

$$= \sup_{\substack{T_1 + T_2 = T \\ T_1, T_2 \geq 0}} (\inf_{u \in X} (T_1(Pu - Au) + T_2(P(u-x) - A(u-x))) + T_2 y) =$$

$$= \sup\{T_2 y : T_1 \geq 0, T_2 \geq 0, T_1 + T_2 = T\} = \sup\{T'y : T' \in [0, T]\} = Ty^+,$$

что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема I является операторным вариантом известного признака Бука - Фелпса - Коли для крайних точек (см., например, [3]).

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ - некоторое слабо порядково ограниченное множество в пространстве $L(X, Y)$. Как обычно, символом $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ обозначается пространство ограниченных $Y$-значных функций на $\mathfrak{A}$, а символом $\Delta_{\mathfrak{A}}$ - естественное отождествление пространства $Y$ с диагональю пространства $Y^{\mathfrak{A}}$. Кроме того, полагаем

$$\langle \mathfrak{A} \rangle : X \longrightarrow (Y^{\mathfrak{A}})_\infty; \quad \langle \mathfrak{A} \rangle x : A \longmapsto Ax \qquad (A \in \mathfrak{A});$$

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} f = \sup\{f(A) : A \in \mathfrak{A}\} \qquad (f \in (Y^{\mathfrak{A}})_\infty);$$

$$I_Y : y \longrightarrow y \qquad (y \in Y).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор $P$ задан в виде $P = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle$. Тогда для оператора $A$ из $\partial(P)$ эквивалентны утверждения:

(I) Оператор $A$ - крайняя точка $\partial(P)$.

(2) Для всякого оператора $\beta \in L((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Y)$ из условий

$$\beta \geq 0, \quad \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y, \; \beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = A$$

вытекает соотношение

$$\beta\,|\langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax| = 0 \qquad (x \in X).$$

Иными словами, оператор $\beta$ является решеточным гомоморфизмом пространства $Y(\mathfrak{A})$ в $Y$, где $Y(\mathfrak{A})$ - наименьшая векторная подрешетка в пространстве $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$, содержащая множество $\langle \mathfrak{A} \rangle [X] + \Delta_{\mathfrak{A}}[Y]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Привлекая теорему I, видим, что оператор $A$ является крайним в том и только в том случае, если для всякого $x \in X$ выполняется

$$0 = \inf_{u \in X} \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} (\langle \mathfrak{A} \rangle (x+u) - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ A(u+x)) \vee \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} (\langle \mathfrak{A} \rangle (u-x) -$$

$$- \Delta_{\mathfrak{A}} \circ A(u-x)) = \inf_{u \in X} \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} (\langle \mathfrak{A} \rangle u - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Au + |\langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax|).$$

Таким образом, привлекая равенство

$$\partial(\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}) = \{\beta \in L^+((Y^{\mathfrak{A}})_\infty, Y) : \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y\}$$

и теорему о векторном минимаксе, в продолжении начатой выкладки получаем

$$0 = \sup_{\beta \in \partial(\mathcal{E}_{\mathfrak{A}})} \inf_{u \in X} (\beta \circ (\langle \mathfrak{A} \rangle u - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Au) + |\langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax|) =$$

$$= \sup_{\beta \in \partial(\mathcal{E}_{\mathfrak{A}})} \inf_{u \in X} (\beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle u - \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Au + \beta |\langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax|) =$$

$$= \sup_{\beta \in \partial(\mathcal{E}_{\mathfrak{A}})} (\beta |\langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax|) + \inf_{u \in X} (\beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle u - Au)) =$$

$$= \sup_{\beta \geq 0,\, \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y,\, \beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = A} \beta |\langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax|.$$

Для завершения доказательства осталось только установить,

что оператор $\beta \geq 0$ таков, что

$$\beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y ; \beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = A ; \beta | \langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax | = 0 \quad (x \in X), (**)$$

в том и только в том случае, если $\beta$ - это решеточный гомоморфизм $Y(\mathfrak{A})$ в $Y$. (Напомним, что $T: Y \to Z$ является решеточным гомоморфизмом в том и только в том случае, если $[0, T] = [0, I_Z] \circ T$.)

Ясно, что если $\beta$ является решеточным гомоморфизмом, то

$$\beta | \langle \mathfrak{A} \rangle x - \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax | = | \beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle x - \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ Ax | = | Ax - Ax | = 0.$$

Поэтому допустим, что выполняется (**), и возьмем оператор $\beta'$ из интервала $[0, \beta]$. Тогда ясно, что

$$0 = \beta' \circ \langle \mathfrak{A} \rangle - \beta' \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ A - (\beta - \beta') \circ \langle \mathfrak{A} \rangle + (\beta - \beta') \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ A.$$

Таким образом, выполняется следующее равенство:

$$\beta' \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = \beta' \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ A = \beta' \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle.$$

Полагая $\gamma = \beta' \circ \Delta_{\mathfrak{A}}$, видим, что $\gamma \in [0, I_Y]$, при этом

$$\beta' \circ \langle \mathfrak{A} \rangle = \gamma \circ \beta \circ \langle \mathfrak{A} \rangle ; \quad \beta' \circ \Delta_{\mathfrak{A}} = \gamma \circ \beta \circ \Delta_{\mathfrak{A}},$$

так что $\beta$ - действительно решеточный гомоморфизм.

Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 представляет собой обобщенный вариант известного критерия Бауэра точек границы Шоке (см., например, [2]). Отметим здесь же, что аналогичный признак может быть получен и для $T$-крайних точек.

## ЛИТЕРАТУРА


1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Крайние точки субдифференциалов. - Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 5, с. 1001-1003.
2. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
3. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1979.



Поступила в ред.-изд. отдел
10.05.1979 г.