Выпуск 23 (40) ОПТИМИЗАЦИЯ 1979 г.

Выпуклый анализ

УДК 513.88+512.25/26

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В K-ПРОСТРАНСТВАХ

А.Г.Пинскер

Общая задача линейной оптимизации в K-пространствах состоит в следующем.

Пусть $\mathscr{X}$ – упорядоченное пространство Канторовича (K-пространство), a_{ij}, b_i и c_j – его известные, а x_j – неизвестные элементы. Следует максимизировать целевую функцию

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad X=\{x_j\}, \tag{I}$$

при условиях

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Вектор X , компоненты которого удовлетворяют условиям (2) и (3), называется, как обычно, планом задачи. План X^* – оптимальный, если $f(X) \leq f(X^*)$ для всякого плана X .

Пространство $\mathscr{X}$ можно считать расширенным, следовательно, с единицей, и в нем имеет смысл операция умножения его элементов, превращающая его в линейное упорядоченное кольцо. Это позволяет рассматривать определители с элементами из $\mathscr{X}$, обладающие многими обычными свойствами "числовых" определителей. При определенных условиях основные теоремы классической линейной алгебры оказываются справедливыми и в абстрактном случае.

Задачу (I)-(3) можно спроектировать в любую компоненту $\mathscr{X}_e$ пространства $\mathscr{X}$, для этого достаточно параметры задачи заменить их проекциями в $\mathscr{X}_0$. Заметим, что операция проектирования линейна, дизъюнктна, мультипликативна и положительна.

Для случая, когда коэффициенты a_{ij} - вещественные числа, задача (I)-(3), как установлено в [I], имеет решение при единственном условии ограниченности целевой функции на (непустом) множестве ее планов.

Нам понадобятся некоторые понятия и вспомогательные предложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Элемент $x \in \mathscr{X}$ будем называть существенно положительным, если для всякого $x'>0$ выполняется $x \wedge x'>0$, существенно отрицательным, если x существенно положительный, и, наконец, элемент $x \in \mathscr{X}$ будем называть существенным, если он существенно положительный или существенно отрицательный, или равен нулю.

ЛЕММА I. *Пусть $E=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - конечное подмножество элементов $\mathscr{X}$. Тогда существует его разложение на конечное число компонент такое, что проекции элементов E на каждую из них - существенные элементы $\mathscr{X}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что проекция существенного элемента $\mathscr{X}$ в любую его компоненту существенна. Через $\mathscr{X}_i^+$ и $\mathscr{X}_i^-$ обозначим компоненты пространства $\mathscr{X}$, порожденные соответственно элементами x_i^+ и x_i^-, а через $\mathscr{X}_i^0$ - дизъюнктное дополнение объединения этих компонент. Компоненты $\mathscr{X}_1^+$, $\mathscr{X}_1^-$ и $\mathscr{X}_1^0$ образуют разложение $\mathscr{X}$, и проекции элемента $\mathscr{X}_1$ в каждую из них, очевидно, существенны. Пересечения $\mathscr{X}_1^+ \cap \mathscr{X}_2^+$, $\mathscr{X}_1^+ \cap \mathscr{X}_2^-, \dots, \mathscr{X}_1^0 \cap \mathscr{X}_2^0$ представляют собой компоненты $\mathscr{X}$, также образующие его разложение, и проекции элементов x_1 и x_2 в каждую из них - существенные элементы $\mathscr{X}$. Продолжая этот процесс после n-го шага, придем к совокупности компонент вида $\mathscr{X}_1^{\alpha_1} \cap \mathscr{X}_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap \mathscr{X}_n^{\alpha_n}$, где α_i - символы знаков + , - и 0, обладающей требуемыми свойствами.

ЛЕММА 2. *Пусть E - конечное подмножество элементов $\mathscr{X}$ и $z = \sup|x|$ $(x \in E)$. Совокупность $\mathscr{X}_E$ элементов $\mathscr{X}$ таких, что $|x| \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$, где n - любое натуральное число, а $\lambda_k \ge 0$ - вещественные числа, представляет собой нор-*

мальное подпространство $\mathscr{X}$, содержащее произведение всех его элементов, т.е. являющееся линейным мультипликативным кольцом. Ему, очевидно, принадлежит и множество E.

Справедливость леммы проверяется без труда.

ЛЕММА 3. В линейном упорядоченном кольце $\mathscr{X}_E$ можно определить линейный мультипликативный функционал $\mathscr{F}$, значения которого для всех его существенно положительных элементов строго положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_\infty(Q)$ - реализация пространства $\mathscr{X}$ в виде пространства непрерывных функций на экстремальном бикомпакте Q, допускающих бесконечные значения на нигде не плотных множествах. Элементу $\mathcal{Z}$ в этой реализации соответствует функция $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(t)$ $(t\in Q)$, принимающая конечное значение в некоторой точке $t_0\in Q$. В этой точке конечными будут и значения функций вида $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k \mathcal{Z}_k(t)$, а следовательно, и всех функций $x(t)$, где $x\in\mathscr{X}_E$. Если при этом x - существенно положительный элемент $\mathscr{X}_E$, то очевидно $x(t_0)>0$. Положим теперь $\mathscr{F}(x)=x(t_0)$ $(x\in\mathscr{X}_E)$.

Функционал $\mathscr{F}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Задачу (I)-(3) будем называть регулярной, если ранг матрицы коэффициентов системы (3) равен m и все ее базисные определители - существенные элементы $\mathscr{X}$.

Допустим, что определитель $\mathscr{D}$, образованный, например, первыми m столбцами матрицы коэффициентов системы (3), отличен от нуля. В случае регулярной задачи $\mathscr{D}$ существенный элемент $\mathscr{X}$ и систему (3) можно преобразовать в равносильную ей систему с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_m$, имеющую вид

$$x_k+\sum_{j=m+1}^{n} a'_{kj}\, x_j=b'_k,\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{4}$$

где

$$a'_{kj}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\, a_{ij},\; b'_k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik} b_i,\; k=1,\ldots,m;\; j=m+1,\ldots,n. \tag{5}$$

Здесь $\alpha_{ik}=A_{ik}/\mathscr{D}$ (A_{ik} - алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя $\mathcal{D}$). Заметим, что в $\mathcal{X}$ имеет смысл деление его любого элемента на существенный отличный от нуля элемент.

Выразив целевую функцию (I) через свободные неизвестные $x_{m+1}, \ldots, x_n$, получим

$$f(X)=c_0'+\sum_{j=m+1}^{n} c_j' x_j , \qquad (6)$$

где

$$c_0'=\sum_{k=1}^{m} b_k' c_k , \; c_j'=c_j-\sum_{k=1}^{m} a_{kj}' c_k , \; j=m+1, \ldots, n. \qquad (7)$$

Элементы (5) и (7) зависят от выбора базиса системы (3), и их общее количество конечно. Условимся называть их разрешающими элементами регулярной задачи.

Образуем теперь множество $E \in \mathcal{X}$ из всех элементов a_{ij}, b_i, c_j, всех базисных определителей системы (3) и их обратных величин, а также всех разрешающих элементов рассматриваемой регулярной задачи. E - конечное подмножество $\mathcal{X}$, и в линейном упорядоченном кольце $\mathcal{X}_E$ по лемме 3 существует линейный мультипликативный функционал $\mathcal{F}$, значения которого для всех существенно положительных элементов $\mathcal{X}_E$ строго положительны.

Введем теперь в рассмотрение числовую задачу линейного программирования, состоящую в максимизации целевой функции

$$\varphi(T)=\sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}(c_j) t_j , \; T=\{t_j\} , \qquad (8)$$

при условиях

$$t_j \geqslant 0, \; j=1,2, \ldots, n, \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}(a_{ij}) t_j=\mathcal{F}(b_i), \; i=1,2, \ldots, m. \qquad (10)$$

Задача (8)-(I0) тесно связана с регулярной задачей (I)-(3); будем называть ее сопряженной задачей. В силу свойств функционала $\mathcal{F}$, определители $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ будут одновременно базисными или не базисными систем (3) и (I0) соответственно. Поэтому базису $x_1, x_2, \ldots, x_m$ системы (3) будет соответствовать базис $t_1, t_2, \ldots, t_m$ системы (I0), и последняя может быть преобразована в систему

$$t_k+\sum_{j=m+1}^{n} \mathcal{F}(a_{kj}') t_j=\mathcal{F}(b_k'), \; k=1,2, \ldots, m, \qquad (11)$$

подобную системе (4) и равносильную системе (10). Соответствующее выражение целевой функции (8) через свободные неизвестные $t_{m+1},\dots,t_n$, аналогичное выражению (6), будет

$$\varphi(T)=\mathcal{F}(c_0')+\sum_{j=m+1}^{n}\mathcal{F}(c_j')t_j. \qquad (12)$$

Перейдем теперь к исследованию регулярной задачи.

ЛЕММА 4. Пусть все разрешающие элементы регулярной задачи – существенные элементы $\mathcal{X}$. Тогда

a) если соответствующая сопряженная задача обладает планами, то обладает планами и данная регулярная задача;

b) если целевая функция сопряженной задачи не ограничена сверху на множестве ее планов, то целевая функция регулярной задачи также не ограничена сверху на множестве ее планов;

c) если сопряженная задача имеет решение, то имеет решение и регулярная задача.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. a) Если сопряженная задача обладает планами, то существует базисный план этой задачи, например $T=(t_1, t_2,\dots,t_m, 0,\dots,0)$, и система (10) равносильна системе (11), в которой $\mathcal{F}(b_k')=t_k \geqslant 0, k=1,\dots,m$. Так как элементы b_k' – разрешающие и, следовательно, существенные, то, по свойству функционала $\mathcal{F}$, $b_k'\geqslant 0$. Отсюда следует, что вектор $X=(x_1,\dots,x_m, 0,\dots,0)$, где $x_k=b_k'$, является базисным планом системы (4) и, следовательно, равносильной ей системы (3). Таким образом, множество планов регулярной задачи не пусто.

b) Пусть целевая функция сопряженной задачи не ограничена сверху на множестве ее планов, тогда существует представление системы (10), например, в виде (11) с базисным планом $T=(t_1,\dots,t_m, 0,\dots,0)$, где $t_k=\mathcal{F}(b_k')\geq 0$, и соответствующее выражение целевой функции (8) в виде (12), причем коэффициенты при некотором свободном неизвестном, например t_{m+1}, неположительны, т.е. $\mathcal{F}(a_{1,m+1}')\leq 0,\dots,\mathcal{F}(a_{m,m+1}')\leq 0$, в то время как коэффициент $\mathcal{F}(c_{m+1}')>0$. В силу свойств функционала $\mathcal{F}$ разрешающие элементы $b'_k \geq 0, a'_{1,m+1} \neq 0, \dots, a'_{m,m+1} \neq 0$ и $c'_{m+1} > 0$, поэтому вектор $X = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, где $x_k = b'_k \geq 0$ - базисный план регулярной задачи. Вектор

$$X_n = (x_1 - a'_{1,m+1} n x_0, \dots, x_m - a'_{m,m+1} n x_0, n x_0, 0, \dots, 0),$$

где $x_0 > 0$, - также план регулярной задачи при любом $n = 1, 2, \dots$ и для него значение целевой функции

$$f(X_n) = c'_0 + c'_{m+1} n x_0 \to +\infty$$

при $n \to +\infty$, т.е. целевая функция регулярной задачи не ограничена сверху на множестве ее планов.

c) Пусть сопряженная задача имеет решение и $T = (t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$ - ее оптимальный базисный план. Тогда система (I0) может быть преобразована в систему (II), ей равносильную, причем $t_k = \mathcal{F}(b'_k) \geq 0$, а коэффициенты целевой функции $\mathcal{F}(c'_j) \leq 0$. В таком случае $b'_k \geq 0, c'_j \leq 0$ и $X^* = (b'_1, \dots, b'_m, 0, \dots, 0)$ - оптимальный план регулярной задачи, так как для любого ее плана X

$$f(X) = c'_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c'_j x_j \leq c'_0 = f(X^*).$$

Из доказанных лемм легко следует следующая

ТЕОРЕМА I. Если разрешающие элементы регулярной задачи - существенные элементы $\mathcal{X}$ и ее целевая функция ограничена сверху на (непустом) множестве планов задачи, то эта задача имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X' = \{x'_j\}$ - план регулярной задачи, тогда $T = \{\mathcal{F}(x'_j)\}$ - план сопряженной задачи. В силу леммы 4 целевая функция сопряженной задачи ограничена сверху на множестве ее планов, и, следовательно, сопряженная задача имеет решение, а тогда по лемме 4 и регулярная задача имеет решение.

Нетрудно видеть, что число разрешающих элементов регулярной задачи конечно, и по лемме I существует разложение пространства $\mathcal{X}$ на конечное число компонент $\mathcal{X}_k$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ в каждой из которых проекции разрешимых элементов - ее существенные элементы. Так как проекция регулярной задачи в любую (не нулевую) компоненту $\mathcal{X}$ также регулярная задача, то из теоремы I следует

ТЕОРЕМА 2. Если целевая функция регулярной задачи ограничена сверху на (непустом) множестве ее планов, то она имеет решение и ее оптимальный план X^* может быть представлен в виде $X^* = \sum_k X_k^*$, где X_k^* - оптимальный план задачи в компоненте $\mathscr{X}_k$, при этом $f(X^*) = \sum_k f(X_k^*)$.

Перейдем теперь к исследованию общей задачи (I)-(3) в предположении, что система (3) совместна. Так как число определителей, порожденных матрицей коэффициентов этой системы, конечно, то пространство $\mathscr{X}$ можно разложить на компоненты $\mathscr{X}_k$ $(k=1,\dots,s)$ так, что проекции этих определителей в каждую их них окажутся ее существенными элементами.

Пусть r_k - ранг матрицы коэффициентов системы (3) в компоненте $\mathscr{X}_k$. Если $r_k > 0$, то соответствующий базисный определитель - существенный и отличный от нуля элемент $\mathscr{X}_k$, а в таком случае справедлива известная теорема классической линейной алгебры, в силу которой число независимых уравнений системы (3) в компоненте $\mathscr{X}$ равно r_k, а остальные $m - r_k$ являются их следствиями. Вместе с тем, по самому построению разложения пространства $\mathscr{X}$ все базисные определители системы (3) в компоненте $\mathscr{X}_k$ - ее существенные элементы. Тем самым задача (I)-(3) в компоненте $\mathscr{X}_k$ оказывается регулярной и по теореме 2 имеет решение Остается рассмотреть случай, когда $r_k = 0$. Это значит, что проекции всех элементов a_{ij} и b_i в компоненту $\mathscr{X}_k$ равны нулю и что любой вектор $X = \{x_j\}$, где $x_j \geq 0$, - план задачи . Если целевая функция (I) ограничена сверху на множестве всех таких векторов, то непременно все коэффициенты целевой функции $c_j \leq 0$. Действительно, если бы положительная часть коэффициента $c_{j_0} > 0$, то вектор $X_n = \{x'_j\}$, где $x'_{j_0} = n c^+_{j_0}$ и $x'_j = 0$ для $j \neq j_0$, был планом задачи при всех $n = 1, 2, \dots$ и для него

$$f(X_n) = n c_{j_0} c^+_{j_0} = n (c^+_{j_0})^2 \to \infty,$$

при $n \to \infty$, что невозможно. Итак, все $c_j \leq 0$, и нулевой план будет, очевидно, оптимальным.

Теперь сформулируем заключительное предложение настоящего исследования.

ТЕОРЕМА 3. Если целевая функция задачи (I)-(3) ограничена сверху на (непустом) множестве ее планов, то задача имеет решение, нахождение которого предполагает разложение пространства $\mathscr{X}$ на конечное множество компонент $\mathscr{X}_k$ $(k=1,\ldots,s)$ определенного вида и решения такого же числа сопряженных (числовых задач линейного программирования. При этом оптимальный план задачи в пространстве $\mathscr{X}$

$$X^*=\sum_k X_k^*,$$

где X_k^* - оптимальный план задачи в компоненте $\mathscr{X}_k$, и наибольшее значение целевой функции (I)

$$f(X^*)=\sum_k f(X_k^*).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ПИНСКЕР А.Г. Линейная оптимизация в упорядоченных пространствах. - Докл. АН СССР, 1978, т.242, № 5, с.1012-1015.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
3. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
5. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Академиздат, 1949.
6. МУХАЧЕВА Э.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Математическое программирование. - Новосибирск: Наука, 1977.
7. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г., ЮДИН Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Советское радио, 1966.

Поступила в ред.-изд. отдел
7.05.1979 г.