Выпуск 23 (40) ОПТИМИЗАЦИЯ 1979 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.741

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КОНУСЕ ПОГОРЕЛОВА

В.П.Федотов

1. Важную роль в решении ряда геометрических вопросов (в частности, задач изопериметрического типа) играют разнообразные линейные структуры пространства выпуклых тел. Наиболее простая и известная из таких структур связана со сложением множеств по Минковскому (векторным или алгебраическим сложением). Однако некоторые задачи нелинейны в структуре Минковского, но становятся линейными или выпуклыми (и поддаются решению), если рассматривать другие операции сложения или усреднения множеств. Примером служит рассмотренная С.С.Кутателадзе [1] структура Бляшке; в этой же работе приведены типы задач, для которых замена линейной структуры дает наиболее заметные преимущества, и сформулированы общие идеи и принципы программирования экстремальных задач в различных структурах. Фаэри (по-видимому, пытаясь найти естественное обобщение сложений по Минковскому и Бляшке) построил две серии сложений, обладающих свойством однородности [2]. На основе сложений по Фаэри автором [3] введен аналог среднего геометрического для выпуклых множеств, с помощью которого удалось доказать сходимость одного алгоритма извлечения квадратного корня из положительно определенной матрицы. Поиск аналогов сложений по Минковскому и Бляшке стимулировали следующие их общие свойства, в которых на место p нужно подставлять 1 для сложений по Минковскому и $n-1$ для сложений по Бляшке:

(A) Складываются p-е функции кривизны (т.е. в гладком случае суммы главных радиусов кривизны при сложении по Минковскому и их произведения при сложении по Бляшке).

(B) Складываются объемы p-мерных проекций (т.е. длины проекций на прямые при сложении по Минковскому и площади проекций на гиперплоскости при сложении по Бляшке).

(C) Складываются площади границы $(p+1)$-мерных проекций (т.е. периметры плоских проекций при сложении по Минковскому и площади гиперповерхности при сложении по Бляшке).

Имеется также ряд других свойств (в частности, однородность той же степени p). Благодаря доказанной А.Д.Александровым [4] единственности выпуклого тела с данной p-й функцией кривизны, свойство (A) могло бы быть взято за определение p-сложения, если бы класс выпуклых тел, вложенный в линейное пространство борелевских мер на стандартной единичной сфере посредством сопоставления выпуклому телу его p-й функции кривизны, оказался выпуклым конусом в этом пространстве. Этот вопрос поставлен сначала В.Вейлем [5], а затем в несколько иной формулировке ("Всегда ли сумма p-х функций кривизны двух выпуклых тел является функцией кривизны некоторого выпуклого тела?") Фаэри в его докладе на Математическом конгрессе 1974 г. в Ванкувере [6]. Автором [7,8] дан отрицательный ответ на этот вопрос.

2. Прежде всего следует устранить различия в определениях самих сложений по Минковскому и Бляшке. Дело в том, что сложение по Бляшке определено для классов эквивалентности по отношению к параллельным переносам, тогда как сложение по Минковскому - для самих выпуклых компактов. Возможны оба способа устранения этого различия: как факторизация сложения по Минковскому (т.е. перенесение этой операции на фактор-пространство, образованное классами выпуклых компактов по отношению трансляционной эквивалентности), так и привязывание сложения по Бляшке (размещение суммы в пространстве в зависимости от размещения слагаемых).

Профакторизованное сложение по Минковскому может быть определено на основе свойства (A), т.е. через сложение средних радиусов кривизны. Интересно заметить, что при этом конус Минковского распадается в сумму фактор-пространства и R^n. Действительно, каждый выпуклый компакт имеет точку Штейнера - центр тяжести гауссовой кривизны. При сложении по Минковскому точки Штейнера складываются. Поэтому сопоставление выпуклому компакту K его точки Штейнера P и выпуклого компакта $K-P$, отличающегося от K только его параллельным переносом и имеющего точкой Штейнера начало координат, разлагает конус Минковско-

го в прямую сумму его вершинного подпространства R^n и острого конуса, образованного выпуклыми компактами, точкой Штейнера которых служит нуль.

Такое разложение подсказывает способ привязывания для сложения по Бляшке. Роль точки Штейнера в этом случае играет центр тяжести средней кривизны.

Р.Штейнер [9] ввел смешанные полярные моменты (направляющие векторы), являющиеся векторным аналогом смешанных объемов. Будучи $(n+1)$-линейным функционалом, смешанный направляющий вектор допускает, согласно теореме Рисса, интегральное представление

$$z(K_1,\dots,K_{n+1})=\int_{S^{n-1}} K_{n+1}(u)\,d\zeta(K_1,\dots,K_n;u),$$

где $K_{n+1}(u)$ - опорная функция тела K_{n+1}, а ζ - некоторая векторнозначная мера на единичной сфере S^{n-1}, зависящая только от тел $K_1,\dots,K_n$. Назовем ее смешанной направляющей мерой. В частном случае $K_1=\dots=K_p=K, K_{p+1}=\dots K_n=Ш$, где $Ш$ - стандартный единичный шар, получаем меру, которую назовем p-й направляющей мерой тела K. Если для некоторого p определена p-сумма двух выпуклых тел в смысле свойства (А), т.е. сложения p-х функций кривизны, то сложение их p-х направляющих мер позволяет единственным образом определить привязанную p-сумму. В частности, сложение первых и $(n-1)$-х направляющих мер приводит к (обычному) сложению по Минковскому и привязанному сложению по Бляшке. По этой причине, говоря ниже о p-сложениях (в частности, о сложениях по Минковскому и Бляшке), мы не делаем акцента на том, идет ли речь о привязанных или свободных суммах.

3. Вопрос Вейля - Фаэри тесно связан с обобщенной проблемой Кристоффеля - Минковского о нахождении условий, подчиненная которым мера на сфере является p-й функцией кривизны некоторого выпуклого тела. А.Д.Александров [4] нашел необходимые условия, являющиеся и достаточными при $p=n-1$, но (как показано им же самим) перестающие быть достаточными при $p\le n-2$. Для $p=1$ необходимые и достаточные условия нашли Берг [10] и Фаэри [11]. Для $2\le p\le n-2$ имеется лишь ряд достаточных условий, наиболее сильные из которых получил А.В.Погорелов [12]. Условия Александрова, Берга, Фаэри и Погорелова линейны в том смысле, что вместе с двумя мерами им удовлетворяет и их сумма. Таким образом, невыпуклый при $2\le p\le n-2$ конус $W_{n,p}$, образован-

ный p-ми функциями кривизны всех выпуклых компактов, содержит выпуклые подконусы, одним из которых является множество мер, удовлетворяющих условию Погорелова. Класс выпуклых компактов n-мерного евклидова пространства, p-е функции кривизны которых удовлетворяют этому условию (см. ниже), с линейной структурой в нем, индуцированной операцией p-сложения, назовем конусом Погорелова и обозначим через $\Pi_{n,p}$.

4. Элементами конуса $\Pi_{n,p}$ являются все дважды непрерывно дифференцируемые положительные функции φ на гиперсфере S^{n-1} пространства R^n, удовлетворяющие условиям

$$\int_{S^{n-1}} u\ \varphi(u)\, d\omega(u) = 0 \qquad \text{(I)}$$

и

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2(p-1)}} \max_{u,\gamma}\left(\varphi_t - \varphi_t''\right) \le \min_u \varphi_t, \qquad (2)$$

где $\varphi_t = \left((t\varphi + 1 - t)/C_n^p\right)^{1/p}$, а дифференцирование ведется по всем геодезическим γ в точке $u \in S^{n-1}$. Первое из этих условий представляет собой найденное еще А.Д.Александровым [4] необходимое условие; второе получено А.В.Погореловым.

Для доказательства выпуклости конуса $\Pi_{n,p}$ рассмотрим его выпуклое ядро, т.е. множество полюсов звездности. Будучи конусом, $\Pi_{n,p}$ звездно относительно своей вершины. Звездность $\Pi_{n,p}$ относительно точек, соответствующих шарам (т.е. постоянных положительных функций на сфере), получена А.В.Погореловым [I2] в ходе доказательства существования решения обобщенной проблемы Кристоффеля - Минковского для функций из $\Pi_{n,p}$. Методы относительной дифференциальной геометрии (т.е. рассмотрение функций кривизны в пространстве, индикатрисой метрики которого вместо единичной сферы служит произвольная регулярная поверхность) позволяют обобщить этот результат Погорелова, что дает звездность конуса $\Pi_{n,p}$ относительно любой регулярной поверхности. Это означает, что выпуклое ядро конуса $\Pi_{n,p}$ содержит некоторый всюду плотный в $\Pi_{n,p}$ подконус. Но так как и $\Pi_{n,p}$, и, следовательно, его выпуклое ядро замкнуты, то отсюда следует их совпадение, что и означает выпуклость конуса Погорелова $\Pi_{n,p}$.

5. Наличие в невыпуклом конусе $W_{n,p}$ его выпуклого подконуса $\Pi_{n,p}$ открывает следующий путь решения экстремальных задач в структуре, порожденной p-сложением. Сначала нужно доказать, что экстремум достигается на некотором элементе конуса $\Pi_{n,p}$,

а затем решить соответствующую экстремальную задачу в $\Pi_{n,p}$, для которой уже применим аппарат выпуклого анализа. Возможен и обратный ход рассуждений: сначала найти экстремум в $\Pi_{n,p}$, а затем проверить его глобальность. Разумеется, таким образом не может быть решена ни одна задача, решение которой не принадлежит $\Pi_{n,p}$.

Здесь можно было бы перечислить ряд утверждений, относящихся к экстремальным задачам в конусе Погорелова и аналогичных результатам работы [I] и главы 4 книги [I3]об экстремальных задачах в структуре Бляшке. Однако такое перечисление неизбежно свелось бы к почти дословному цитированию. Поэтому ограничимся только узловыми формулировками и акцентируем внимание на различиях.

Линейные пространства $C^*(S^{n-1})$ борелевских мер и $C(S^{n-1})$ непрерывных функций на единичной сфере приводятся в двойственность функционалом

$$\langle \mu, f\rangle = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} f\,d\mu,$$

совпадающим на $W_{n,p}\times W_{n,1}$ со смешанным объемом

$$\langle K, C\rangle = V(\underbrace{K,\ldots,K}_{p},\underbrace{Ш,\ldots,Ш}_{n-p-1},C),$$

где μ - p-я функция кривизны выпуклого тела $K\in W_{n,p}$, f - опорная функция выпуклого компакта $C\in W_{n,1}$, а $Ш$ - стандартный единичный шар (пишем $\langle K,C\rangle$ вместо $\langle \mu,f\rangle$, если это не приводит к путанице). Пространства рассматриваются в топологии, индуцированной этой двойственностью. Форма $\langle \mu,f\rangle$ порождает функционалы $g(K)=\langle K,K\rangle_{\frac{1}{(p+1)}}$ и $\hat{g}(K)=\langle K,K\rangle^{p/(p+1)}$. Из теоремы Брунна - Минковского следует вогнутость g на $W_{n,1}$, а из неравенства Александрова - Фенхеля - суперлинейность $\hat{g}$ на $W_{n,p}$. Неравенство Фавара - Ямануги (частный случай неравенства Александрова - Фенхеля) во введенных обозначениях принимает вид

$$\langle K,L\rangle \geq \hat{g}(K)\text{-}g(L).$$

Описание двойственных конусов и конусов, сопряженных к конусам возможных направлений, аналогично сделанному в [I]. Следующая задача служит примером экстремальной задачи в структуре p-сложения в конусе Погорелова $\Pi_{n,p}$, решение которой автоматически получается из записи уравнений Эйлера - Лагранжа:

Пусть даны тела $K_1,\ldots,K_t\in\Pi_{n,p}$ и неотрицательные числа

$C_1, \ldots, C_t$. Требуется среди тел $L \in \Pi_{n,p}$, удовлетворяющих t неравенствам $\langle L, K_i \rangle \leqslant C_i$, найти тело с максимальным значением $(p+1)$-й интегральной поперечной меры $V_{p+1}(L) = \langle L, L \rangle$. Тело L является решением этой задачи, если и только если существуют обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \geqslant 0$ такие, что $L = \alpha_1 K_1 \# \ldots \# \alpha_t K_t$, где $\#$ обозначает p-сложение. Частный случай $t=1$, $K_1 = Ш$ дает известное изопериметрическое свойство шара: при заданном значении p-й интегральной поперечной меры максимум $(p+1)$-й достигается на шаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач. - Мат. заметки, 1973, т.14, № 5, с. 745-754.
2. FIREY W.J. Some means of convex bodies. - Trans. Amer. Math. Soc., 1967, v. 93, p. 473-527.
3. ФЕДОТОВ В.П. Среднее геометрическое выпуклых множеств. - Зап. семин.ЛОМИ, 1974, т.45, с. 113-116.
4. АЛЕКСАНДРОВ А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. - Мат. сборник, 1937-38, т.2, № 5, с.947-970, № 6, с.1205-1235; т.3, № 1, с.27-44, № 2, с.227-249.
5. WEIL W. Ein Approximationsatz für konvexe Körper. - Manuscripta math., 1973, v.8, p.335-362.
6. FIREY W.J. Some open questions on convex surfaces. - In: Proc. Int. Congr. Math. Vancouver, 1974, v.1, p.76.
7. ФЕДОТОВ В.П. О сумме p- поверхностных функций. - В кн.: Украинский геометрический сборник. Харьков, вып. 21, 1978, с.125-131.
8. ФЕДОТОВ В.П. Контрпример к гипотезе Фаэри. - Мат. заметки, 1979, т.25, № 1, с.115-124.
9. SCHNEIDER R. Krümmungsschwerpunkte konvexen Körper. - Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, B. 37, S.3-57.
10. BERG C. Corps convexes et potentiels spheriques. - Mat.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk., 1969, B.37, 72 p.
11. FIREY W.J. Christoffel's problem for general convex bodies. - Mathematika, 1968, v. 15, p. 7-21.

12. ПОГОРЕЛОВ А.В. Многомерная проблема Минковского. – М.: Наука, 1975.
13. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1976.

Поступила в ред.-изд. отдел
6.06. 1979 г.