Выпуск 23 (40) ОПТИМИЗАЦИЯ 1979 г.

Численные методы

УДК 517.15

# БЫСТРОТА СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Б.А.Вертгейм

В статье изучаются некоторые итерационные процессы, у которых быстрота сходимости (или расходимости, см. дальше) своеобразно связана со строением функции, задающей процесс итераций; при этом, в частности, может проявиться любопытное явление, заключающееся в переходе процесса итераций от одного типа асимптотики к другому.

I. Пусть последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ строится итеративно по правилу

$$a_{n+1}=f(a_n),\ n=0,1,2,\dots, \qquad (I)$$

где функция $f$ непрерывна на некотором промежутке $[0,b[$, возможно, что $b\in\bar{R}$; число $a_0\in]0;b[$ задано. Предполагаем выполненными следующие условия:

I) $f(0)=0$;

2) $f(x)$ монотонно возрастает с ростом $x$;

3) в некоторой окрестности точки $0$ функция $f$ дифференцируема, причем $f'(0)=1$.

Если в дополнение к этому выполнено еще условие

4) $f(x)<x$,

то для всех $n$ имеем $a_{n+1}<a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Представляет интерес вопрос о быстроте стремления $a_n$ к нулю. Из условия 3 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n=1$, так что наша последовательность сходится к нулю медленнее любой убывающей геометрической прогрессии. Подобные вопросы встречаются в ряде областей математики и ее приложений, см., например, работы [I-3]. В статье Л.В.Канторовича [I.] к такому процессу сводится основной процесс

Ньютона в предельном случае, когда в условии теоремы сходимости критериальная величина $h_0$ имеет предельное значение 0,5. В работе [2] дискретный процесс итераций был связан с непрерывным процессом - с некоторым дифференциальным уравнением, получаемым с помощью выделения главной части функции $f(x)-x$; таким путем была получена главная часть асимптотики $a_n$ для достаточно общего случая.

2) Изучим подробнее итерации (I) с функцией

$$f(x)=x(1-\varepsilon((x/a)^{p-1}+\gamma(x/a)^{z_0})+o(x^{z_0})), \quad (2)$$

где $z_0 \geqslant p-1>0$, $a>0$, $\varepsilon, \gamma \in R$.

В случае $\varepsilon>0$ в некоторой окрестности нуля выполнено условие 4 и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. При $\varepsilon>0$ итерации расходятся, каково бы ни было малое $x_0>0$. В дальнейшем обычно считаем константу $\varepsilon$ равной $\pm$I. Удобно ввести число $q>1$ с помощью соотношений (часто встречающихся в других задачах)

$$1/p+1/q=1, \quad (p-1)(q-1)=1.$$

В этих терминах переформулируем (с небольшим изменением) один результат из [2], показывающий для случая $\gamma=0$ роль первого из членов в разложении функции $f(x)-x$.

ТЕОРЕМА I. Для последовательности $\{a_n\}$, определяемой формулами (I), (2), при $\gamma=0$, $\varepsilon=q-1>0$ и любом начальном элементе $a_0\in]0;b[$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{q-1}a_n=a.$$

Итак, $a_n\sim an^{1-q}$. В частности, если существует $f''(0)<0$, то $p=q=2$ и $\lim na_n=-2/f''(0)$, если же $f''(0)=0$, но $f'''(0)<0$, то $\lim\sqrt{n}\,a_n=\sqrt{-3/f'''(0)}$. Примеры: если $a_0>0$, $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$, то $\lim na_n=2$; если $\sin a_0>0, a_{n+1}=\sin a_n$, то $\lim\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$; если $f''(0)=\ldots=f^{(p-1)}(0)=0$, $f^{(p)}(0)<0$, $p\in N$, то $\lim(-f^{(p)}(0)\,n/p(p-2)!)^{q-1}a_n=1$.

3. Проведем одно преобразование, показывающее роль параметров $z_0$ и $\gamma$. Это преобразование можно мотивировать, рассмотрев близкое дифференциальное уравнение $\dot{x}=-\varepsilon(x/a)^{p-1}$, сравн. с [2].

Будем считать для простоты, что $o(x^z)=0$. Сделаем замену:

$$a/a_n=x_n^{q-1}, \quad x_n=(a/a_n)^{p-1}, \quad z_0(q-1)=z>1. \quad (3)$$

Тогда получаем из (I)-(2)

$$x_{n+1}=\Phi(x_n),\quad \Phi(x)=x\left(1-\varepsilon\left(x^{-1}+\gamma x^{-\tau}\right)\right)^{-p+1}. \qquad (4)$$

Считая, что $|\varepsilon(x^{-1}+\gamma x^{-\tau})|<1$ , т.е. $a_n$ - достаточно близкими к нулю, получим по формуле бинома

$$\Phi(x)=x+(p-1)(\varepsilon+\gamma\varepsilon x^{1-\tau})+\frac{p(p-1)}{2}\varepsilon^2(x^{-1}+ \qquad (5)$$
$$+2\gamma x^{-\tau}+\gamma^2 x^{1-2\tau})+\sum_{k=3}^{\infty}\binom{p+k-2}{k}\varepsilon^k\sum_{l=0}^{K}\binom{K}{l}\gamma^l x^{-l(\tau-1)-k+1}.$$

Теперь видно, что приближенно $\{x_n\}$ можно рассматривать как арифметическую прогрессию с разностью $\Delta=(p-1)\varepsilon$ . Если $\tau>2$, то отклонение от этой прогрессии определяется, в основном, членом $p(p-1)\varepsilon^2 x^{-1}/2$ ; при $\tau=2$ коэффициент при $x^{-1}$ пропорционален $2\gamma+p\varepsilon$ и если он не равен нулю, то сохраняет свою роль, если же $\gamma=-p\varepsilon/2$ , то эта роль переходит к члену с $x^{1-2}$. Наконец, если $1<\tau<2,\ \gamma\neq 0$ , то в первую очередь асимптотика при $x\to\infty$ определяется членом с $x^{1-\tau}$. Далее мы уточняем количественными оценками это качественное исследование.

4. В случае $\gamma=0$ и $p$ - целое число, для получения простых оценок удобно еще одно представление функции $\Phi$ :

$$\Phi(x)=(x-\varepsilon)(1+\varepsilon/(x-\varepsilon))^p=$$
$$=x+\varepsilon(p-1)+\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\varepsilon^k/(x-\varepsilon)^{k-1}, \qquad (5\text{ a})$$

(всюду $C_p^k=\binom{p}{k}$ - коэффициенты бинома).

Особенно прост случай $p=2,\ \varepsilon^2=1$ . Графики этих функций имеют асимптотику $y=x+\varepsilon(p-1)$. Рассмотрим случай $\varepsilon=-1,\ a_0$ мало, $x_0$ велико, последовательность $\{a_n\}$ расходится, $\{x_n\}$ сходится , $\lim x_n=0$. Очевидно, что при $x_n\gg 1$ получаем $x_{n+1}\simeq x_n-1$ ; когда $x_n$ приблизится к I, асимптотика меняется; так, при $p=2$ видим, что при $x_n<1$ $x_{n+1}\leq x_n^2/2$ , и сходимость становится квадратичной, причем переход от одного типа асимптотики к другому совершается всего за несколько итераций (вблизи $x=1$ ).

5. Переходим к более детальным количественным рассмотрениям. Всюду дальше считаем, что $|\varepsilon|=1$ и выполнено следующее условие, гарантирующее, в частности, справедливость формулы (5):

$$x>\max\{1;\ |\gamma|^{1/(\tau-1)}\equiv x_0;\ \bar{x}(\gamma)\}; \qquad (6)$$
$$\bar{x}\equiv\bar{x}(\gamma)=\max\{x>0\mid \varphi(x)\equiv x^{-1}+\gamma x^{-\tau}=\pm 1\}.$$

Исследуя функцию $\varphi$ , найдем такие оценки для $\bar{x}$ : при $\nu>0$ имеем $1<\bar{x}<max\{2; x_0\}$.

Изучая асимптотику при больших $x$ , введем условия двух типов - назовем их А и В .

Условие А. Оно выполнено в любом из следующих случаев:

А0. $\nu=0$ .

АI. $r=2$ и либо $1+4\varepsilon\nu>0$, либо $1+4\varepsilon\nu=0, x>p/2\varepsilon$, либо $p+2\varepsilon\nu>0$; в последнем случае при $\nu<0$ $x>x_1=|\nu|$, либо $p+2\varepsilon\nu=0, \nu>0$.

А2. $\varepsilon\nu>0$ и либо $\varepsilon(2p+1-r)\geq 0$, либо

$$x\geq min\{|2p+1-r|/(r-1), |\nu(2p+1-r)r/p|^{1/(r-1)}\}.$$

А3. $r>2, \varepsilon\nu<0$ и если $(2p+1-r))\nu\geq 0$, то $x^{r-2}>|\nu|r(r-1)/p$, иначе $x^{r-2}>|\nu|r(r-1+\varepsilon(2p+1-r))$.

Условие В выполнено в любом из следующих случаев:

ВI. $r=2$ и либо $p+2\varepsilon\nu<0, x>x_1$ (сравн. с АI), либо $p+2\varepsilon\nu=0, \nu<0, x>-\nu$.

В2. $1<r<2, \varepsilon\nu<2$,

$$x^{2-r}>X+(|2p+1-r|M+\alpha|\nu|M^2)/(r-1),$$

где $X=\dfrac{p}{\varepsilon\nu r(1-r)}$ , $M=X^{-(r-1)/(2-r)}$, $\alpha=1+(p-1)r$.

Определим теперь функцию $H(x)=\Phi(x)-[x+(p-1)\varepsilon]$ , показывающую отклонение графика $\Phi$ от асимптоты. Условимся говорить, что процесс (4) на отрезке $[0;m]$ удовлетворяет условию А (или В) , если для параметров функции $\Phi$ верны требуемые соотношения и элементы $x_n$ $\forall n\in[0;m]$ подчинены ограничениям соответствующего случая.

ТЕОРЕМА 2. Пусть процесс итераций (4) удовлетворяет условию А на $[0,m+1], m>0$. Тогда для всех $n\in[1;m]$ выполнены неравенства (с $\Delta=(p-1)\varepsilon$)

$$x_0+n\Delta<x_n<x_0+n\Delta+\sum_{k=0}^{n-1}H(x_0+k\Delta)<$$
$$<x_0+n\Delta+\int_{-1/2}^{n-1/2}H(x_0+t\Delta)\,dt.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть процесс итераций (4) удовлетворяет условию В на $[0;m+1]$. Тогда для всех $n\in[0,m]$ выполнены неравенства

$$x_0+n\Delta(\varepsilon)<x_n<x_0+n\Delta+\sum_{k=0}^{n-1}H(x_0+k\Delta)<$$
$$<x_0+n\Delta+1/2\left(H(x_0)+H(x_0+(n-1)\Delta)\right)+\int_0^{n-1}H(x_0+t\Delta)dt,$$
$$\Delta=(p-1)\varepsilon,\ \Delta(\varepsilon)=\Delta+H(x_s),\ s=(n-1)(1-\varepsilon)/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Излагаем сначала часть, общую для обеих теорем. Вывод оценок основан на исследовании функции $\Phi$, содержащей 4 параметра. Из (4) получаем, что

$$\begin{aligned}&\Phi(x)=x^{\alpha}/(x^{\tau}-\varepsilon x^{\tau-1}-\varepsilon\nu),\ \alpha=1+(p-1)\tau;\\&\Phi'(x)=(1-\varepsilon(x^{-1}+\nu x^{-\tau}))^{-p}(1-\varepsilon(px^{-1}+\alpha\nu x^{-\tau}));\\&\Phi''(x)=(p-1)(1-\varepsilon(x^{-1}+\nu x^{-\tau}))^{-p-1}[px^{-3}+\\&+\varepsilon\nu\tau(\tau-1)x^{-\tau-1}+(2p+1-\tau)\nu\tau x^{-\tau-2}+\alpha\nu^2\tau x^{-2\tau-1}.\end{aligned}\tag{7}$$

Условие А перечисляет достаточные признаки того, что $\Phi''(x)=H''(x)>0$ для больших значений $x$ (иногда для $x>1$). Учитывая выпуклость функции $H$ и равенство $\lim\limits_{x\to\infty}H(x)=0$, видим, что эта функция положительна и убывает в соответствующей области (см. условие А), производная ее возрастает, будучи отрицательной. Так как по построению

$$x_{k+1}=\Phi(x_k)=x_k+(p-1)\varepsilon+H(x_k),\ k\geq 0,\tag{8}$$

то из условия А следует по индукции, что

$$x_n=x_0+n\Delta+\sum_{k=0}^{n-1}H(x_k)>x_0+n\Delta.\tag{9}$$

Поэтому $H(x_n)<H(x_0+n\Delta)$. Теперь сразу выводим все оценки теоремы 2, причем сумму значений выпуклой функции оцениваем с помощью интеграла, применяя формулу прямоугольников.

В теореме 3 условие В дает вогнутость функции $H$, $H''>0$, и поэтому она возрастает, будучи меньше нуля. Учитывая это, по индукции выводим все оценки: из (8) следует, что $x_n<x_0+n\Delta$, $H(x_k)<H(x_0+k\Delta)$, сумма оценивается сверху интегралом на основе формулы трапеции:

$$\sum_{k=0}^{n}H(K)-(H(0)+H(n))/2<\int_0^n H(t)dt.$$

Остается провести исследование знака второй производной $\Phi''(x)$, определяемого знаком выражения в квадратных скобках в формуле (7). Если $\tau=2$, то старшим оказывается член с $x^{-3}$, и с точностью до множителя дело сводится к исследованию квадратного трехчлена

$$(p+2\varepsilon\nu)x^2+2\nu(2p-1)(x+\nu),$$
которое отражено в условиях AI и BI.

При $\nu=0$ в этой скобке останется $px^{-3}$, так что $A0 \Rightarrow \Rightarrow \Phi''(x)>0$. В случае A2 и $\varepsilon(2p+1-\tau)\geq 0$ все слагаемые в скобке больше 0, при изменении знака в последнем неравенстве третье слагаемое в скобке становится меньше 0, и, соединив его со вторым, приходим к условию $\tau-1+(2p+1-\tau)\varepsilon/x>0, |2p+1-\tau|/x<\tau-1$. Это условие становится слишком жестким при $\tau \to 1$. Другое неравенство из A2 получаем аналогично, соединив первое слагаемое с третьим:
$$px^{-3}+(2p+1-\tau)\nu\tau/x^{-\tau-1}>0 \qquad \text{и т.д.}$$

Если $\tau>2$ и третье слагаемое меньше 0, то соединяем два первых слагаемых, иначе решаем неравенство
$$px^{-3}-\tau|\nu|x^{-\tau-1}(\tau-1+(2p+1-\tau)\varepsilon/x)>0,$$
при этом усиливаем требование, заменяя в круглой скобке $x$ на I.

Условие B2 приводит к неравенству $\Phi''(x)<0$, если исследовать неравенство
$$\zeta \geq X+(|2p+1-\tau|\mu+a|\nu|\mu^2)/(\tau-1)\equiv F(\zeta), \mu=\zeta^{\frac{1-\tau}{2-\tau}},$$
которое получается из требования неположительности квадратной скобки в (7) после переноса члена с $x^{-\tau-1}$ в левую часть неравенства, замены $x^{2-\tau}=\zeta$, деления обеих частей на положительный множитель и очевидного перехода к модулю в одном из членов, сделанного в целях упрощения оценки. Далее, учитывая монотонность (рост левой и убывание правой части), сводим дело к уравнению, заменяя $\geq$ на $=$ и применяя метод итераций, взяв $\zeta_0=X$ и определив $\zeta=F(\zeta_0)$, что и дает оценки снизу и сверху для единственного положительного корня нашего уравнения; в условие B2 как раз и включено неравенство $x^{2-\tau}>\zeta_1$.

6. Отметим возможность дальнейшего итеративного уточнения оценок, полученных в теоремах 2,3. При этом на каждом шаге используются оценки, полученные на предыдущем шаге. Так, в теореме 2 после получения априорной оценки вида $x_n<V(n)$ на основе соотношения (8) приходим к оценке
$$x_n>x_0+n\Delta+\sum_{k=0}^{n-1}H(V(x_k)).$$
Польза такой оценки зависит от возможности дать простую и не

слишком грубую оценку снизу для полученной суммы, например, с помощью интегрирования, использования выпуклости (вогнутости) функций; при этом весьма желательны именно априорные неравенства, так чтобы оценка для $x_n$ не зависела от значений предыдущих элементов процесса.

Пример. Пусть $p = r = 2$, $\nu = 0$, $\Delta = \varepsilon$, $\Phi(x) = x + \varepsilon + 1/(x-\varepsilon)$, $H(x) = 1/(x-\varepsilon)$.

Теорема 2 дает следующие оценки:

$$x_0 + n\varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon(n + \ln(1+\varepsilon\gamma n)), \gamma = (x_0 - 3/2)^{-1}. \quad (10)$$

Теперь, полагая для определенности $\varepsilon = 1$, уточним оценку снизу. Заметим, что $x_0 > 1$ (так как $\Phi(x_0) > 0$); очевидно, что $x_1 \geq \Phi(2) = 4 = \Phi_{min}$. Ввиду этого оценки для $x_n$ получатся несколько более точными, если вместо $x_0$ выбрать в качестве нового начального элемента, например, $x_1$ или $x_2$. Это стоит делать лишь при $x_0 \simeq 1$. Итак, отправляясь от $x_1$ и используя указанный выше подход, получаем соотношение

$$x_{n+1} > x_1 + n\sum_{k=0}^{n-1}(x_1 - 1 + k + \ln(1+\gamma_1 k))^{-1} >$$

$$> x_1 + n + \int_0^{n-1}(x_1 - 1 + t + \ln(1+\gamma_1 t))^{-1}dt + D_n =$$

$$= x_1 + n + \ln(1 + (n-1+\ln(1+\gamma_1(n-1)))/(x_1-1)) - \gamma_1 J_n + D_n,$$

$$\gamma_1 = (x_1 - 3/2)^{-1}, \; D_n = ((x_1-1)^{-1} - (x_1 - 1 + E_{n-1})^{-1})/2,$$

$$J_n = \int_0^{n-1}[(1+\gamma_1 t)(x_1 - 1 + t + \ln(1+\gamma_1 t))]^{-1}dt <$$

$$< (\gamma_1(x_1-1) - \beta_n)^{-1}\ln[(1+\gamma_1(n-1))/(1+E_{n-1}/(x_1-1))],$$

$$E_n = n + \ln(1+\gamma n), \; \beta_n = E_{n-1}/(n-1) \qquad (\forall n).$$

В ходе преобразований была использована для оценки суммы выпуклость подынтегральной функции. Составив разность между верхней границей типа (10) и полученной оценкой снизу для $x_{n+1}$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ с учетом вытекающей из сделанных выше замечаний монотонности этой разности как функции от $n$, находим, что эта разность, характеризующая точность полученных оценок, меньше, чем

$$R_\infty = 3\ln(1+\gamma_1/2) - \gamma_1/(2+\gamma_1); \qquad (R_\infty \to 0 \text{ при } x \to \infty),$$

так что достигнутая точность тем больше, чем больше $x_1$. Заметим для сравнения, что подобная разность оценок в (10) неограниченно растет с ростом $n$.

Для получения аналогичных оценок при других показателях $\rho$ и $\nu=0$ можно, применяя теорему 2, использовать при интегрировании разложения (5), (5а). Так, при $\rho$ натуральном получаем неравенства

$$0<x_n-(x_0+n\Delta)<\Delta^{-1}\Big[C_\rho^2\ln(1+\bar{\gamma}n)+\sum_{k=3}^{\rho}C_\rho^k\varepsilon^k(k-2)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big(1-(1+\bar{\gamma}n)^{2-k}\big)\xi_0^{2-k}\Big],\quad \xi_0=x_0-\varepsilon\frac{\rho+1}{2},\quad \bar{\gamma}=\Delta/\xi_0. \tag{II}$$

7. Пусть теперь в ходе итераций строится последовательность векторов $x_n\in R_+^m$, $n\in N$, $m\geq 1$, $x_n=(x_{ni})$, $i=\overline{1,m}$;

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon\varphi(x_n),\ n=0,1,2\ldots,\ \varepsilon\varphi(x)\leq x, \tag{I2}$$

где $\varphi: R_+^m\to R_+^m$ – однородная функция степени $\rho>1$.

К подобному процессу могут привести некоторые вопросы, связанные с изучением сбалансированного роста в нелинейных системах. Так, уже исходные основные предположения о таких моделях в известной книге Никайдо (см. [4],гл.3, с.200) включают функцию типа $\varphi$ (но с показателем $\leq 1$). При этом рассмотрение состояний сбалансированного роста приводит к задаче, сходной с проблемой собственных векторов для линейных операторов; в случае показателя однородности, меньшего единицы, таким путем приходим к стационарному состоянию (см. [4] , с.20I). С другой стороны, если изменить модель и предположить с самого начала существование стационарного состояния, постулируя некоторый итерационный процесс для отклонений от этого состояния, то, в частности, можно прийти к процессам типа (I2). Это один из способов наметить возможное применение исследуемой задачи.

Итак, рассмотрим следующую задачу о собственном векторе. Будем говорить, что вектор $x^*\in R_+^m$, $x^*\neq 0$, является собственным вектором, а число $\lambda^*$ – собственным значением для нелинейного отображения $\varphi$ , если

$$\varphi(x^*)=\lambda^* x^*.$$

Заметим, что эта задача тесно связана с задачей о неподвижной точке: из предыдущего следует, что при $\lambda^*\neq 0$ вектор $(\lambda^*)^{1-\rho}x^*$ является неподвижным для $\varphi$ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $x^*$ – неподвижный вектор отображения $\varphi$ , отличный от нуля, $|\varepsilon|=1$ . Пусть начальный вектор $x_0$ удовлетворяет условию $x_0=a_0x^*$, $a_0\in R_+$. Тогда для итераций (I2) справедливы следующие соотноше-

шения (рассматриваем основной случай, когда $x_n \neq 0\ \forall n$ и для вводимой далее последовательности $(\xi_n)$, $n \geq 0$, выполнено условие (6); $\Delta = \varepsilon(p-1)$, $\bar{\gamma}_1 = \Delta/(\xi_0 - \Delta/2))$; $x_n = a_n x^*$, $a_{n+1} = a_n(1-\varepsilon a_n^{p-1})$, $a_n = \xi_n^{1-q}$,

$$a_0^{1-p} + n\Delta < \xi_n = a_n^{1-p} < a_0^{1-p} + n\Delta + \Delta^{-1}\left(\frac{p}{2}\right)\ln(1+\bar{\gamma}_1 n) + O(1).$$

Доказательство этой теоремы получается подстановкой $x_n = a_n x^*$ и применением преобразования (3), теоремы 2 и оценки типа (II).

Заметим, что для непрерывного процесса, описываемого дифференциальным уравнением, сходным с (I2): $\dot{x} = -\varepsilon\varphi(x)$ — существуют подобные же частные решения вида

$$x = x(t) = x^*(t\Delta + C)^{1-q},\ \Delta = \varepsilon(p-1),\ C = Const.$$

Приведем пример применения полученных результатов для теоретического анализа динамики отклонений от положения равновесия в одной конкретной модели. Рассмотрим так называемую паутинообразную модель [5], с. 22, в которой положение равновесия (цена $P^*$ и объем товаров $X^*$) определяется уравнением $X^* = D(P^*) = S(P^*)$ ($D, S: R_+ \to R_+$ — заданные функции спроса и предложения), а быстрота установления равновесия или ухода от него описывается разностным уравнением $D(P_n) = S(P_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ В книге [5] рассмотрена линейная аппроксимация функций $D$ и $S$; для случая квадратичной функции $S$ (для простоты сохраняем линейность $D$) имеем $D = \alpha + a_0 P$, $S = \beta + b_0 P + \gamma P^2$, $\alpha > \beta \geq 0$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, $a_0 b_0 < 2\alpha\gamma$, $0 < P < -\alpha/a_0$, при $\gamma = 0$ возвращаемся к модели [5]. Для равновесной цены $P^*$ получаем соотношение $b + 2\gamma P^* > 0$, т.е. $S'(P^*) > 0$.

Пусть $h_n = P_n - P^*$ — малые отклонения от положения равновесия; для них имеем $h_n = \mu h_{n-1} + q h_{n-1}^2$, где $\mu = (b_0 + 2\gamma P^*)/a_0 < 0$, $q = \gamma/a_0$. Пусть $\mu = -1$, тогда $h_n h_{n-1} < 0$, т.е. знаки $h_n$ чередуются (если $q h_{n-1} < 1\ \ \forall n$). Считая, что $h_0 > 0$ (это не сужает общности выводов) и выражая $h_{n+1}$ через $h_{n-1}$, получаем для $z_n = h_{2n}$ итерационный процесс с функцией вида (2), причем $\varepsilon = 1$, $p = 3$, $z_0 = 3$, $a = (q\sqrt{2})^{-1}$, $\nu = 2^{-3/2}$.

Здесь выполнено условие А2 и применима теорема 2, дающая асимптотику; интересно, что независимо от знака $\gamma$ отклонения от равновесия убывают и приближаются к нулю. При $\mu \neq -1$ имеем экспоненциальную асимптотику. Итак, полученные результаты применимы к ряду процессов, когда динамика идет медленнее геомет-

рической прогрессии; добавим, что интерес к медленно сходящимся процессам (в частности, в итерационных способах решения уравнений) растет с увеличением скорости ЭВМ, а также в связи со стремлением к полноте исследований в теоретических моделях.

## ЛИТЕРАТУРА


1. КАНТОРОВИЧ Л.В. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений. - Вестн. ЛГУ, 1957, № 7. Сер. математика, механика, астрономия, вып. 2, с.68-103.
2. ВЕРТГЕЙМ Б.А. О некоторых методах приближенного решения нелинейных функциональных уравнений: Автореферат дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. - Пермь, 1957, с.7.
3. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1968, с.93.
4. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972, с.200.
5. АЛЛЕН А. Математическая экономия. - М.: ИЛ, 1963. Гл.1.



Поступила в ред.-изд. отдел
14.12.1978 г.