Численные методы

УДК 512.25/26

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТОЧНОСТИ В ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.И.Лобырев

При решении некоторых задач математического программирования проекционным методом возникает необходимость выполнения каждой итерации с определенной точностью в силу того, что проектирование, как правило, не может быть выполнено за конечное число действий. Кроме того, выполнение проектирования с большой точностью нецелесообразно на итерациях, далеких от завершения счета, так как трудоемкость каждой итерации увеличивается с возрастанием точности. Поэтому необходимо разработку методов регулирования точности подчинить задаче более быстрой (в смысле времени счета) сходимости проекционного метода.

В [I] на примере одного из вариантов метода последовательного проектирования рассматривается некоторая схема автоматического регулирования точности выполнения каждого шага. В настоящей статье предлагается еще несколько вариантов проекционного метода решения задачи математического программирования, в которых для каждой итерации выбирается своя точность выполнения. Как и в упомянутой статье, уклонение от допустимого множества и значение функции цели от шага к шагу меняются, вообще говоря, не монотонно. Однако (в отличие от [I]) ограниченным предполагается не все допустимое множество, а множество оптимальных решений. Кроме того, в некоторых вариантах метода точность выполнения очередного шага определяется перед началом этого шага.

Рассматриваемые в дальнейшем проекционные методы решают следующую задачу математического программирования (МП). Пусть в евклидовом пространстве E_n заданы выпуклые замкнутые множества $A_i, i \in I$, где I - некоторое конечное множество индексов, причем множество $R=\bigcap_{i\in I} A_i$ не пусто. Требуется минимизировать значение линейной формы c на выпуклом замкнутом множестве R. Если L_0 - минимальное значение линейной формы c на множестве R, то при $L<L_0$ множество $T(L)=\{x\in E_n: (c,x)\le L\}$ имеет пустое пересечение с множеством R. Будем предполагать, что множество $R_0=T(L_0)\cap R$ ограничено и для простоты изложения $|c|=1$. Далее, для любого $x\in E_n$ и любого замкнутого выпуклого множества $Q\subset E_n$ определим $\rho(x,Q)= =\min_{y\in Q}|y-x|$, а точку $\bar y\in Q$, для которой $\rho(x,Q)=\rho(x,\bar y)$, будем обозначать через $P_Q(x)$ и называть проекцией точки x на множество Q. Ниже будем исходить из того, что мы умеем с любой степенью точности находить проекцию всякой точки z на множество R. При этом будем применять один из методов, дающих такое приближение y к $P_R(z)$, что полупространство $\{x\in E_n:(y-z,x-y)\ge 0\}$ содержит множество R [2-4], а погрешность проектирования на множество R будем уменьшать по мере приближения к множеству R_0.

Сначала рассмотрим случай, когда множество R задано системой линейных неравенств

$$(a_i,x)\ge b_i,\ i\in I, \tag{I}$$

а множества A_i - соответствующие этим неравенствам полупространства. Для сокращения обозначений в системе (I) не допускаем наличия линейных уравнений, что, конечно, не уменьшает общности рассмотрения. Для системы (I) будем оценивать погрешность, с которой найдена проекция, с помощью функции

$$\varphi(y)=\max_{i\in I}\rho(y,A_i)=\max_{i\in I}\left\{\frac{(b_i-(a_i,y))^+}{|a_i|}\right\}.$$

ЛЕММА I. Для всякого конечного конуса $K\subset E_n$ с образующими ω_s, $s=1,2,\dots,r$, существует число $\gamma>0$ такое, что $\max_{s=1,2,\dots,r}(h,\omega_s)\ge\gamma|h|$ при любом $h\in K$.

Доказательство приведено, например, в [2].

Обозначим через $K(x)$ коническую оболочку семейства векторов $\{a_k : (a_k, P_R(x)) = b_k\}$ и определим число $\gamma(x)$ согласно лемме I, положив в ней $K = K(x)$ и $\omega_s = a_s / |a_s|$. В силу конечности множества I различных значений $\gamma(x)$ – конечное число, и поэтому существует $\min_{x \in E_n} \gamma(x) = \gamma > 0$. Положим $h = P_R(x) - x$. Так как $h \in K(x)$, то, по определению γ и $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) \geq \gamma |h| = \gamma \rho(x, R).$$

Таким образом, если мы знаем число γ, то можем оценить сверху расстояние от любой точки x до множества R с помощью функции $\varphi(x)$, а именно:

$$\rho(x, R) \leq \varphi(x) / \gamma. \tag{2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. В предположении ограниченности множества $R_0 = T(L_0) \cap R$ при всяких $L \geq L_0$ и $\varepsilon \geq 0$ множество $\Omega = T(L) \cap \{x : \varphi(x) \leq \varepsilon\}$ ограничено. Действительно, множество Ω выпукло и замкнуто. Поэтому в случае его неограниченности существовало бы направление s такое, что луч $\Lambda = \{y_0 + \lambda s : \lambda \geq 0\}$ содержался бы в Ω при любом $y_0 \in \Omega$ и, в частности, при $y_0 \in R_0$. Так как $\Lambda \subset T(L)$, то $(c, s) \leq 0$, и, следовательно, $\Lambda \subset T(L_0)$. Поскольку $\rho(y_0 + \lambda s, R) \leq \varepsilon / \gamma$ при любом $\lambda > 0$ и $y_0 \in R_0 \subset R$, то $\Lambda \subset R$ в силу выпуклости и замкнутости множества R, и, следовательно, $\Lambda \subset R \cap T(L_0) = R_0$. Это противоречило бы ограниченности множества R_0.

Для задачи МП, в которой множество R задано системой (I), предварительно опишем и обоснуем вариант проекционного метода, каждый шаг которого требует конечного числа действий и выполняется с заранее выбранной точностью. Для этого выберем произвольную точку $y_0 \in T(L)$ $(L < L_0, \varphi(y_0) \leq \varepsilon_0)$ и положительную последовательность $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \to 0, n = 0, 1, \ldots$ Пусть уже построены точки $y_1, \ldots, y_n$. В качестве y_{n+1} возьмем приближенную проекцию точки $z_{n+1} = P_{T(L)}(y_n)$ на множество R такую, что $\varphi(y_{n+1}) \leq \varepsilon_{n+1}$. Доказываемые ниже лемма и теорема служат обоснованием описанного метода. Положим $\varepsilon = \max\{\varepsilon_n\}$, $Y(\varepsilon, \ell) = \{y : T(L + \ell) \cap \{\varphi(y) \leq \varepsilon\}\}$, $Z(\varepsilon, \ell) = P_{T(L)}(Y(\varepsilon, \ell))$, $\ell_0 = \sup_{z \in Z(\varepsilon, L_0 - L)} \rho(z, R_0)$.

ЛЕММА 2. Если оптимальное множество R_0 ограничено, то последовательность $\{y_n\}$ ограничена и принадлежит ограниченному множеств у $Y(\varepsilon, l_\circ)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y_n \in T(L_\circ)$, то y_n принадлежит ограниченному множеству $Y(\varepsilon, L_\circ - L)$. Если же $y_n \notin T(L_\circ)$, то $|z_n - \bar{y}| > |z_{n+1} - \bar{y}|$, где $\bar{y}$ – произвольная точка множества $R_\circ$. Действительно, в этом случае

$$|z_n-\bar y|^2-|z_{n+1}-\bar y|^2=(z_n-\bar y, z_n-\bar y)-((z_n-\bar y)-$$
$$-(z_n-y_n)+(z_{n+1}-y_n),(z_n-\bar y)-(z_n-y_n)+(z_{n+1}-y_n))=$$
$$=2(z_n-\bar y, z_n-y_n)-2(z_n-\bar y, z_{n+1}-y_n)-|z_{n+1}-z_n|^2.$$

Так как

$$(z_n-\bar y, z_n-y_n)\geq|z_n-y_n|^2, \; |z_n-y_n|^2=|z_{n+1}-y_n|^2+$$
$$+|z_{n+1}-z_n|^2, \; (z_n-\bar y, z_{n+1}-y_n)=(L_\circ-L)\cdot|z_{n+1}-y_n|<|z_{n+1}-y_n|^2,$$

то получаем

$$|z_n-\bar y|^2-|z_{n+1}-\bar y|^2>2|z_n-y_n|^2-$$
$$-2|z_{n+1}-y_n|^2-|z_{n+1}-z_n|^2=|z_{n+1}-z_n|^2\geq 0.$$

Далее, множество $Z(\varepsilon, L_\circ - L)$ ограничено, и, следовательно, ограничена величина $l_\circ = \sup_{z\in Z(\varepsilon, L_\circ - L)} \rho(z, R_\circ)$ и соответственно ограничено множество $Z_{l_\circ} = \{z \in T(L): \rho(z, R_\circ) \leq l_\circ\}$, которому принадлежит вся последовательность $\{z_n\}$. Начальную точку $z_\circ$, как мы уже говорили, будем выбирать так, что $z_\circ = y_\circ \in T(L)$, $\varphi(y_\circ) \leq \varepsilon$. Так как при любом $z \in Z_{l_\circ}$ его приближенная проекция y на множество R отстоит от z не далее, чем на $\sup_{z\in Z_{l_\circ}} \rho(z,R) \leq$ $\leq l_\circ$, то последовательность $\{y_n\}$ принадлежит множеству $Y(\varepsilon, l_\circ)$, которое в силу замечания I ограничено. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ.2. Так как для $l > L_\circ - L$ $\max_{z\in Z(0,l)} \rho(z,R) < l$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\max_{z\in Z(\varepsilon,l)} \rho(z,R) \leq l$. При этом, если $y_n \in Y(\varepsilon, l)$ и $\max_{k=n,n+1,\dots}\{\varepsilon_k\} \leq \varepsilon$, то $y_k \in Y(\varepsilon, l)$ при $k \geq n$.

ТЕОРЕМА. Если $R_\circ$ ограничено и $\varepsilon_n \to 0$, то $\rho(y_n, R_\circ) \to 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha_n = |y_n - z_{n+1}| + \varphi(y_n)/\gamma$; $\Delta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ и $s_n = (y_n - z_n)/|y_n - z_n|$, если $y_n \neq z_n$, и $s_n = c$ в противном случае. Так как в силу леммы 2 все $y_n \in Y(\varepsilon, l_\circ)$, кроме того, $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + \varepsilon_{n+1}/\gamma$ и $\varepsilon_n \to 0$, то $\Delta_n \to 0$. Действительно, допустим, что $\Delta_n \not\to 0$. Тогда найдется бесконечно много номеров

n, на которых $\Delta_n \geq \theta > 0$. Построим последовательности $\{n_k\}$ и $\{l_k\}$, $n = 0, 1, \ldots$, следующим образом. Положим $\delta_k = \max_{n \geq n_k} \varepsilon_n$. Согласно замечанию 2, выберем n_0 так, чтобы $\max_{z \in Z(\delta^0, l_0)} \rho(z; R) \leq l_0$. Можно считать, что $\delta^0/\gamma < \theta/2$, а $\Delta_{n_0} \geq \theta > 0$. Пусть уже найдены n_k и l_k такие, что $\max_{z \in Z(\delta^k, l_k)} \rho(z, R) \leq l_k$, а $\Delta_{n_k} \geq \theta > 0$. Тогда для всех номеров $n \geq n_k$ будет $|y_n - z_{n+1}| \leq l_k$, а $\varphi(y_n) \leq \delta^0$, поэтому при $\Delta_n \geq \theta$

$$0 < L_0 - L \leq \alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \theta \leq l_k + \delta^0/\gamma - \theta < l_k - \theta/2 = l_{k+1}.$$

Согласно замечанию 2, можно найти такой номер n_{k+1}, что $\max_{z \in Z(\delta^{k+1}, l_{k+1})} \rho(z, R) \leq l_{k+1}$, а $\Delta_{n_{k+1}} \geq \theta$. Таким образом, для последовательностей $\{n_k\}$ и $\{l_k\}$ всегда должно выполняться соотношение

$$0 < L_0 - L \leq \alpha_{n_{k+1}} \leq \alpha_{n_k} - \theta \leq l_k + \delta^0/\gamma - \theta < l_k - \theta/2 = l_{k+1}. \quad (3)$$

Однако правая часть (3) через конечное число шагов будет отрицательной. Полученное противоречие доказывает, что $\Delta_n \to 0$. С другой стороны, поскольку

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq \rho(z_{n+1}, R) \leq |y_n - z_{n+1}| + \varphi(y_n)/\gamma$$

и

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| = |y_{n+1} - z_{n+2}| + (1 - (s_{n+1}, c))|y_{n+1} - z_{n+1}|,$$

то

$$\Delta_n = \{|y_n - z_{n+1}| + \varphi(y_n)/\gamma - |y_{n+1} - z_{n+1}|\} + (1 - (s_{n+1}, c))|y_{n+1} - z_{n+1}| - \varphi(y_{n+1})/\gamma \geq (1 - (s_{n+1}, c))|y_{n+1} - z_{n+1}| - \varphi(y_{n+1})/\gamma.$$

Так как

$$0 < L_0 - L \leq |y_{n+1} - z_{n+1}| + \varphi(y_{n+1})/\gamma,$$

то

$$\Delta_n \geq (1 - (s_{n+1}, c))(L_0 - L) - (2 - (s_{n+1}, c))\varphi(y_{n+1})/\gamma. \quad (4)$$

Поскольку $\Delta_n \to 0$ и $\varphi(y_{n+1}) \to 0$, то из (4) следует, что $(s_{n+1}, c) \to 1$. При этом очевидно $s_n \to c$. Пусть $\rho(y_n, R_0) \not\to 0$. Существует такая подпоследовательность, что $\rho(y_{n_\nu}, R_0) \geq \delta > 0$. Ввиду ограниченности $\{y_n\}$ (по лемме 2) и соотношения $\lim \rho(y_n, R) = 0$, не умаляя общности, можно считать, что $\lim y_{n_\nu} = \bar{y} \in R$. Так как $(s_n, x - y_n) \geq 0$ при любом $x \in R$, то в пределе получим, что $(c, x - \bar{y}) \geq 0$ при любом $x \in R$. Следовательно, вектор $\bar{y}$ минимизирует форму (c, x) на множестве R, т.е. $\bar{y} \in R_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В описанном выше методе последовательность $\{\varepsilon_n\}$ выбиралась без связи с ходом вычислительного процесса. Теперь опишем другую вычислительную процедуру, в которой точность получения приближенной проекции на множество R в определенной степени регулируется автоматически в зависимости от уже достигнутой точности как по ограничениям, так и по признаку оптимальности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть нам известно число γ такое, что

$$\{|y_n-z_{n+1}|+\varphi(y_n)/\gamma\}-|y_{n+1}-z_{n+1}|\geq 0,$$

где уменьшаемое есть оценка сверху расстояния от точки $z\in T(L)$ (более точно, $(z_{n+1},c)=L$) до множества R по ломаной, вычитаемое – расстояние от той же точки до полупространства $(y_{n+1}-z_{n+1},\ x-y_{n+1})\geq 0$, которое содержит R. Тогда положительная последовательность $\alpha_n=p\gamma|y_n-z_{n+1}|+(p+q)\varphi(y_n)$ $(0<p<p+q<1)$ будет строго убывать, если приближенную проекцию y_{n+1} выбирать так, чтобы $\varphi(y_{n+1})\leq\gamma p(1-(s_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|+q\varphi(y_n)=\varepsilon_{n+1}$. Действительно, так как

$$|y_{n+1}-z_{n+1}|=|y_{n+1}-z_{n+2}|+(1-(s_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|,$$

то

$$\Delta_n=\alpha_n-\alpha_{n+1}=\gamma p(|y_n-z_{n+1}|+\varphi(y_n)/\gamma-|y_{n+1}-z_{n+1}|+\gamma p(1-(s_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|+q\varphi(y_n)+(p+q)\varphi(y_{n+1})\geq(1-(p+q))\{\gamma p(1-(s_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|+q\varphi(y_n)\}=(1-(p+q))\varepsilon_{n+1}>0.$$

Отсюда также следует, что $\varepsilon_n\to 0$, иначе $\alpha_n\to-\infty$.

Учитывая замечание 3, будем искать приближенную проекцию точки z_{n+1} на множество R и одновременно уточнять константу γ следующим образом. Пусть уже известны y_n и γ_n. Положим $\gamma^1=\gamma_n$ и, используя ранее разработанные методы нахождения приближенной проекции [2–4], определим приближение x_1 к проекции $P_R(z_{n+1})$ так, чтобы

$$\varphi(x_1)\leq q\varphi(y_n)+p\gamma^1(1-(c^1,c))|x_1-z_{n+1}|, \tag{5}$$

где $c^1=(x_1-z_{n+1})/|x_1-z_{n+1}|$. Если окажется

$$|y_n-z_{n+1}|+\varphi(y_n)/\gamma^1-|x_1-z_{n+1}|\geq 0,$$

то положим $\gamma_{n+1}=\gamma^1(=\gamma_n)$ и $y_{n+1}=x_1$. В противном случае положим

$$\gamma^2 = \frac{\varphi(y_n)}{|x_1 - z_{n+1}| - |y_n - z_{n+1}|}$$

и, заменив в (5) γ^1 на γ^2 и x_1 на x_2, найдем новую приближенную проекцию x_2 и т.д. Общий шаг этого итеративного процесса выглядит следующим образом. Определив x_ν из условия

$$\varphi(x_\nu) \leq q\varphi(y_n) + p\gamma^\nu(1-(c^\nu, c))|x_\nu - z_{n+1}| \qquad (6)$$

и обнаружив нарушение условия

$$|y_n - z_{n+1}| + \varphi(y_n)/\gamma^\nu - |x_\nu - z_{n+1}| \geq 0, \qquad (7)$$

полагаем

$$\gamma^{\nu+1} = \frac{\varphi(y_n)}{|x_\nu - z_{n+1}| - |y_n - z_{n+1}|}.$$

Процесс оборвется, как только будет выполнено условие (7). В этом случае положим $y_{n+1} = x_\nu$, $\gamma_{n+1} = \gamma^\nu$. Нетрудно видеть, что описанный процесс уточнения константы γ не может быть бесконечным. Действительно, если при переходе от $\gamma^{\nu-1}$ к γ^ν точка $x_{\nu-1}$ не уточнялась (т.е. $x_\nu = x_{\nu-1}$), то (7) окажется выполненным и процесс окончится. Если же при каждом уточнении γ^ν требуется уточнение и x_ν, то в силу сходимости методов [2-4] окажется, что $\varphi(x_\nu) \to 0$. Тогда при $\varphi(x_{\nu-1}) \leq q\varphi(y_n)$ реализуется указанный выше случай $(x_\nu = x_{\nu-1})$ и процесс оборвется.

Таким образом, последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{y_n\}$ строятся так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varphi(y_{n+1}) \leq q\varphi(y_n) + p\gamma_{n+1}(1-(s_{n+1}, c))|y_{n+1} - z_{n+1}| = \varepsilon_{n+1} \qquad (8)$$

и

$$|y_n - z_{n+1}| + \varphi(y_n)/\gamma^{n+1} - |y_{n+1} - z_{n+1}| \geq 0, \qquad (9)$$

а последовательность $\{z_n\}$ определяется, как и раньше, т.е. $z_{n+1} = P_{T(L)}(y_n)$. Последовательность $\{\gamma_n\}$ будет не возрастающая и $\gamma_n \geq \gamma$, поэтому $\lim \gamma_n = \bar{\gamma} \geq \gamma > 0$.

Определим последовательность $\alpha_n = p\gamma_{n+1}|y_n - z_{n+1}| + (p+q)\varphi(y_n)$. Мы строили процесс так, чтобы эта последовательность строго убывала от шага к шагу. Действительно, согласно (8) и (9), получаем, что

$$\Delta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} = p\gamma_{n+1}|y_n - z_{n+1}| + (p+q)\varphi(y_n) - p\gamma_{n+2}|y_{n+1} - z_{n+2}| -$$
$$-(p+q)\varphi(y_{n+1}) \geq p\gamma_{n+1}(|y_n - z_{n+1}| + \varphi(y_n)/\gamma_{n+1} - |y_{n+1} - z_{n+1}|) +$$

$$+q\varphi(y_n)-(p+q)\varphi(y_{n+1})+p\gamma_{n+1}(1-(\mathfrak{z}_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|\geq(1-(p+q))\times$$
$$\times[q\varphi(y_n)+p\gamma_{n+1}(1-(\mathfrak{z}_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|]=(1-(p+q))\varepsilon_{n+1}\geq 0.$$

Так как $-\infty<\alpha_0<\alpha_n$, то $\varepsilon_n\to 0$, иначе $\alpha_n\to-\infty$, при $n\to\infty$. Поскольку $\varphi(y_{n+1})\leq\varepsilon_{n+1}$ и $\varepsilon_n\to 0$, то, согласно теореме, процесс сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Последовательность α_n будет тоже убывать, если строить последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{y_n\}$ так, чтобы они удовлетворяли неравенству

$$\varphi(y_{n+1})\leq(p+q)\varphi(y_n)+p\gamma_{n+1}(c,y_n-y_{n+1})$$

и неравенству (9). При выполнении неравенства

$$\varphi(y_{n+1})\leq q\varphi(y_n)+p\gamma_{n+1}(1-(\mathfrak{z}_n,c))|y_n-z_n|$$

или

$$\varphi(y_{n+1})\leq(p+q)\varphi(y_n)+p\gamma_{n+1}(|y_n-z_n|-|y_{n+1}-z_{n+1}|)$$

и неравенства (9) получается сходящийся процесс, в котором убывает последовательность $\alpha_n=p\gamma_{n+1}|y_n-z_n|+(p+q)\varphi(y_n)$.

При изложении фактически не использовались конкретный способ задания множества R и конкретный вид функции, оценивающей $\rho(x,R)$. Поэтому точно такой же алгорифм можно применить и в других случаях. Например, для случая, когда множества A_i - произвольные выпуклые замкнутые множества, а их пересечение $\bigcap_{i\in I}A_i=R$ имеет слейтеровскую точку x^* и она нам известна. Тогда можно построить вариант метода с другой функцией оценки расстояния от точки y до множества R, а именно:

$$\rho(y,R)\leq|y-\hat{y}|,$$

где $\hat{y}$ - точка пересечения отрезка $[x^*,y]$ с границей множества R. Пусть $\alpha_n=\rho(y_n,c)+(p+q)|y_n-\hat{y}_n|$, где, как и раньше, $0<p<p+q<1$; $(z_n;c)=L$, а $(y-z_n,x-y)\geq 0$ для любого $x\in R$. Опишем вычислительную процедуру. Пусть уже построены $y_1,\dots,y_n$. В качестве y_{n+1} возьмем приближенную проекцию точки $z_{n+1}=P_{T(L)}(y_n)$ на множество R такую, что

$$|y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}|\leq q|y_n-\hat{y}_n|+p(1-(\mathfrak{z}_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|=\varepsilon_{n+1}.$$

В этом процессе убывание последовательности α_n на каждом шаге определяется величиной

$$\Delta_n=\alpha_n-\alpha_{n+1}=p\{(y_n,c)-(y_{n+1},c)+|y_n-\hat{y}_n|-(1-(\mathfrak{z}_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|\}+$$

$$+p(1-(s_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|+q|y_n-\hat{y}_n|+(p+q)|y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}|\geq$$
$$\geq p\{|y_n-z_{n+1}|-|y_{n+1}-z_{n+1}|+|y_n-\hat{y}_n|\}+(1-(p+q))[p(1-$$
$$-(s_{n+1},c))|y_{n+1}-z_{n+1}|+q|y_n-\hat{y}_n|]\geq(1-(p+q))\varepsilon_{n+1}\geq 0.$$

Отсюда, ввиду ограниченности α_n, вытекает, что $\varepsilon_n\to 0$ и, следовательно, согласно теореме, процесс сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Алгорифм также будет сходиться, если строить приближенные проекции любым из следующих способов:

$$|y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}|\leq(p+q)|y_n-\hat{y}_n|+p(c,y_n-y_{n+1}),$$
$$|y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}|\leq q|y_n-\hat{y}_n|+p(1-(s_n,c))|y_n-z_n|,$$
$$|y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}|\leq(p+q)|y_n-\hat{y}_n|+p(|y_n-z_n|-|y_{n+1}-z_{n+1}|).$$

В последних двух процессах убывает последовательность

$$\alpha_n=p(c,y_n)+p(1-(s_n,c))|y_n-z_n|+(p+q)|y_n-\hat{y}_n|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Все алгорифмы, изложенные в настоящей статье, можно интерпретировать как нахождения расстояния между множествами R и $T(L)$. Эти же алгорифмы можно приспособить для нахождения расстояния между двумя выпуклыми множествами, каждое из которых задано как пересечение конечного числа замкнутых выпуклых множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко проверяется, что все алгорифмы, кроме первого, будут сходиться, если в качестве z_{n+1} брать не точку $P_{T(L)}(y_n)$, а точку $y_n-\lambda_n c$, где $|\lambda_n c|\leq|P_{T(L)}(y_n)-y_n|$, $0<\alpha\leq\lambda_n$. Тогда сходится и такой процесс, где $z_{n+1}=y_n-\lambda_n c$, $0<\alpha\leq\alpha_n\leq\beta<\infty$, $\varphi(y_n)\leq\varepsilon$ любым описанным выше регулированием точности получения приближенной проекции точки z_n на множество R. Действительно, если за L взять величину

$$\min\{(c,y):y=x-\beta c,\ \varphi(x)\leq\varepsilon\},$$

то всегда

$$|\lambda_n c|\leq|P_{T(L)}(y_n)-y_n|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А. Проекционный метод с регулируемой точностью для задачи выпуклого программирования. – В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1974, вып. 15(32) с.23-31.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. – В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, вып. 15(32), с. 11-22.
3. ЕРЁМИН И.И. Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании. – Мат. заметки, 1968, т.3, №2, с.217-234.
4. ЛОБЫРЕВ А.И. О минимизации строго выпуклой функции на пересечении выпуклых множеств. – В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, вып. 5(22), с.128-132.

Поступила в ред.-изд.отдел

8.01.1979 г.