Выпуск 24 (41) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

О ПОНЯТИИ ДОГОВОРА В АБСТРАКТНОЙ ЭКОНОМИКЕ

В.Л.Макаров

В работах по математической экономике большое внимание уделяется стоимостным отношениям, т.е. отношениям, базирующимся на ценах на продукты и услуги, на соизмерение с помощью цен затрат и результатов экономической деятельности. Понятия экономического равновесия, рыночной экономики и т.п. эксплуатируют идею цен. Натуральный обмен продуктами и услугами исследовался крайне мало, хотя такие фундаментальные понятия как оптимум по Парето, ядро экономики, экономика благосостояния относятся скорее к натуральным, чем к стоимостным отношениям. Натуральный обмен не представляет собой какого-то исключительного явления в современном мире. Вспомним, что многие (если не большинство) продукты и услуги, трактуемые в самом широком смысле слова, цены́ не имеют. Отношения типа "я тебе, ты мне" весьма распространены. Более того, стоимостные обмены при надлежащей точной формулировке могут интерпретироваться как частный случай натуральных обменов.

Договор здесь понимается как некоторый зафиксированный акт обмена продуктами между двумя или более участниками экономической системы. Разумеется, существует много других видов договоров в экономике, предметом которых не является обмен продуктами. Например, соглашение не использовать какую-то технологию, бойкотировать такого-то участника, не производить больше заданного объема и т.д. Подобные виды договоров здесь не рассматриваются, однако автор предполагает изучать их в дальнейшем. Поэтому, кстати, принято единое название - договор, хотя, быть может, к договорам об обмене продуктами больше подходит слово сделка.

§ I. Экономика

Для того чтобы сформулировать понятие договора, необходимо зафиксировать какую-то модель экономики. Здесь выбрана достаточно общая модель $\mathcal{E}$, существенным ограничительным свойством которой является, пожалуй, только то, что целевые функции экономических агентов не зависят от действий других участников.

Экономика $\mathcal{E}$ задается с помощью следующей информации:

$$(X_i, Y_i, w_i, u_i)_{i=1}^n .$$

Здесь n - число экономических агентов или участников, X_i - множество, в котором участник i может выбирать свое потребление; $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$, где ℓ - число продуктов. Продукты, как это принято в математической экономике, понимаются в самом широком смысле слова. Положительные компоненты вектора x_i из X_i интерпретируются как потребление соответствующего продукта, а отрицательные - как отдача "во вне". Например, это может относиться к видам труда.

Y_i - множество видов деятельности, которыми располагает участник i, $Y_i \subset \mathbb{R}^\ell$. Деятельность y_i из Y_i понимается как выпуск продуктов в количествах, показываемых положительными компонентами y_i, и затраты, показываемые отрицательными компонентами вектора y_i.

w_i есть вектор исходных запасов продуктов, которые имеются у участника i, $w_i \in \mathbb{R}^\ell$. Отрицательные компоненты w_i интерпретируются как долговое обязательство.

u_i представляет собой функцию полезности или предпочтения участника i, определенную на множестве $X_i \times Y_i$.

Множество $\{1, 2, \dots, n\}$ (номеров) всех участников будет обозначаться через $\mathcal{N}$.

§ 2. Договор

Будем обозначать через v_{ij} ℓ-мерный вектор обмена продуктами между участниками i и j, где положительные компоненты показывают количество соответствующих продуктов, которые участник j должен передать участнику i, а отрицательные - наоборот.

По определению, имеем

$$v_{ij} = -v_{ji}. \qquad (I)$$

Договором будем называть совокупность векторов $v^{(r)}(S)=\{v_{ij}^{(r)}(S)\}$, $i,j\in S$. Здесь S есть некоторое подмножество множества N, т.е. $S\in 2^N$, r – номер договора, заключенного между участниками из S. Таким образом, предполагается, что между участниками из S могут заключаться несколько различных договоров. $v_{ij}^{(r)}(S)$ – вектор обмена продуктами между участниками i и j из S.

В дальнейшем множество всех подмножеств множества N за исключением пустого множества будет обозначаться через $\mathfrak{S}_0$. Элементы $\mathfrak{S}_0$ иногда будут называться коалициями. Через $\mathfrak{S}$ обозначается произвольная совокупность коалиций, т.е. $\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{S}_0$. Совокупность всех договоров обозначается через V, а множество номеров договоров, заключенных коалицией S в данной совокупности V, обозначается через $R_{S,V}$.

Назовем совокупность (систему) договоров $V=\{v^{(r)}(S)\}$, $S\in\mathfrak{S}, r\in R_{S,V}$, сбалансированной, если существуют $(x_i, y_i)_{i\in N}$ такие, что $x_i\in X_i, y_i\in Y_i$ и

$$y_i+w_i+\sum_{S\in\mathfrak{S}}\sum_{j\in S, r\in R_{S,V}} v_{ij}^{(r)}(S)=x_i \quad \text{для всех } i\in N. \qquad (2)$$

Суммируя левую и правую части соотношения (2) и учитывая (I), получим материальный баланс по всем продуктам

$$\sum_{i\in N} y_i+\sum_{i\in N} w_i=\sum_{i\in N} x_i,$$

т.е. сбалансированная система договоров V обеспечивает материальный баланс.

Договор $v^{(r)}(S)$ назовем правильным, если для любого $i\in S$ найдутся j и $k\in S$ такие, что $v_{ij}^{(r)}(S)$ содержит положительные, $v_{ik}^{(r)}(S)$ – отрицательные компоненты. Иначе говоря, в правильном договоре любой участник отдает другим участникам продукты и получает от них продукты. Наличие этого свойства позволяет каждому участнику разорвать договор, ибо в его власти не поставить продукты.

Договор $v^{(r)}(S)$ назовем договором по передаче, если S – двуэлементное множество, а сам договор состоит из пары векторов $v_{ij}^{(r)}(S)$, $v_{ji}^{(r)}(S)$, где $v_{ij}^{(r)}(S)$ содержит одну положительную компоненту, а остальные компоненты

равны нулю.

Сбалансированная система договоров $\mathcal{V}$ называется п р а в и л ь н о й , если она состоит только из правильных договоров.

Как обычно, состояние экономики есть вектор $z=(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$.

Обозначим через $z(\mathcal{V})$ состояние экономики $\mathcal{E}$, которое определяется в зависимости от сбалансированной системы договоров с помощью следующих задач максимизации:

$$(x_i(\mathcal{V}), y_i(\mathcal{V})) \in \arg\max u_i(x_i, y_i), i \in \mathcal{N},$$

где $\max$ берется по всем $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$ таким, для которых имеет место соотношение (2).

§ 3. Ненавязанные и квазиустойчивые системы договоров

В дальнейшем предполагается, что для экономики $\mathcal{E}$ выполняется

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.

(а) $Y_i + \mathbb{R}^{\ell}_{-} = Y_i$.

(б) Из $y \geq y'$, $y \neq y'$ следует $u_i(x, y) < u_i(x, y')$ для всех $x \in X_i$, $i \in \mathcal{N}$.

Условие (а) содержательно означает возможность беззатратного уничтожения любых продуктов. Условие (б) означает, что производить меньшее количество продуктов с бо́льшими затратами приятнее. Предположение I вводится в этой работе для того, чтобы обойтись без договоров по передаче, ограничиваясь только правильными договорами.

Возьмем правильную систему договоров $\mathcal{V}$. В этой системе выделим совокупность договоров, заданную с помощью множества γ, элементами которого являются пары (T, r), $T \in \mathfrak{S}$, $r \in R_{T,\mathcal{V}}$. Договор $v^{(r)}(T)$ из системы $\mathcal{V}$ принадлежит выделенной совокупности, если $(T, r) \in \gamma$. Системе $\mathcal{V}$ и множеству γ сопоставляется совокупность правильных систем договоров $A(\mathcal{V}, \gamma)$ следующим образом. Будем говорить, что правильная система договоров $\mathcal{V}'$ является расширением правильной системы $\mathcal{V}''$, если $\mathcal{V}'$ содержит все правильные договоры, входящие в $\mathcal{V}''$, и хотя бы один правильный договор, не входящий в $\mathcal{V}''$. Тогда

$A(V,\gamma)$ можно определить следующим образом. Правильная система договоров V' принадлежит $A(V,\gamma)$ в том и только в том случае, если

I) все договоры $v^{(z)}(T)$ из V' содержатся в V;

2) для любой пары $(T,z)\in\gamma$ договор $v^{(z)}(T)$ из V не содержится в V';

3) не существует правильной системы договоров V'', удовлетворяющей условиям I,2 и являющейся расширением системы V'.

Данное определение множества $A(V,\gamma)$ формализует результат процедуры разрыва договоров из γ в системе V. Процедура состоит в следующем. Разрываются все договоры из γ. Если получившаяся система сбалансирована, то она и определяет множество $A(V,\gamma)$. Если нет, то каждый участник определяет, какие договоры он должен разорвать еще, чтобы обеспечить сбалансированность, т.е. соотношение (2). Поскольку этот процесс неоднозначен, то в результате может оказаться целое множество сбалансированных систем договоров. При этом требуется, чтобы договоры разрывались только в силу необходимости обеспечения сбалансированности, а, скажем, не из-за увеличения значения функции предпочтения. Это обеспечивается условием 3 определения множества $A(V,\gamma)$.

Договор $v^{(z)}(T)$ в системе V называется н е н а в я з а н н ы м, если для любого $i\in T$ найдется $V'\in A(V,\{(T,z)\})$ такая, что $u_i(x_i(V),y_i(V))\geq u_i(x_i(V'),y_i(V'))$.

Система договоров V называется н е н а в я з а н н о й, если все договоры, в нее входящие, не навязаны.

Наряду с множеством $A(V,\gamma)$ введем в рассмотрение множество $A(V,\gamma,\tilde{v}(S))$, учитывающее возможность образования нового договора $\tilde{v}(S)$ коалицией S.

Правильная система договоров V' принадлежит множеству $A(V,\gamma,\tilde{v}(S))$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

I. V' содержит один и только один договор $\tilde{v}(S)$, который не содержится в V.

2. Если $(T,z)\in\gamma$, то договор $v^{(z)}(T)$ из V не содержится в V'.

3. Не существует правильной системы договоров V'', удовлетворяющей условиям I,2 и являющейся расширением системы V'.

Обозначим через γ_S множество таких пар (T,z), что $T\in\mathfrak{S}$,

$r \in R_{T,v}, T \cap S \neq \emptyset$. Содержательно γ_S выделяет договоры, которые коалиция S может разрывать.

Система договоров V называется квазиустойчивой, если не существует коалиции $S \in \sigma$, договора $\tilde{v}(S)$ и множества $\tilde{\gamma} \subseteq \gamma_S$ таких, что для любой $V' \in A(V, \tilde{\gamma}, \tilde{v}(S))$ выполняется $u_i(z_i(V)) \leq u_i(z_i(V'))$ для всех $i \in S$, причем для хотя бы одного i имеет место строгое неравенство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая квазиустойчивая система договоров является ненавязанной. Действительно, пусть в системе V содержится навязанный договор $v^{(r)}(T)$, т.е. существует участник $i \in T$ такой, что для любой $V' \in A(V, \{(T, r)\})$ $u_i(z_i(V)) < u_i(z_i(V'))$. Тогда, поскольку $A(V, \{(T,r)\}) = A(V, \{(T,r)\}, \tilde{v}(\{i\})), \tilde{v}(\{i\}) = 0$, это означает, что V не является квазиустойчивой. Другими словами, ненавязанность можно понимать как квазиустойчивость относительно единичных коалиций.

§ 4. Договорные состояния и ядро

Назовем состояние z договорным, если существует квазиустойчивая система договоров V такая, что $z = z(V)$. Множество договорных состояний относительно совокупности разрешенных коалиций σ обозначим через $Z(\sigma)$.

Сбалансированное состояние z блокируется коалицией $S \in \sigma$, если найдется $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)_{i \in S}$ такое, что $\tilde{x}_i \in X_i$, $\tilde{y}_i \in Y_i$, $\sum_{i \in S} \tilde{y}_i + \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in S} \tilde{x}_i$ и $u_i(z_i) \leq u_i(\tilde{x}_i)$ для всех $i \in S$, причем для хотя бы одного i имеет место строгое неравенство.

Ядро экономики $\mathcal{E}$, обозначаемое через $C(\sigma)$, представляет собой множество таких состояний z, которые не блокируются никакой коалицией из σ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Такое простое определение ядра можно дать только в силу действия предположения I и условия, что u_i зависят только от x_i, y_i. Если эти предположения не выполнены, то определение ядра усложняется из-за необходимости привлечения дополняющей коалиции $-S$.

Если σ содержит только один элемент - множество N, то $C(\{N\})$ называют обычно оптимальными по Парето состояниями. Непосредственно из определения вытекает, что если $\sigma' \subseteq \sigma$, то $C(\sigma') \supseteq C(\sigma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть выполнено предположение I, а также условие: "для любого $i \in N$ найдутся $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$ такие, что $y_i + w_i = x_i$". Тогда $Z(\sigma) \subset C(\sigma)$ для любой $\sigma \subseteq \Theta_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть существует $z \in Z(\sigma)$ и $z \notin C(\sigma)$. Пусть V – квазиустойчивая система договоров, соответствующая состоянию z. Возьмем коалицию S, которая по предположению блокирует состояние z. Это означает, что существуют $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)_{i \in S}$ такие, что

$$\sum_{i \in S} \tilde{y}_i + \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in S} \tilde{x}_i \qquad (3)$$

и $u_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \geq u_i(x_i, y_i)$, $i \in S$, причем для некоторого $i \in S$ имеет место строгое неравенство. Зафиксируем какой-нибудь договор $\tilde{v}(S)$, который обеспечивает равенство (3), т.е.

$$\tilde{y}_i + w_i + \sum_{j \in S} \tilde{v}_{ij}(S) = \tilde{x}_i \qquad \text{для всех } i \in S$$

и $\sum_{i,j \in S} \tilde{v}_{ij}(S) = 0.$

Обозначим через S' множество участников, для которых договор $\tilde{v}(S)$ не является правильным.

Рассмотрим два случая.

I случай: множество S' состоит только из таких i, для которых

$$\tilde{v}_{ij}(S) \geq 0 \qquad \text{для всех } j \in S.$$

Рассмотрим договор $\tilde{v}(S \setminus S')$, получающийся из договора $\tilde{v}(S)$ вычеркиванием всех $\tilde{v}_{ij}(S)$ таких, что i или $j \in S'$.

В силу предположения I существуют $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)_{i \in S \setminus S'}$ такие, что

$$\hat{y}_i + w_i + \sum_{j \in S \setminus S'} \tilde{v}_{ij}(S \setminus S') = \hat{x}_i \text{ для всех } i \in S \setminus S',$$

$$\sum_{i,j \in S \setminus S'} \tilde{v}_{ij}(S \setminus S') = 0 \text{ и } u_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \geq u_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i),$$

$i \in S \setminus S'$, и для хотя бы одного $i \in S \setminus S'$ имеет место строгое неравенство. Последнее означает, что множество $A(V, \gamma_{S \setminus S'}, \tilde{v}(S \setminus S'))$ содержит систему договоров V', которая лучше, чем V, для коалиции $S \setminus S'$, что противоречит квазиустойчивости V.

II случай: в множестве S' найдется i такой, что $\tilde{v}_{ij}(S)\le 0$ для всех $j\in S$. Тогда в силу предположения I $A(V,\gamma_{\{i\},0})$ содержит систему договоров V', которая для этого i-того участника лучше, чем V, что снова противоречит квазиустойчивости V.

Резюмируя это доказательство, можно сказать, что если состояние z блокируется некоторой коалицией $S\setminus S'$, то при любой системе договоров, соответствующих состоянию z, коалиция $S\setminus S'$, разорвав все договоры с участниками из $-(S\setminus S')$, может заключить договор, который улучшает ее положение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть выполнены условия предложения I и, кроме того, $N\in\mathfrak{S}$. Тогда $C(\mathfrak{S})\subseteq Z(\mathfrak{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z\in C(\mathfrak{S})$. Рассмотрим систему договоров V, состоящую из единственного договора $v(\{N\})$, причем $z(V)=z$. Система V квазиустойчива, поскольку в противном случае существует система $V'\in A(V,\gamma_S,\tilde{v}(S))$, состоящая из единственного договора $\tilde{v}(S)$, такая, что $u_i(z_i(V')\ge$ $\ge u_i(z_i(V))$ для всех $i\in S$, причем для хотя бы одного имеет место строгое неравенство. А это означает, что коалиция S блокирует z, что противоречит включению $z\in C(\mathfrak{S})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $N\in\mathfrak{S}$ является существенным. Приведем пример, показывающий, что если оно не выполнено, то $Z(\mathfrak{S})\ne C(\mathfrak{S})$. Имеется 4 участника, $N=\{1,2,3,4\}$. Разрешаются любые коалиции, кроме коалиции из всех участников. Идея примера в том, что первые три участника могут заключить независимо с 4-м попарно-ненавязанные договоры, а кроме того, могут заключить еще отдельно между собой договор, выгодный всем трем. Тогда состояние, получаемое в данной системе только парных договоров, оказывается лежащим в ядре, но не является договорным в силу существования взаимовыгодного договора 3-х первых участников. Итак, $\ell=9$,

$$w_1=(1,0,0,0,0,0,1,0,0),\ u_1=x_1^{(2)}+x_1^{(9)}-\sum_k y_1^{(k)}\cdot\varepsilon;$$

$$w_2=(0,0,1,0,0,0,0,0,0),\ u_2=x_2^{(4)}+x_2^{(9)}-\sum_k y_2^{(k)}\cdot\varepsilon;$$

$$w_3=(0,0,0,0,1,0,0,0,0),\ u_3=x_3^{(6)}+x_3^{(9)}-\sum_k y_3^{(k)}\cdot\varepsilon;$$

$$w_4=(0,1,0,1,0,1,0,0,0),\ u_4=x_4^{(1)}+x_4^{(3)}-\sum_k y_4^{(k)}\cdot\varepsilon,$$

где ε - достаточно малое число,

$Y_1 = Y_4 = R^9_-$; $Y_2 = \{y_2 = \lambda(0,0,0,0,0,0,-1,+1,0), \lambda \geq 0\} + R^9_-$;
$Y_3 = \{y_3 | y_3 = \lambda(0,0,0,0,0,0,0,-1,+1), \lambda \geq 0\} + R^9_-$;
$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = R^9_+$.

Рассмотрим систему договоров $V = (v_{1,2}(\{1,4\}) = (-I,+I,0,0,0,0,0,0,0)$, $v_{3,4}(\{2,4\}) = (0,0,-I,+I,0,0,0,0,0)$, $v_{5,6}(\{3,4\}) = (0,0,0,0,-I,+I,0,0,0)$, где все остальные $v_{ij}(S)$, $S \in \mathfrak{S}$, нулевые. Системе V соответствует такое состояние z: $y_i = 0$ для всех $i \in N$, $x_1 = (0,I,0,0,0,0,I,0,0)$, $x_2 = (0,0,0,I,0,0,0,0,0)$, $x_4 = (I,0,I,0,I,0,0,0,0)$, $x_3 = (0,0,0,0,0,I,0,0,0)$, соответственно $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 3$. Проверим, что это состояние лежит в ядре. Коалиция из трех участников, среди которых есть четвертый, дает этому четвертому участнику $u_4 = 2$, а остальным не больше единицы. Коалиция из первых трех участников обеспечивает выпуск 9-го продукта в количестве I, следовательно, $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Таким образом, получаем, что ни одна из коалиций не блокирует состояние $z(V)$. Это состояние блокируется коалицией N из 4-х участников, но такая коалиция запрещена по определению $\mathfrak{S}$. Далее, нетрудно видеть, что V неквазиустойчива, поскольку существует договор $v(\{1,2,3\}) = (v_{7,8}(\{1,2,3\}) = (0,0,0,0,0,0,-I,0,0)$, $v_{8,9} = (0,0,0,0,0,0,0,-I,\frac{1}{3})$, $v_{7,9} = (0,0,0,0,0,0,0,0,\frac{1}{3}))$, который будучи добавленным к системе V улучшает положение 3-х первых участников. А именно, в новой системе $V \cup v(\{1,2,3\})$ имеем $u_1 = u_2 = u_3 = 1\frac{1}{3}$, $u_4 = 3$.

§5. Совершенные договорные состояния

Представим себе, что договорное состояние z обеспечивается квазиустойчивой системой договоров V , так что $z = z(V)$. Ясно, что всегда существуют другие правильные системы договоров, которые обеспечивают то же самое состояние z . Например, каждый договор $v(S)$ всегда можно разбить на пару договоров вида $\frac{1}{2} v(S)$. Разбиение такого типа не изменяет z . Объединение нескольких договоров в один также не приводит к изменению z . Может оказаться так, что другая система договоров, обеспечивающая состояние z , окажется неквазиустойчивой. Это означает, что при изменении системы договоров состояние z также будет

изменяться. Поэтому было бы естественным среди всех договорных состояний $\mathfrak{Z}(\sigma)$ выделить такие состояния, которые не будут подвергаться подобного рода изменениям. Введем соответствующие определения.

Назовем две правильные ненавязанные системы договоров V и V' эквивалентными, если

$$\sum_{S\in\sigma}\sum_{j\in S,\, r\in R_{S,V}} v_{ij}^{(r)}(S)=\sum_{S\in\sigma}\sum_{j\in S,\, r\in R_{S,V'}} v_{ij}^{(r)}(S) \quad \text{для всех } i\in N.$$

Очевидно, для эквивалентных V и V', если $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}(V)$, то $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}(V')$. Правильная ненавязанная система договоров V называется *устойчивой*, если все эквивалентные ей системы договоров квазиустойчивы. Договорные состояния $\mathfrak{z}$, соответствующие устойчивым системам договоров, будут называться *вполне договорными*. Множество всех вполне договорных состояний будет обозначаться $\mathfrak{Z}_0(\sigma)$.

Правильная ненавязанная система договоров V называется *равноправной* (по другой терминологии *справедливой*), если для любой пары договоров $v^{(r)}(S)$, $v^{(s)}(T)$ и участников $i\in S$, $j\in T$ не существует числа $\lambda>0$ такого, что

$$v_i^{(r)}(S)=\sum_{k\in S} v_{ik}^{(r)}(S)\geq \lambda v_j^{(s)}(T)=\lambda\sum_{k\in T} v_{jk}^{(s)}(T),\; v_i^{(r)}(S)\neq\lambda v_j^{(s)}(T).$$

Это определение можно пояснить следующим образом. Предположим, что $v_i(S)\geq v_j(T)$, $v_i(S)\neq v_j(T)$. Это означает, что договор $v(S)$ для участника i лучше договора $v(T)$ для участника j, хотя содержание этих договоров для участников i и j одинаково. Например, пусть имеется три участника и два продукта. У первого участника имеется I-й продукт, у второго и третьего учасников – 2-й продукт. Пусть $v_{1,2}(\{1,2\})=(-1,1)$, $v_{1,3}(\{1,3\})=(-1,2)$. Эти два договора неравноправны по отношению ко второму и третьему участникам, так как 3-й участник получает единицу первого продукта за две единицы второго, а второй участник получает единицу за единицу.

Вполне договорное состояние будет называться *совершенным договорным* состоянием, если среди всех квазиустойчивых систем договоров, ему соответствующих, найдется равноправная система договоров.

Множество совершенных договорных состояний обозначается

через $M(\sigma)$. Непосредственно из определений имеем

$$M(\sigma) \subseteq \mathcal{Z}_0(\sigma) \subseteq \mathcal{Z}(\sigma).$$

Укажем пример, показывающий, что каждое из этих включений может быть собственным, т.е. $\mathcal{Z}_0(\sigma) \neq \mathcal{Z}(\sigma)$ и $M(\sigma) \neq \mathcal{Z}_0(\sigma)$. Другими словами, среди договорных состояний могут быть состояния, не являющиеся вполне договорными, а среди вполне договорных состояний могут встретиться состояния, не являющиеся совершенными.

Имеется 3 участника, $N=\{1,2,3\}$, и 4 продукта, $\ell=4$,

$$\begin{aligned} &w_1=(1,0,1,0),\ u_1=x_1^{(2)}+x_1^{(4)}-\sum_k y_1^{(k)}\cdot\varepsilon; \quad Y_1=Y_2=Y_3=\mathbb{R}^4_-; \\ &w_2=(0,1,0,\tfrac{1}{2}),\ u_2=x_2^{(1)}+x_2^{(3)}-\sum_k y_2^{(k)}\cdot\varepsilon; \quad X_1=X_2=X_3=X_4=\mathbb{R}^4_+; \\ &w_3=(0,0,0,1),\ u_3=x_3^{(3)}+\tfrac{1}{2}x_3^{4}-\sum_k y_3^{(k)}\cdot\varepsilon, \end{aligned}$$

где ε – достаточно малое число.

Возьмем систему договоров $\mathcal{V}$, состоящую из одного ненулевого договора $v_{1,2}(\{1,2\})=(-1,1,-1,\frac{1}{2})$. В состоянии $\mathcal{Z}$, соответствущем системе $\mathcal{V}$, получаются $u_1=1{,}5$, $u_2=2$, $u_3=0{,}5$. Система договоров $\mathcal{V}$ квазиустойчива. Действительно, если договор $v_{1,2}(\{1,2\})$ не разрывать, то никакого нового ненулевого ненавязанного договора заключить нельзя. Если этот договор разорвать, то можно заключить договоры внутри коалиции $\{1,3\}$ или $\{1,2,3\}$. В случае коалиции $\{1,3\}$ 1-й участник получает значение u_1, меньшее, чем при системе $\mathcal{V}$, а в случае коалиции $\{1,2,3\}$ при любом договоре, отличном от $v_{1,2}(\{1,2\})$, второй участник получает значение $u_2 < 2$. Однако состояние $\mathcal{Z}$ и система $\mathcal{V}$ не устойчивы, поскольку существует неквазиустойчивая система договоров $\mathcal{V}'$, эквивалентная $\mathcal{V}$. А именно, $\mathcal{V}'$ получается разбиением договора $v_{1,2}(\{1,2\})$ на два отдельных договора $v_{1,2}^{(1)}(\{1,2\}) = (-1,1,0,0)$ и $v_{1,2}^{(2)}(\{1,2\})=(0,0,-1,\frac{1}{2})$. Легко видеть, что эти два договора ненавязанные, поэтому $\mathcal{V}'$ эквивалентна $\mathcal{V}$. Система $\mathcal{V}'$ не является квазиустойчивой, поскольку существует договор $v_{1,3}(\{1,3\}) = (0,0,-1,1)$, который улучшает положение его участников. При этом разрывается договор $v_{1,3}(\{1,3\})$, благодаря чему положение второго участника ухудшается. В новой системе договоров $u_1=2$, $u_2=1$, $u_3=1$. Итак, исходная квазиустойчивая система договоров $\mathcal{V}$ оказалась неустойчивой потому, что договор между первым

и вторым участником можно разбить на два ненавязанных отдельных договора, и тогда первый может вступить в выгодную ему коалицию с третьим участником, нарушая свои отношения со вторым участником лишь частично (сохраняя первый договор и нарушая второй).

Полученная система договоров, при которой $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, также неустойчива, ибо договор $v_{1,3}(\{1,3\}) = (0,0,-I,I)$ можно представить, например, парой ненавязанных договоров $(0,0,-\frac{1}{4},\frac{1}{4}), (0,0,-\frac{3}{4},\frac{3}{4})$. Но тогда второй участник может предложить первому заключить взаимовыгодный договор $(0,0,-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$. При этом разрывается договор $(0,0,-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ с третьим участником.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из договоров $v_{1,2}^{(1)}(\{1,2\}) = (-I,I,0,0)$, $v_{1,2}^{(2)}(\{1,2\}) = (0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $v_{1,3}(\{1,3\}) = (0,0,-\frac{1}{2},I)$. Эта система договоров устойчива. Действительно, при этой системе значения целевых функций участников есть $u_1 = 2,5$, $u_2 = 1,5$, $u_3 = 0,5$. Существование ненавязанной неквазиустойчивой системы договоров, эквивалентной данной, означает наличие договора между двумя участниками, который улучшает положение хотя бы одного из них, не ухудшая положения другого. Возьмем первого и второго участников. Второй участник может улучшить свое положение только в том случае, если первый разорвет один из своих договоров с 3-м участником. А это ему делать всегда невыгодно. То же рассуждение можно провести и по отношению коалиции I-го и 3-го участников. Коалиция 2-го и 3-го участников также ничего не дает, так как эти участники находятся в антагонистическом отношении: один участник может улучшить свое положение только за счет другого. Таким образом, указанная система договоров устойчива. Однако она, как легко заметить, не является равноправной, поскольку $v_{1,2}^{(2)}(\{1,2\}) \leq v_{1,3}(\{1,3\})$. Устойчивая равноправная система договоров есть $v_{1,2}^{(1)}(\{1,2\}) = (-I,I,0,0)$, $v_{1,2}^{(2)}(\{1,2\}) = (0,0,-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, $v_{1,3}(\{1,3\}) = (0,0,-\frac{2}{3}, I)$. Она дает единственное в этой экономике совершенное договорное состояние. Заметим, что это совершенное договорное состояние является состоянием экономического равновесия.

Гипотеза состоит в том, что в экономике $\mathcal{E}$, удовлетворяющей предположению I, любое состояние экономического равновесия содержится в $M(\mathcal{E}_0)$.

Нетрудно привести пример экономики с двумя участниками, когда состояние равновесия строго содержится (не совпадает) в множестве совершенных договорных состояний.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.01.1980 г.