УДК 518.9

ОБ H-ДЕЛЕЖАХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В.А. Васильев

Обнаружение Ауманом [1] связи между распределениями Шепли и вальрасовскими равновесиями стимулировало ряд исследований, посвященных различным обобщениям вектора Шепли (см. [2-4]). Цель указанных работ состоит в аксиоматическом описании соответствующих механизмов распределения и характеризации отвечающих им оценок "значимости" участников игры. В настоящей работе эти же вопросы решаются для аналогов вектора Шепли, основанных, в отличие от [2-4], на детерминированной интерпретации последнего, предложенной Харшаньи (см. [5], а также [6]). Следует подчеркнуть, что в то время как для вероятностных обобщений из [2-4] нарушается условие оптимальности по Парето, рассматриваемые ниже аналоги удовлетворяют даже более сильным требованиям эффективности. Последнее обстоятельство позволяет трактовать предлагаемую аксиоматику как описание некоторого класса дележей кооперативной игры v, обладающих естественным свойством регулярности типа сохранения носителей v.

1. Модель, лежащая в основе дальнейших рассмотрений, имеет следующий вид. В рамках "большой коалиции" N, состоящей из n участников, организованы объединения $\omega \subseteq N$, имеющие своей целью выпуск или потребление некоторого однородного продукта a в заданном объеме $v_\omega \in R^1$. Неприемлемость образования того или иного объединения $\omega_0 \subseteq N$ учитывается равенством $v_{\omega_0} = 0$. Предполагается, что все объединения располагают возможностью самостоятельно определять долю участия $p_i^\omega \in [0,1]$ $(\sum_{i\in\omega} p_i^\omega = 1)$

своих членов $i \in \omega$ в формировании суммарной величины v_ω. В результате назначения указанных долей ρ_i^ω определяется общий объем $x_i = \sum_{\omega | i \in \omega} \rho_i^\omega \cdot v_\omega$ выпуска (или потребления, в зависимости от знака x_i) каждого участника $i \in N$ в отдельности. Задача состоит в том, чтобы установить характеристические свойства всех достижимых указанным способом распределений $x = (x_1, \dots, x_n)$*).

Переходя к теоретико-игровой постановке вопроса, отметим, что рассматриваемой модели отвечает кооперативная игра $\Gamma = (N, v)$, в которой возможности коалиции $S \subseteq N$ по выпуску продукта a определяются следующим естественным образом:

$$v(S) = \sum_{\omega \subseteq S} v_\omega \qquad (S \subseteq N). \tag{I.I}$$

При этом совокупность всех интересующих нас распределений x может быть задана в виде определяемого ниже множества $A(v)$ дележей величины $v(N) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega$:

$$A(v) \triangleq \{ y_v(\rho) \mid \rho \in \mathcal{P}_N \}, \tag{I.2}$$

где

$$\mathcal{P}_N \triangleq \{ [\rho_i^\omega]_{i \in \omega}^{\omega \subseteq N} \mid \rho_i^\omega \in R_+^1, \sum_{i \in \omega} \rho_i^\omega = 1 \quad (i \in \omega \subseteq N) \},$$

$$(y_v(\rho))_i \triangleq \sum_{\omega | i \in \omega} \rho_i^\omega \cdot v_\omega \qquad (i \in N).$$

Формула (I.I), как нетрудно проверить, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между совокупностью всевозможных наборов $\{v_\omega\}_{\omega \subseteq N}$ $(v_\emptyset = 0)$ и пространством $V = V(N)$ всех функций множества $v : 2^N \longrightarrow R$, удовлетворяющих условию $v(\emptyset) = 0$. Указанный изоморфизм и позволяет вести все дальнейшее изложение в терминах теории кооперативных игр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. H-дележами кооперативной игры $v \in V$ будем называть элементы множества $A(v)$.

В дальнейшем нам потребуются некоторые обозначения и определения из [6]. Пусть v - произвольная функция из V. Вводимые ниже функции $v^+, v^-, |v|$ будем называть положительной, отрицательной и полной вариациями v соответственно:

---

*) Вопросы, связанные с выбором "оптимальных" распределений, обсуждаются в [7].

$$v^+(S)=\sum_{\omega\subseteq S} v^+_\omega,$$
$$v^-(S)=\sum_{\omega\subseteq S} v^-_\omega, \qquad (S\subseteq N)$$
$$|v|(S)=\sum_{\omega\subseteq S}|v_\omega|,$$

где, как и всюду в дальнейшем, v_ω $(\omega\subseteq N)$ – величины, определяемые по v в соответствии с формулой (I.I), $v^+_\omega=max\{v_\omega,0\}$, $v^-_\omega=max\{-v_\omega,0\}$. В пространстве V вводится отношение полуупорядоченности, индуцированное конусом

$$V_+=\{v\in V\,|\,v_\omega\geq 0 \quad (\omega\subseteq N)\}.$$

Будем говорить, что две функции $u,v\in V$ дизъюнктны, если $|u|\wedge|v|=0$ или, другими словами, $u_\omega\cdot v_\omega=0$ для всех $\omega\subseteq N$.

Наконец, для каждой функции $v\in V$ положим

$$Supp\, v\triangleq\{R\subseteq N\,|\,v(S)=v(S\cap R) \quad (S\subseteq N)\},$$
$$I(v)\triangleq\{x\in R^N\,|\,x(N)=v(N), x(S)\geq v_{(1)}(S)\ (S\subseteq N)\},$$
$$C(v)\triangleq\{x\in I(v)\,|\,x(S)\geq v(S) \quad (S\subseteq N)\},$$

где

$$v_{(1)}(S)\triangleq\sum_{i\in S} v(\{i\}), \qquad (S\subseteq N)$$
$$x(S)\triangleq\sum_{i\in S} x_i .$$

Напомним, что элементы множества $Supp\, v$ – так называемые носители v, $I(v)$ – совокупность всех индивидуально-рациональных дележей игры v, а $C(v)$ – c-ядро этой игры.

2. Целью этого пункта является аксиоматическое описание точечно-множественного отображения A :

$$v\longmapsto A(v) \qquad (v\in V).$$

Приведем некоторые свойства отображения A, вытекающие непосредственно из формулы (I.2).

AI. Для всех $v\in V$ множество $A(v)$ выпуклое.

A2. Для любой пары дизъюнктных функций $u,v\in V$ имеет место равенство

$$A(u+v)=A(u)+A(v).$$

A3. Справедливы включения

$$A(V_+) \subseteq R_+^N, \quad A(V_-) \subseteq R_-^N,$$

где

$$V_- \triangleq -V_+,$$
$$R_-^N \triangleq -R_+^N,$$
$$A(X) \triangleq \bigcup_{v \in X} A(v).$$

А4. Для любых $v \in V, i \in N$ выполняется соотношение

$$A(v_i) \subseteq A(v),$$

где

$$v_i(S) \triangleq \begin{cases} v(S), & i \notin S, \\ v(S \setminus \{i\}) + \bar{v}_i, & i \in S, \end{cases}$$
$$\bar{v}_i \triangleq v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

А5. Для всех $v \in V, x \in A(v), R \in Supp\, v$ справедливо равенство

$$x(R) = v(N).$$

В проверке нуждается разве лишь выполнение условия А4. С этой целью перепишем формулу (I.2) в виде

$$A(v) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega \cdot \Delta_\omega, \tag{2.I}$$

где

$$\Delta_\omega \triangleq \{x \in R_+^N \mid x(\omega) = 1, \ x(N \setminus \omega) = 0\}.$$

Далее, заметим, что в силу определения функции v_i справедливы соотношения

$$(v_i)_\omega = \begin{cases} \sum_{\omega' \mid i \in \omega'} v_{\omega'}, & \omega = \{i\}, \\ v_\omega, & \omega \subseteq N \setminus \{i\}, \\ 0, & i \in \omega, \ |\omega| \geq 2 \text{ *)}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$A(v_i) = \sum_{\omega \subseteq N \setminus \{i\}} v_\omega \cdot \Delta_\omega + \sum_{\omega \mid i \in \omega} v_\omega \cdot e^i,$$

где

$$(e^i)_j = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

---

*) Как обычно, под $|S|$ понимается число элементов конечного множества S.

Отсюда и вытекает требуемое включение $A(v_i) \subseteq A(v)$.

Замечательная особенность свойств AI–A5 состоит в том, что они исчерпывающим образом описывают отображение A.

ТЕОРЕМА I. Точечно-множественное отображение, удовлетворяющее условиям AI-A5, существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В последнем нуждается только тот факт, что всякое отображение A', удовлетворяющее условиям AI–A5, определяется в соответствии с формулой (2.I). Итак, пусть для A' выполняются все условия AI–A5. Зафиксируем некоторые $T \subseteq N$, $\alpha \in R^1$ и рассмотрим функцию

$$u_T(S) = \begin{cases} \alpha, & T \subseteq S, \\ 0, & T \nsubseteq S. \end{cases}$$

Убедимся в том, что

$$A'(u_T) = \alpha \cdot \Delta_T . \tag{2.2}$$

Пусть i – произвольный элемент из T. Ясно, что $(u_T)_i(S) = \alpha$, если $i \in S$, и $(u_T)_i(S) = 0$ в противном случае. Далее, поскольку $\{i\} \in Supp(u_T)_i$ и $(u_T)_i \in V_+ \cup V_-$, то, в силу A3, A5, имеем

$$A'((u_T)_i) = \{a^i\},$$

где

$$(a^i)_j = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ввиду произвольности $i \in T$, на основании AI и A4, получаем: $\alpha \cdot \Delta_T \subseteq A'(u_T)$. Поскольку, как нетрудно проверить, $u_T \in V_+$ при $\alpha \geq 0$ ($u_T \in V_-$ при $\alpha < 0$) и $T \in Supp\, u_T$, из A3 и A5 получаем обратное включение $A'(u_T) \subseteq \alpha \cdot \Delta_T$, что и дает требуемое равенство (2.2).

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что каждая функция $v \in V$ представима в виде

$$v = \sum_{\omega \subseteq N} w_\omega ,$$

где

$$w_\omega(S) = \begin{cases} v_\omega, & \omega \subseteq S, \\ 0, & \omega \subseteq S. \end{cases}$$

При этом из определения $w_\omega^v\ (\omega\subseteq N)$ вытекает, что все они попарно-дизъюнктны. Отсюда, воспользовавшись условием А2 и соотношением (2.2), получаем искомую формулу для A'.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Интересно отметить, что наряду с полнотой и непротиворечивостью аксиоматики AI–A5, вытекающей из теоремы I, имеет место и минимальность этой системы. Именно, каждая из аксиом AI–A5 не зависима от всех остальных, подтверждением чему являются приводимые ниже отображения $A_1, A_2, \dots, A_5$, удовлетворяющие всем указанным условиям, за исключением $AI, A2, \dots, A5$ соответственно:

$$A_1(v) \triangleq \sum_{\omega\subseteq N} v_\omega \cdot \Delta'_\omega,$$

$$A_2(v) \triangleq \{y_v(p) \mid p\in Q_N\},$$

$$A_3(v) \triangleq \sum_{\omega\subseteq N} v_\omega \cdot \Delta''_\omega,$$

$$A_4(v) \triangleq \{y_v(p_0)\},$$

$$A_5(v) \triangleq \{(v(N)/n, \dots, v(N)/n)\},$$

где

$$\Delta'_\omega = \{x\in\Delta_\omega \mid x_i \in\{0,1\} \quad (i\in\omega)\},$$

$$\Delta''_\omega = \{x\in R^N \mid x(\omega)=1,\ x_j = 0 \quad (j\in N\setminus\omega)\},$$

$$Q_N = \{p\in\mathcal{P}_N \mid p_i^\omega \geq p_i^{\omega'} \quad (\omega\subseteq\omega'\subseteq N)\}.$$

p_0 – некоторый фиксированный элемент из $\mathcal{P}_N$.

Независимость сохраняется и в том случае, когда условия $A(V_+)\subseteq R_+^N$ и $A(V_-)\subseteq R_-^N$ разделены и считаются отдельными аксиомами $A3'$ и $A3''$ соответственно. Здесь, как нетрудно проверить, нужными свойствами обладают отображения

$$A'_3(v) \triangleq \sum_{\omega\subseteq N} v_\omega^+ \cdot \Delta''_\omega - \sum_{\omega\subseteq N} v_\omega^- \cdot \Delta_\omega,$$

$$A''_3(v) \triangleq \sum_{\omega\subseteq N} v_\omega^+ \cdot \Delta_\omega - \sum_{\omega\subseteq N} v_\omega^- \cdot \Delta''_\omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко проверить, что отображение $I: v \to I(v)$, определенное на пространстве C классических кооперативных игр[*)], удовлетворяет всем условиям AI–A5, за исключением последнего. В дальнейшем (п.3) будет показано, что это естественное и, на первый взгляд, достаточно слабое требование сущест-

*) C – совокупность всех функций $v\in V$, удовлетворяющих условию супераддитивности $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)\quad (S\cap T=\varnothing)$.

венно сужает множество допустимых дележей.

Отметим некоторые свойства отображения A, вытекающие из A1–A5 (или непосредственно из формулы (2.1)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для всех $v \in V$ и $\pi \in \Pi(N)$ справедлива формула

$$A(\pi \circ v) = \pi \circ A(v), \tag{2.3}$$

где $\Pi(N)$ – совокупность всех перестановок N, $\pi \circ v(S) \triangleq v(\pi(S))$ $(S \subseteq N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $u, v \in V, \lambda \in R^1$. Тогда

1) $A(\lambda u) = \lambda A(u)$,

2) $A(u+v) \subseteq A(u) + A(v)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если среди носителей функций u, v найдутся непересекающиеся множества, то

$$A(u+v) = A(u) + A(v).$$

В частности, если i – "нейтральный" участник игры v (т.е. $v(\{i\} \cup S) = v(\{i\}) + v(S \setminus \{i\})$ $(S \subseteq N)$), то для любого $x \in A(v)$ имеет место равенство

$$x_i = v(\{i\}).$$

В заключение этой части отметим, что очевидная модификация аксиом A2, A3, A5 и условия (2.3) совпадает с аксиоматикой вектора Шепли $\Phi(v)$ из [6], основанной на формуле

$$\Phi(v) = y_v(p_\Phi),$$

где

$$(p_\Phi)_i^\omega = 1/|\omega| \qquad (i \in \omega \subseteq N).$$

3. Основное содержание этого пункта составляет описание многогранника $A(v)$ в форме неравенств. Интересно отметить, что это описание удается получить в теоретико-игровых терминах, а именно, в виде C-ядра соответствующей игры v_H. Здесь же уточняется строение множества $ex\,A(v)$ крайних точек $A(v)$. Основным инструментом в обоих случаях является теорема Шепли о крайних точках ядра выпуклой игры [8].

Введем необходимые обозначения. Пусть $S_1, \dots, S_m$ – попарно-непересекающиеся подмножества из N, $v \in V$. Положим

$$E_{S_1,\dots,S_m}=\{\omega\,|\,\omega\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}S_i,\ \omega\cap S_i\neq\varnothing\quad(i=1,\dots,m)\},$$

$$v_m(S_1,\dots,S_m)=\sum_{\omega\in E_{S_1,\dots,S_m}}v_\omega.$$

Отметим одно полезное для дальнейшего тождество:

$$E_{S_1,S_2\cup S_3}=E_{S_1,S_2}\cup E_{S_1,S_3}\cup E_{S_1,S_2,S_3},\qquad(3.1)$$

где S_1,S_2,S_3 – произвольная система попарно-непересекающихся множеств из N.

Основную роль в описании множества $A(v)$ играют вводимые ниже функции v_H и v^H. Пусть v – произвольная функция из V. Положим

$$v_H(S)=v(S)-v_2^-(S,N\setminus S),\qquad (S\subseteq N)$$
$$v^H(S)=v(S)+v_2^+(S,N\setminus S).^{*)}$$

Функции v_H и v^H связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$v^H(S)+v_H(N\setminus S)=v(N)\quad(S\subseteq N),\qquad(3.2)$$

$$v^H=-(-v)_H,\qquad(3.3)$$

$$v_H\leq v\leq v^H.\qquad(3.4)$$

(Неравенства в (3.4) поточечные.) В содержательном плане функция v^H (v_H) описывает максимальные (минимальные) возможности коалиций $S\subseteq N$ в условиях заданного в п.I механизма распределения величины $v(N)$ между участниками игры v. С формальной точки зрения они интересны тем, что обладают нужными свойствами выпуклости.

Переходя к доказательству соответствующего утверждения, напомним, что функция $v\in V$ называется выпуклой, если для всех $S,\ T\subseteq N$ выполняются неравенства

$$v(S\cup T)+v(S\cap T)\geq v(S)+v(T).$$

В случае, если выполняются противоположные неравенства, функцию v будем называть вогнутой.

---

*) Здесь и далее используются сокращения $v_m^+(S_1,\dots,S_m)=(v^+)_m(S_1,\dots,S_m)$, $v_m^-(S_1,\dots,S_m)=(v^-)_m(S_1,\dots,S_m)$.

ЛЕММА I. Какова бы ни была $\vartheta \in V$, функция ϑ_H выпуклая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S, T – произвольные подмножества N. Используя тождество

$$\vartheta(S \cup T) + \vartheta(S \cup T) = \vartheta(S) + \vartheta(T) + \vartheta_2(S \setminus T, T \cup S) + \vartheta_3(S \setminus T, T \setminus S, S \cap T), \quad (3.5)$$

перепишем нужное нам неравенство

$$\vartheta_H(S \cup T) + \vartheta_H(S \cap T) \geq \vartheta_H(S) + \vartheta_H(T) \quad (3.6)$$

в виде

$$\vartheta_2^-(S, N \setminus S) + \vartheta_2^-(T, N \setminus T) \geq \vartheta_2^-(S \cup T, N \setminus (S \cup T)) + \vartheta_2^-(S \cap T, N \setminus (S \cap T)) - \vartheta_2(S \setminus T, T \setminus S) - \vartheta_3(S \setminus T, T \setminus S, S \cap T).$$

Таким образом, для доказательства последнего достаточно установить неравенство

$$\vartheta_2^-(S, N \setminus S) + \vartheta_2^-(T, N \setminus T) \geq \vartheta_2^-(S \cup T, N \setminus (S \cup T)) + \vartheta_2^-(S \cap T, N \setminus (S \cap T)) + \vartheta_2^-(S \setminus T, T \setminus S) + \vartheta_3^-(S \setminus T, T \setminus S, S \cap T). \quad (3.7)$$

С этой целью покажем справедливость следующих соотношений:

$$\alpha_\omega^E \leq \alpha_\omega^F \qquad (\omega \in E), \quad (3.8)$$

где

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4,$$
$$F = F_1 \cup F_2,$$
$$E_1 = E_{S \setminus T, T \setminus S}, \; E_2 = E_{S \cup T, N \setminus (S \cup T)}, \; E_3 = E_{S \cap T, N \setminus (S \cap T)},$$
$$E_4 = E_{S \setminus T, T \setminus S, S \cap T},$$
$$F_1 = E_{S, N \setminus S}, \quad F_2 = E_{T, N \setminus T},$$
$$\alpha_\omega^E = |\{i \mid \omega \subseteq E_i\}|, \; \alpha_\omega^F = |\{i \mid \omega \in F_i\}| \qquad (\omega \subseteq N).$$

Итак, пусть ω – произвольный элемент из E. Непосредственно из определения множеств E_i, F_j и величин α_ω^E, α_ω^F вытекает, что $\alpha_\omega^E \leq 2$ $(\omega \in E)$ и при этом $\alpha_\omega^E = 1$ для $\omega \in E_1$. Поэтому для доказательства (3.8) достаточно проверить справедливость импликации

$$\alpha_\omega^E = 2 \Longrightarrow \alpha_\omega^F = 2 \qquad (\omega \in E). \quad (3.9)$$

Но $E_1 \cap E_i = \emptyset \ (i=2,3,4)$, $E_2 \cap E_4 = \emptyset$, что вместе с очевидными включениями $E_4 \subseteq E_1 \cap E_2$, $E_2 \cap E_3 \subseteq E_1 \cap F_2$ и дает требуемый эквивалент (3.9)

$$(E_2 \cap E_3) \cup (E_3 \cap E_4) \subseteq F_1 \cap F_2 .$$

Переходя к доказательству неравенства (3.7), заметим, что его левая и правая части равны $\sum_{\omega \in F} \alpha_\omega^F \cdot v_\omega^-$, $\sum_{\omega \in E} \alpha_\omega^E \cdot v_\omega^-$ соответственно. Отсюда, учитывая соотношения (3.8) и неотрицательность v_ω^-, получаем требуемое.

Из леммы I и равенства (3.3) вытекает

СЛЕДСТВИЕ I. Какова бы ни была $v \in V$, функция v^H вогнутая.

Основным результатом этой части является

ТЕОРЕМА 2. $A(v) = C(v_H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in A(v)$. Рассмотрим произвольное множество $S \subseteq N$. Поскольку $x_i = \sum_{\omega | i \in \omega} \rho_i^\omega \cdot v_\omega$ для некоторого $\rho \in \mathcal{P}_N$, то

$$x(S) = v(S) + \sum_{i \in S} \sum_{\omega \in E_{S, N \setminus S}} \rho_i^\omega \cdot v_\omega \geq$$

$$\geq v(S) - \sum_{i \in S} \sum_{\omega \in E_{S, N \setminus S}} \rho_i^\omega \cdot v_\omega^- \geq v_H(S).$$

Итак, ввиду произвольности $S \subseteq N$, $A(v)$ содержится в $C(v_H)$.

Для доказательства обратного включения воспользуемся выпуклостью и компактностью $A(v)$ и $C(v_H)$. Эти обстоятельства позволяют ограничиться установлением включения $ex\, C(v_H) \subseteq A(v)$. Так как в силу леммы I v_H – выпуклая функция, то на основании упоминавшейся теоремы Шепли всякий элемент $x \in ex\, C(v_H)$ представим в виде вектора v^π:

$$(v^\pi)_{i_{k+1}} = v_H(S_{k+1}^\pi) - v_H(S_k^\pi) \quad (k=0,1,\dots,n-1), \tag{3.10}$$

где $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ – некоторая перестановка множества N,

$S_0^\pi = \emptyset$, $S_k^\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$ $\quad (k=1,\dots,n)$.

Покажем, что элемент x, вычисленный по формуле (3.10), принадлежит $A(v)$. С этой целью заметим, что для каждого множества $S \subseteq N$, $r \notin S$ справедливо соотношение

$$v_H(S \cup \{r\}) - v_H(S) = v(\{r\}) + v_2^+(\{r\}, S) -$$

$$- v_2^-(\{r\}, N \setminus (S \cup \{r\})), \tag{3.11}$$

вытекающее из тождества (3.1) и основанного на нем равенства

$$v_2^-(S\cup\{r\}, N\setminus(S\cup\{r\})) = v_2^-(S, N\setminus(S\cup\{r\})) +$$
$$+ v_2^-(\{r\}, N\setminus(S\cup\{r\})) + v_3^-(S, \{r\}, N\setminus(S\cup\{r\})).$$

Учитывая, что $(v^{\pi})_{i_1} = v(\{i_1\}) - v_2^-(\{i_1\}, N\setminus\{i_1\})$, получаем совпадение вектора $y_v(\rho)$, определяемого коэффициентами

$$\rho^{\omega}_{i_{k+1}} = \begin{cases} 1, \ v_\omega \geq 0, \omega \subseteq S^{\pi}_{k+1} \ \text{или} \ v_\omega < 0, \omega \subseteq N\setminus S^{\pi}_{k}, \\ 0 \ \text{в остальный случаях} \end{cases}$$

$(k=0,1,\ldots,n-1)$, с рассматриваемым нами вектором v^{π}. Действительно, в проверке нуждается только корректность определения ρ ,т.е. тот факт, что $\sum_{j\in\omega} \rho_j^{\omega} = 1$ для всех $\omega \subseteq N$.Для этого достаточно рассмотреть два случая: I) $v_\omega \geq 0$ и 2) $v_\omega < 0$. Как вытекает непосредственно из определения величин $\rho^{\omega}_{i_{k+1}}$, в первом случае равен единице тот коэффициент $\rho^{\omega}_{i_{k+1}}$, для которого имеют место соотношения: $i_{k+1} \in \omega$, $i_{k'} \notin \omega$ $(k' > k+1)$, а во втором случае соответствующее j определяется из условия: $j = i_{k+1}$, где $i_{k'} \in \omega$ $(k' < k+1)$, $i_{k+1} \in \omega$. Другими словами, в зависимости от знака v_ω , эту величину забирает себе либо "старший", либо "младший" (в смысле порядка π) участник ω . Итак, $v^{\pi} \in A(v)$, что и завершает доказательство теоремы.

Из соотношения (3.2) и теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Для каждого $v \in V$ множество $A(v)$ представимо в виде

$$A(v) = \{x \in R^N \mid v_H(S) \leq x(S) \leq v^H(S) \quad (S \subseteq N).$$

Отметим еще, что в процессе доказательства теоремы 2 установлен следующий факт, представляющий и самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Крайние точки множества $A(v)$ исчерпываются распределениями $x \in A(v)$, получающимися в соответствии со следующим правилом:

I) назначается некоторая перестановка $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ участников игры v ;

2) для каждого $\omega \subseteq N$ величину v_ω получает тот из участников ω , который является первым $(v_\omega > 0)$ ли-

бо последним $(v_\omega \geq 0)$ в смысле порядка $\mathfrak{N}$ в объединении ω.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всех $v \in V$ справедлива оценка

$$|ex\, A(v)| \leq n!.$$

Рассмотрение игр $v \in V_+$ показывает, что оценка, указанная в следствии 3, точная[*)].

4. Как вытекает из определения $A(v)$, включение $A(v) \subseteq$ $\subseteq I(v)$ имеет место тогда и только тогда, когда $v_\omega \geq 0$ для всех ω таких, что $|\omega| \geq 2$. В остальных случаях $A(v)$ содержит и не индивидуально-рациональные дележи. С точки зрения классической теории кооперативных игр в такой ситуации естественно рассматривать соответствующую модификацию множества $A(\omega)$:

$$A^+(v) \triangleq A(v) \cap I(v).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элементы множества $A^+(v)$ будем называть H^+-дележами (или индивидуально-рациональными H-дележами) игры v.

Ниже дается критерий непустоты $A^+(v)$ и описание этого множества в форме неравенств.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы $A^+(v) \neq \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$v(S) + v_2^+(S, N \setminus S) \geq v_{(1)}(S) \quad (S \subseteq N). \tag{4.1}$$

При этом $A^+(v)$ представимо в виде

$$A^+(v) = C(u),$$

где u - некоторая выпуклая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A^+(v) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in A^+(v)$. На основании следствия 2 имеем

$$x(S) \leq v(S) + v_2^+(S, N \setminus S) \qquad (S \subseteq N).$$

Отсюда и из очевидных неравенств

$$x(S) \geq v_{(1)}(S) \qquad (S \subseteq N)$$

[*)] Априорная оценка, вытекающая непосредственно из формулы (2.1), имеет вид: $|ex\, A(v)| \leq \prod_{k=1}^{n} K^{C_n^k}$.

получаем требуемые соотношения (4.I).

Пусть теперь v удовлетворяет условию (4.I). Рассмотрим функцию $w = v - v_{(1)}$. В силу теоремы I, функция w_H выпуклая. Тогда выпуклой будет и ее верхняя монотонная огибающая

$$\bar{w}_H(S) \triangleq \max\{w_H(S') \mid S' \subseteq S\} \qquad (S \subseteq N).$$

Действительно, пусть S и T - произвольные множества из N и $\bar{w}_H(S) = w_H(S')$, $\bar{w}_H(T) = w_H(T')$, где S', T' - некоторые подмножества S и T соответственно. В силу выпуклости v_H,

$$\bar{w}_H(S) + \bar{w}_H(T) = w_H(S') + w_H(T') \le w_H(S' \cap T') + w_H(S' \cup T').$$

Отсюда и из определения монотонной огибающей

$$\bar{w}_H(S) + \bar{w}_H(T) \le \bar{w}_H(S \cap T) + \bar{w}_H(S \cup T),$$

что, ввиду произвольности S, T, и означает выпуклость $\bar{w}_H$.

Таким образом, на основании теоремы Шепли о непустоте ядра выпуклой игры, $C(\bar{w}_H) \neq \emptyset$. Но, как вытекает из (3.2), (4.I),

$$\bar{w}_H(N) = w_H(N).$$

Отсюда, учитывая тот факт, что $w(\{i\}) = 0$ для всех $i \in N$, имеем

$$C(\bar{w}_H) = C(w_H) \cap I(w).$$

Поэтому, в силу теоремы 2,

$$A^+(w) = C(\bar{w}_H). \qquad (4.2)$$

Для завершения доказательства непустоты $A^+(v)$ остается заметить, что

$$A^+(v) = v_{(1)} + A^+(w), \qquad (4.3)$$

откуда $A^+(v) = v_{(1)} + C(\bar{w}_H) \neq \emptyset$, что и требовалось установить.

Что касается последнего утверждения теоремы 3, то, учитывая (4.2), (4.3) и тот факт, что $v_{(1)} + C(\bar{w}_H) = C(v_{(1)} + \bar{w}_H)$, можно положить

$$u = v_{(1)} + \bar{w}_H.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 2 и непосредственно из определения H^+-дележей вытекает следующее представление:

$$A^+(v) = C(v'_H),$$

где

$$v'_H(S) = \begin{cases} v_H(S), & |S| \neq 1, \\ v(S), & |S| = 1. \end{cases}$$

Однако, в отличие от $u = v_{(1)} + \bar{w}_H^2$, функция v'_H, вообще говоря, невыпуклая.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если v удовлетворяет условию нормализации

$$v(\{i\}) = 0 \qquad (i \in N),$$

то функцию u, очевидно, можно задать по формуле

$$u(S) = \max\{v_H(S') \mid S' \subseteq S\} \qquad (S \subseteq N).$$

Более простой вид приобретает в этом случае и критерий непустоты $A^+(v)$. Именно, $A^+(v) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$v(S) + v_2^+(S, N \setminus S) \geq 0 \qquad (S \subseteq N)$$

или, что эквивалентно,

$$v(S) - v_2^-(S, N \setminus S) \leq v(N) \qquad (S \subseteq N).$$

В заключение приведем простое, но важное

СЛЕДСТВИЕ 4. Если v - классическая кооперативная игра, то $A^+(v) \neq \emptyset$.

ЛИТЕРАТУРА

I. AUMANN R.J. Values of markets with a continuum of trades. - Econometrica, 1975, v.43, p.611-646.
2. DUBEY P., WEBER J.R. Probabilistic values for games. - Cowles Foundation Discussion Paper, 1977, N 471.
3 DUBEY P., NEYMAN A., WEBER J.R. Value theory without efficiency. - Cowles Foundation Discussion Paper, 1979, N513.
4. ROTH A.E. The Shapley value as a von Neumann - Morgenstern utility. - Econometrica, 1977, v.45, p.657-664.
5. HARSANYI J.S. A bargaining model for the cooperative n - person game. - Ann.Math.Studies, N40, 1959, p.325-355.
6. ВАСИЛЬЕВ В.А. Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации. - Оптимизация, 1975, вып. I7(34), с.5-27.
7. ВАСИЛЬЕВ В.А., СКАРЛЫГИН А.В. Ядра некоторых классов игр

без побочных платежей. - Оптимизация. Наст. сб-к, с. 33-47.
8. SHAPLEY L.S. Cores of convex games. - Intern. J. Game Theory, 1971, N1, p.11-26.

Поступила в ред.-изд. отдел
I.IO.I979 г.