Выпуск 24 (4I) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 518.9

ЯДРА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИГР БЕЗ ПОБОЧНЫХ ПЛАТЕЖЕЙ

В.А.Васильев, А.В.Скарлыгин

Настоящая заметка непосредственно примыкает к статье [1], в которой одним из авторов предлагается общая характеристика H-дележей $A(\vartheta)$ кооперативной игры ϑ. Ниже изучаются максимальные H-дележи для некоторых естественных отношений доминирования в $A(\vartheta)$ и $A^+(\vartheta)$. В формальном плане полученные результаты дают условия непустоты и описание ядер нескольких классов кооперативных игр без побочных платежей. Таким образом, рассматриваемые задачи представляют интерес и в общем контексте теории игр без побочных платежей в связи с отсутствием конструктивных критериев непустоты ядра (см.[2,3]).

Работа состоит из 3-х частей. В первой части формулируется понятие H и H^+-ядра кооперативной игры. Вторая часть посвящена изложению вспомогательной конструкции, оказавшейся полезной при описании некоторых "экстремальных" точек множеств $A(\vartheta)$ и $A^+(\vartheta)$. Основные результаты содержатся в третьей части. Среди них следует отметить теорему 2, дающую не только критерий непустоты H-ядра $C_H(\vartheta)$ произвольной игры $\vartheta \in V$ но и полное описание последнего в терминах функции ϑ. Аналогичный результат для пространства классических кооперативных игр установлен и для H^+-ядра (предложение 5). Здесь, несмотря на существенное сужение множества классических дележей, ($A^+(\vartheta)$ составляет, как правило, лишь малую часть $I(\vartheta)$), $C_H^+(\vartheta)$ совпадает с обычным C-ядром игры ϑ. Полное описание класса игр, где имеет место совпадение $C_H^+(\vartheta)$ и $C(\vartheta)$, дает теорема 3. Вне этого клас-

са C-ядро является лишь собственным подмножеством $C_H^+(v)$. В частности, при естественных предположениях оказывается, что $C_H^+(v)$ содержит и более широкое классическое кооперативное ядро $C_k(v)$ (предложение 3).

В работе систематически используются обозначения статьи [1].

1. В дальнейшем имеется в виду следующий вариант определения игры без побочных платежей (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Игрой n лиц без побочных платежей будем называть точечно-множественное отображение V, сопоставляющее каждой коалиции $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ множество $V(S) \subseteq R^S$, удовлетворяющее следующим условиям [ж]:

1) $V(\emptyset) = \emptyset$;

2) $V(S)$ замкнуто;

3) если $x \in V(S), y \in R^S$ и $y \leq x$, то $y \in V(S)$.

На множестве $V(N)$ вводится отношение доминирования $\succ$:

$$x \succ y \iff \exists S \subseteq N \, [x^S \in V(S)) \,\&\, (x_i > y_i \quad (i \in S))].$$

(Здесь через x^S обозначается сужение x на S.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ядром $C(V)$ игры V называется множество недоминируемых (максимальных) элементов $(V(N), \succ)$:

$$C(V) \triangleq \{x \in V(N) \mid \forall y \in V(N) \, (y \not\succ x)\}.$$

Интересующие нас максимальные H-дележи игры v определяются как недоминируемые элементы конструируемых ниже игр без побочных платежей. Последние определяются в соответствии с формулами

$$V_v(S) = A_v(S) - R_+^S, \qquad (S \subseteq N) \tag{1.1}$$

$$V_v^+(S) = A_v^+(S) - R_+^S, \tag{1.2}$$

где $R_+^S \triangleq \{x \in R^S \mid x_i \geq 0 \ (i \in S)\}$, $A_v(S) \triangleq A(v^S)$, $A_v^+(S) \triangleq A^+(v^S)$, v^S – сужение игры $v \in V$ на 2^S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $H(H^+)$-ядром игры $v \in V$ будем называть ядро $C(V_v)\,(C(V_v^+))$ игры $V_v\,(V_v^+)$, задаваемой в соответствии с формулами (1.1), (1.2) соответственно.

[ж] Под R^S понимается векторное пространство всех вещественнозначных функций на множестве S и, как обычно, вводится обозначение $x_i \triangleq x(i) \quad (x \in R^S, \ i \in S)$.

Ядра $C_H(v)=C(U_v)$, $C_H^+(v)=C(U_v^+)$, как показывается далее, тесно связаны с так называемым C-ядром $C(v)$ и классическим ядром $C_k(v)$ игры v:

$$C(v) \triangleq \{x \in I(v) \mid x(S) \geq v(S) \quad (S \subseteq N)\},$$

$$C_k(v) \triangleq \{x \in I(v) \mid \forall y \in I(v) \quad (y \not>_k x)\},$$

где

$$I(v) \triangleq \{x \in R^N \mid x(N)=v(N),\ x_i \geq v(\{i\}) \ (i \in N)\},$$

$$x >_k y \Longleftrightarrow \exists S \subseteq N [(x(S) \leq v(S)) \& (x_i > y_i \ (i \in S))].$$

Нам понадобится критерий непустоты $C(v)$, установленный в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. Игра $v \in V$ называется сбалансированной, если для всякого набора неотрицательных вещественных чисел λ_S $(S \subseteq N)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{S \mid i \in S} \lambda_S = 1 \quad (i \in N),$$

выполняется неравенство

$$\sum_{S \subseteq N} \lambda_S \cdot v(S) \leq v(N).$$

ТЕОРЕМА I [4]. $C(v) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда v сбалансированная.

Наконец, напомним еще понятие Н - М-решения (решения Неймана - Моргенштерна), используемое в п.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [2]. Подмножество $X \subseteq U(N)$ называется Н - М-решением игры U без побочных платежей, если выполняются следующие условия:

I) $\forall x, y \in X \quad (x \not> y)$ (внутренняя устойчивость);

2) $\forall x \in U(N) \setminus X \ \exists y \in X \ (y > x)$ (внешняя устойчивость).

2. Важную роль в исследовании максимальных H-дележей играет излагаемая ниже вспомогательная конструкция, представляющая и самостоятельный интерес.

Зафиксируем какое-нибудь конечное множество T. Пусть x, y - произвольные элементы из R^T, S - некоторое подмножество T. Введем обозначения

$$J_y^-(S,x) \triangleq \{i \in S \mid y_i < x_i\},$$

$$J_y^+(S,x) \triangleq \{i \in S \mid y_i > x_i\},$$

$$J_y^0(S,x) \triangleq \{i \in S \mid y_i = x_i\},$$

$$\mathfrak{F}_y(S,x) \triangleq J_y^0(S,x) \cup J_y^-(S,x).$$

Рассмотрим произвольный компакт $K \subseteq R^T$. Для каждого $x \in R^T$ и $S \subseteq T$ под $W(K,S,x)$ будем понимать совокупность всех элементов $y \in K$ таких, что

$$|J_y^-(S,x)| \leq |J_{y'}^-(S,x)|$$

для всех $y' \in K$.

Положим

$$\widetilde{W}(K,S,x) \triangleq \{y \in W(K,S,x) \mid y(J_y^-(S,x)) \geq y'(J_{y'}^-(S,x))(y' \in W(K,S,x))\}$$

и через $Q(K,S,x)$ обозначим совокупность всех $y \in \widetilde{W}(K,S,x)$ таких, что

$$|J_y^0(S,x)| \leq |J_{y'}^0(S,x)|$$

для всех $y' \in \widetilde{W}(K,S,x)$.

Всюду в дальнейшем будем пользоваться сокращениями $J_y^-, J_y^+, J_y^0, J_y, W, \widetilde{W}, Q$, опуская соответствующие символы K, S, x, понятные из контекста.

Существование "экстремального множества" Q устанавливает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любого непустого компакта $K \subseteq R^T$ и для всех $x \in R^T$, $S \subseteq T$ множество $Q(K,S,x)$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторые K, S и x, удовлетворяющие условиям предложения I.

Так как $K \neq \phi$, то, в силу построения, непусто также и множество W. Введем на W отношение эквивалентности

$$y \sim z \iff J_y^- = J_z^- \qquad (y, z \in W).$$

Этим отношением W разбивается на некоторое конечное число классов эквивалентности $W_1, \ldots, W_r$. Убедимся в том, что каждый такой класс W_j есть компакт. Пусть $y^m \to y$ и $y^m \in W_j$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ Положим $J = J_x^- (x \in W_j)$. Поскольку $y \in K$ и $W_j \subseteq W$, имеем: $|J| \leq |J_y^-|$. С другой стороны, ясно, что $J_y^- \subseteq J$. Поэтому $J_y^- = J$, что ввиду произвольности $\{y^m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq W$ и означает компактность всех рассматриваемых классов эквивалентности W_j $(j = 1, \ldots, r)$.

Определим на W функцию φ, полагая

$$\varphi(y) \triangleq y(J_y^-).$$

Обозначим через φ_j $(j = 1, \ldots, r)$ сужение этой функции на W_j

и убедимся в том, что все функции φ_j непрерывны. Действительно, так как $J_y^- = J_z^- = J$ для всех $y, z \in W_j$, имеем

$$|\varphi_j(y) - \varphi_j(z)| \le \sum_{i\in J} |y_i - z_i| \le \sum_{i\in N} |y_i - z_i|.$$

Таким образом, $|\varphi_j(y) - \varphi_j(z)| \le \rho(y,z)$, где $\rho(y,z) = \sum_{i\in N} |y_i - z_i|$, что и означает непрерывность φ_j.

Далее, поскольку компакты W_j $(j=1,\dots,z)$ попарно не пересекаются, из вышесказанного вытекает непрерывность функции φ. Отсюда, в силу определения φ и компактности K, следует непустота и компактность $\widetilde{W}$. Непустота множества Q вытекает теперь непосредственно из определения, ч.т.д.

Ниже предполагается, что $T \subseteq N$, и в качестве компакта K рассматривается, в основном, множество вида $A_v(T)$ или $A_v^+(T)$. В случае, когда $T = S$, будем использовать сокращения
$Q(v,S,x) \triangleq Q(A_v(T),S,x)$, $Q^+(v,S,x) \triangleq Q(A_v^+(T),S,x)$.
Нам потребуются еще некоторые вспомогательные обозначения. Для каждых $v \in V$, $S \subseteq N$ и $y \in A_v(S)$ положим

$$p_v(y) = \{p \in \mathcal{P}_S \mid y_i = \sum_{\omega | i\in\omega} p_i^\omega \cdot v_\omega \quad (i \in S)\},$$

где

$$\mathcal{P}_S \triangleq \{[p_i^\omega]_{i\in\omega}^{\omega\subseteq S} \mid p_i^\omega \in R_+^1, \sum_{i\in\omega} p_i^\omega = 1 \quad (\omega \subseteq S)\}.$$

Из определения $A(v)$ ясно, что $p_v(y) \ne \emptyset$ для всех $y \in A_v(S)$. Содержательно множество $p_v(y)$ описывает совокупность всевозможных распределений величин v_ω $(\omega \subseteq S)$, дающих в итоге дележ y. Иногда нас будут интересовать конкретные представления $y \in A_v(S)$. В этих случаях естественно рассматривать функцию $p \mapsto y_v(p)$ $(p \in \mathcal{P}_S)$, определенную по формуле

$$(y_v(p))_i = \sum_{\omega | i\in\omega} p_i^\omega \cdot v_\omega \quad (i \in S).$$

Опишем некоторые свойства множеств $p_v(y)$ для $y \in Q(v,S,x)$.

ЛЕММА 1. Пусть $p \in p_v(y)$ для некоторого $y \in A_v(S)$. Если $y \in Q(v,S,x)$, то $p_i^\omega = 0$ для всех i,ω, удовлетворяющих одному из перечисленных условий:

а) $i \in \omega \cap J_y^+$, $\omega \cap \mathcal{J}_y \ne \emptyset$, $v_\omega^+ > 0$;

б) $i \in \omega \cap \mathcal{J}_y$, $\omega \cap J_y^+ \ne \emptyset$, $v_\omega^- > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in Q(v,S,x)$, а p - произвольный элемент из $p_v(y)$. Покажем, что $p_i^\omega = 0$ для всех i,ω, удов-

летворяющих условию а). В самом деле, пусть $p_{i_0}^{\omega_0}>0$ для некоторого $i_0\in\omega_0\cap J_y^+$ и при этом $\omega_0\cap\mathfrak{F}_y\neq\emptyset$ и $v_{\omega_0}^+>0$. Выбирая некоторое $j_0\in\omega_0\cap\mathfrak{F}_y$ и полагая

$$\tilde{p}_i^\omega=\begin{cases} p_{i_0}^{\omega_0}-\varepsilon, & i=i_0,\ \omega=\omega_0,\\ p_{j_0}^{\omega_0}+\varepsilon, & i=j_0,\ \omega=\omega_0,\\ p_i^\omega & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

при достаточно малом $\varepsilon>0$ получаем дележ $\tilde{y}=y_v(\tilde{p})$ из $A_v(S)$, удовлетворяющий условиям: $J_y^+\subseteq J_{\tilde{y}}^+$, $J_y^-=J_{\tilde{y}}^-$. Поэтому, если $j_0\in J_y^-$, то $\tilde{y}(J_{\tilde{y}}^-)>y(J_y^-)$. Но это противоречит включению $y\in\widetilde{W}$. Если же $j_0\in J_y^0$, то $|J_{\tilde{y}}^0|<|J_y^0|$, $\tilde{y}\in\widetilde{W}$. В то же время, по условию, $y\in Q(v,S,x)$. Итак, допущение $p_{i_0}^{\omega_0}>0$ противоречит условиям леммы, что ввиду произвольности i_0,ω_0 и доказывает справедливость ее заключения для случая а).

Пусть теперь в условиях леммы i_0,ω_0 таковы, что $i_0\in\omega_0\cap\mathfrak{F}_y$, $\omega_0\cap J_y^+\neq\emptyset$, $v_{\omega_0}^->0$ и $p_{i_0}^{\omega_0}>0$. Выберем некоторое $j_0\in\omega_0\cap J_y^+$, $\varepsilon>0$ и положим

$$\hat{p}_i^\omega=\begin{cases} p_{i_0}^{\omega_0}-\varepsilon, & i=i_0,\ \omega=\omega_0,\\ p_{j_0}^{\omega_0}+\varepsilon, & i=j_0,\ \omega=\omega_0,\\ p_i^\omega & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

При достаточно малом ε получаем дележ $\hat{y}=y_v(\hat{p})$ из $A_v(S)$ такой, что $J_y^+\subseteq J_{\hat{y}}^+$, $J_y^-=J_{\hat{y}}^-$. Поэтому, если $i_0\in J_y^-$, то $\hat{y}(J_{\hat{y}}^-)>y(J_y^-)$, что противоречит условию $y\in\widetilde{W}$. Если же $i_0\in J_y^0$, то $|J_{\hat{y}}^0|<|J_y^0|$. Отсюда, учитывая, что $\hat{y}(J_{\hat{y}}^-)=y(J_y^-)$, $J_{\hat{y}}^-=J_y^-$, получаем, вопреки условию, $y\notin Q(v,S,x)$. Итак, $p_i^\omega=0$ для всех i,ω, удовлетворяющих условию б), что и завершает доказательство леммы I.

Используя лемму I, дадим одну характеристику элементов из $Q(v,S,x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $S\subseteq N$, $x\in R^S$, $y\in Q(v,S,x)$ имеет место равенство

$$y(\mathfrak{F}_y)=v(\mathfrak{F}_y)+v_2^+(\mathfrak{F}_y,J_y^+). \tag{2.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y\in Q(v,S,x)$. Рассмотрим произвольный элемент $p\in P_v(y)$. Тогда $y=y_v(p)$ и

$$y(\mathfrak{F}_y)=\sum_{i\in\mathfrak{F}_y}\sum_{\omega\in\mathfrak{F}_y}p_i^\omega\cdot v_\omega+$$
$$+\sum_{i\in\mathfrak{F}_y}\sum_{\omega|J_y^+\cap\omega\neq\emptyset}p_i^\omega\cdot v_\omega^+-\sum_{i\in\mathfrak{F}_y}\sum_{\omega|J_y^+\cap\omega\neq\emptyset}p_i^\omega\cdot v_\omega^-. \tag{2.2}$$

Ясно, что первая сумма в правой части (2.2) равна $v(\mathcal{J}_y)$. Далее, в силу леммы I, $\sum_{i\in\mathcal{J}_y}\sum_{\omega|J_y^+\cap\omega\neq\emptyset} p_i^{\omega}\cdot v_{\omega}^- = 0$. Из этой же леммы вытекают равенства $\sum_{i\in\omega\cap\mathcal{J}_y} p_i^{\omega}=1$, справедливые для всех ω таких, что $v_{\omega}^+>0$. Поэтому $\sum_{i\in\mathcal{J}_y}\sum_{\omega|J_y^+\cap\omega\neq\emptyset} p_i^{\omega}\cdot v_{\omega} = v_2^+(\mathcal{J}_y, J_y^+)$. В итоге получаем искомую формулу для $y(\mathcal{J}_y)$, ч.т.д.

Поскольку $y(S)=v(S)$ и $v(S)=v(\mathcal{J}_y)+v(J_y^+)+v_2(\mathcal{J}_y, J_y^+)$, справедливо

СЛЕДСТВИЕ I. В условиях предложения 2 выполняется равенство

$$y(J_y^+)=v(J_y^+)-v_2^-(\mathcal{J}_y, J_y^+). \qquad (2.3)$$

Анализируя доказательства леммы I и предложения 2, нетрудно убедиться в том, что при естественных ограничениях на x формулы (2.I) и (2.3) имеют место и для $y\in Q^+(v,S,x)$. В частности, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $A_v^+(S)\neq\emptyset$. Если $x\in I(v^S)$, то формулы (2.I) и (2.3) верны и для всякого $y\in Q^+(v,S,x)$.

В заключение этого пункта приведем один вариант предложения 2 для специальных подмножеств $A_v(N)$. Пусть $v, S, z\in A_v(S)$ произвольны. Зафиксируем некоторое $\bar{p}\in p_v(z)$ и положим

$$A_v^z(N)\triangleq\{y_v(p)\,|\,p\in\mathcal{P}_N,\ p_i^{\omega}=\bar{p}_i^{\omega}(i\in\omega\subseteq S),\ p_i^{\omega}=0\ (i\in S, \omega\cap N\setminus S\neq\emptyset)\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых $x\in R^N$ и $y\in Q(A_v^z(N), N\setminus S, x)$ имеет место неравенство

$$y(J_y^+)\leq v(J_y^+\cup S)-v(S). \qquad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y – произвольный элемент из $Q(A_v^z(N), N\setminus S, x)$. Согласно построению $A_v^z(N)$, найдется $p\in p_v(y)$, у которого $p_i^{\omega}=0$ для всех $i\in S$ и ω таких, что $\omega\cap N\setminus S\neq\emptyset$. Для этого p справедливо равенство

$$y(J_y^+)=[v(J_y^+\cup S)-v(S)]+\sum_{i\in J_y^+}\sum_{\omega\cap J_y^0\neq\emptyset} p_i^{\omega}\cdot v_{\omega}^+ +$$

$$+\sum_{i\in J_y^+}\sum_{\omega\cap J_y^0=\emptyset,\ \omega\cap J_y^-\neq\emptyset} p_i^{\omega}\cdot v_{\omega}, \qquad (2.5)$$

вытекающее непосредственно из представления $y=y_v(p)$ и из тождества

$$\sum_{\omega\subseteq J_y^+\cup S|\omega\cap J_y^+\neq\emptyset} v_{\omega}=v(J_y^+\cup S)-v(S).$$

Далее, повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы I (условие а), убеждаемся в том, что $\rho_i^\omega = 0$ и для всех i,ω, удовлетворяющих требованию: $i \in \omega \cap J_y^+$, $\omega \cap \mathcal{J}_y \neq \phi$, $v_\omega^+ > 0$. Поэтому, обозначая через α_2 и α_3 второе и третье слагаемые в правой части (2.5), имеем

$$\alpha_2 = -\sum_{i \in J_y^+} \sum_{\omega \cap J_y^\circ \neq \phi} \rho_i^\omega \cdot v_\omega^- ,$$

$$\alpha_3 = -\sum_{i \in J_y^+} \sum_{\omega \cap J_y^\circ = \phi,\ \omega \cap J_y^- \neq \phi} \rho_i^\omega \cdot v_\omega^- .$$

Итак, $\alpha_2 + \alpha_3 \leq 0$, откуда и вытекает требуемое неравенство (2.4).

3. Ключевую роль в описании ядер $C(U_v)$ и $C(U_v^+)$ играет следующая

ЛЕММА 2. Пусть $x \notin C(v)$. Тогда найдутся $S \subseteq N$ и $y \in A_v(S)$ такие, что

$$x_i < y_i \quad (i \in S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x \notin C(v)$, то множество $\mathcal{T} = \{T \subseteq N \mid x(T) < v(T)\}$ непусто. Поскольку $\mathcal{T}$ конечно, оно содержит некоторый минимальный (по включению) элемент S. Рассмотрим вместе с S произвольный элемент $y \in Q(v, S, x)$ и покажем, что они удовлетворяют заключению леммы 2. Действительно, по лемме I имеем

$$y(J_y^+) = v(J_y^+) - v_2^-(J_y^+, \mathcal{J}_y) \leq v(J_y^+). \qquad (3.I)$$

С другой стороны, в силу определения множества J_y^+, справедливо неравенство

$$y(J_y^+) > x(J_y^+).$$

Отсюда, учитывая (3.I) и минимальность S, получаем

$$J_y^+ = S.$$

Но это, наряду с включением $y \in A_v(S)$, и означает требуемое.

Переходя к непосредственному изучению ядер $C(U_v)$, $C(U_v^+)$, отметим еще следующие включения:

$$C(v) \subseteq C(U_v) \subseteq C(U_v^+) \qquad (v \in V). \qquad (3.2)$$

Первое из них вытекает непосредственно из неравенств

$$x(S) \leq v(S) \qquad (v \in V,\ x \in U_v(S),\ S \subseteq N)$$

и соотношения

$$C(v) \subseteq A^+(v) \qquad (v \in V) \qquad (3.3)$$

([5], предложение 3.I).

Второе – следствие включения $U_v^+ \subseteq U_v$ $(v \in V)$.

Таким образом, если v сбалансированная, то, в силу (3.2) и теоремы I, $C(U_v) \neq \emptyset$ и $C(U_v^+) \neq \emptyset$. Оказывается, что для игр U_v справедливо и обратное. Более точно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. $C(U_v) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда v сбалансированная. При этом

$$C(U_v) = C(v). \tag{3.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность сбалансированности v для непустоты $C(U_v)$ уже отмечалась. Установим остальные утверждения теоремы. Итак, пусть v – произвольная функция из V такая, что $C(U_v) \neq \emptyset$. Покажем, что $C(U_v) \subseteq C(v)$. С этой целью выберем произвольный элемент $x \in C(U_v)$. Допуская, что $x \notin C(v)$, найдем, на основании леммы 2, коалицию $S \subseteq N$ и $y \in A_v(S)$ такие, что

$$x_i < y_i \quad (i \in S). \tag{3.5}$$

Рассмотрим произвольный вектор $z \in A_v^y(N)$. В силу построения, $z \in A_v(N)$ и $z^S = y \in U_v(S)$. Это вместе с (3.5) дает соотношение $z \succ x$, что противоречит включению $x \in C(U_v)$. Таким образом, включение $C(U_v) \subseteq C(v)$ справедливо, что наряду с (3.2) и непустотой $C(U_v)$ и дает требуемые равенство (3.4) и сбалансированность v.

В отличие от игр U_v, условие сбалансированности, являясь достаточным, уже не будет необходимым условием непустоты $C(U_v^+)$. Тем не менее, и здесь сбалансированность является критерием того, что $C(U_v^+)$, будучи непусто, совпадает с $C(v)$.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы $C(U_v^+) \neq \emptyset$ и $C(U_v^+) = C(v)$, необходимо и достаточно, чтобы v была сбалансированной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из критерия непустоты $C(v)$. Что касается достаточности, то ее проверку проведем сначала для случая, когда $v_{(1)} = 0$. Итак, пусть v сбалансированная и $v_{(1)} = 0$. В силу теоремы I, $C(v) \neq \emptyset$. Поэтому, учитывая соотношение (3.2), для наших целей достаточно установить, что $C(U_v^+) \setminus C(v) = \emptyset$. Допустим противное и выберем произвольный элемент $y \in C(U_v^+) \setminus C(v)$. На основании леммы 2 найдутся $S \subseteq N, z \in A_v(S)$, удовлетворяющие условию $y_i < z_i$ $(i \in S)$. Рассмотрим какой-нибудь $\tilde{y}$ из $Q(A_v^z(N), N \setminus S, 0)$. В силу

предложения 4, имеет место неравенство

$$\tilde{y}(J_{\tilde{y}}^{+}) \le v(J_{\tilde{y}}^{+} \cup S) - v(S).$$

Далее, так как $\tilde{y}(S) = z(S) = v(S)$, то

$$\tilde{y}(J_{\tilde{y}}^{-}) = \tilde{y}(N) - \tilde{y}(J_{\tilde{y}}^{+}) - \tilde{y}(J_{\tilde{y}}^{0}) - \tilde{y}(S) \ge$$
$$\ge v(N) - v(J_{\tilde{y}}^{+} \cup S).$$

Отсюда, учитывая тот факт, что $v_{(1)} = 0$, имеем

$$\tilde{y}(J_{\tilde{y}}^{-}) \ge v(N) - v(J_{\tilde{y}}^{+} \cup S) - v_{(1)}(J_{\tilde{y}}^{-}). \qquad (3.6)$$

Ввиду сбалансированности v правая часть неравенства (3.6) неотрицательна. Значит, $\tilde{y}(J_{\tilde{y}}^{-}) \ge 0$ и, следовательно, $J_{\tilde{y}}^{-} = \emptyset$. Отсюда, привлекая соотношение $\tilde{y}^{S} = z$, имеем

$$\tilde{y} \in A_{v}^{+}(N), \; \tilde{y}^{S} \in A_{v}^{+}(S), \; \tilde{y}_i > y_i \qquad (i \in S).$$

Но это противоречит предположению $y \in C(V_{v}^{+})$. Итак, в случае, когда $v_{(1)} = 0$, требуемое равенство установлено.

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть v – произвольная функция из V. Не останавливаясь на рутинной проверке, отметим, что для любой аддитивной функции $w \in V$ имеют место равенства

$$A_{v'}^{+}(S) = w^{S} + A_{v}^{+}(S) \quad (S \subseteq N),$$

где $v' = w + v$. Поэтому $U_{v'}^{+}(S) = w^{S} + U_{v}^{+}(S)$ для всех $S \subseteq N$. Отсюда и непосредственно из определения доминирования получаем

$$C(U_{v'}^{+}) = w + C(U_{v}^{+}). \qquad (3.7)$$

С другой стороны, как нетрудно проверить,

$$C(v') = w + C(v). \qquad (3.8)$$

Рассматривая в качестве v произвольную сбалансированную функцию и выбирая $w = -v_{(1)}$, по уже доказанному получим: $C(v') = C(U_{v'}^{+})$. Следовательно, учитывая (3.7) и (3.8), $C(U_{v}^{+}) = C(v)$, что и требовалось доказать.

Анализируя доказательство теоремы 3, легко обнаружить, что для справедливости включения $C(U_{v}^{+}) \subseteq C(v)$ достаточно выполнения условия

$$v(S) + v_{2}(S, N \setminus S) \ge v_{(1)}(S), \qquad (3.9)$$

существенно более слабого, нежели сбалансированность v. Поэтому в любом пространстве функций, удовлетворяющих (3.9), сбалансированность является уже критерием непустоты $C(U_{v}^{+})$. К

последним, очевидно, относится и пространство C классических кооперативных игр ж). Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $v \in C$. Для того чтобы $C(U_v^+) \neq \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы v была сбалансированная. При этом

$$C(U_v^+) = C(v).$$

Простые примеры показывают, что ядро $C(U_v^+)$ может быть непусто и для игр, не удовлетворяющих условию (3.9). Возникающие в связи с этим обстоятельством вопросы выходят за рамки настоящей статьи. Здесь мы ограничимся лишь установлением того факта, что игр, имеющих непустое ядро $C(U_v^+)$, в известном смысле не меньше, чем тех, для которых $C_k(v) \neq \emptyset$. Именно, справедливо следующее усиление теоремы 3 (по части условий непустоты $C(U_v^+)$).

ТЕОРЕМА 4. Если $A_v^+(N) \neq \emptyset$, то $C_k(v) \subseteq C(U_v^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – произвольная функция из V. Нетрудно проверить, что для любой аддитивной функции w имеет место равенство

$$C_k(v') = w + C_k(v), \tag{3.10}$$

где $v' = w + v$. Учитывая (3.10) и соотношение (3.7), убеждаемся в том, что интересующий нас факт достаточно установить для таких v, у которых $v_{(1)} = 0$. Итак, пусть $v \in V$ такова, что $A_v^+(N) \neq \emptyset$ и $v_{(1)} = 0$. Ясно, что если $v(N) = 0$, то $C_k(v) = C(U_v^+) = \{0\}$. Поэтому в доказательстве нуждается лишь случай, когда $v(N) > 0$ и $C_k(v) \neq \emptyset$. Допустим, что в этой ситуации существует $x \in C_k(v) \setminus C(U_+^v)$. Заметим, что

$$x(S) \geq \tilde{v}(S) \qquad (S \subseteq N),$$

где

$$\tilde{v}(S) = \min\{v(S), v(N)\} \qquad (S \subseteq N).$$

В самом деле, рутинная проверка показывает, что если функция

ж) Напомним (см.[6]), что это пространство определяется как совокупность всех $v \in V$, удовлетворяющих условию супераддитивности

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad (S, T \subseteq N,\ S \cap T = \emptyset).$$

v такова, что $v_{(1)} = 0$, то

$$C_k(v) = C(\tilde{v}). \qquad (3.11)$$

Поэтому $x(S_0) = v(N)$, где $S_0 \triangleq \bigcap_{S | v(S) \geq v(N)} S$. Действительно, если $i \in N \setminus S_0$, то найдется S такое, что $i \notin S$ и $v(S) \geq v(N)$. Отсюда, в силу (3.11), $x(S) = v(N)$ и, стало быть, $x_i = 0$. Но ввиду произвольности $i \in N \setminus S_0$ это и означает, что $v(N) = x(S_0) + x(N \setminus S_0) = x(S_0)$, причем $S_0 \neq \emptyset$.

Рассмотрим теперь некоторый $y \in Q^+(v; N, x)$. Так как $x \in I(v)$, то, в силу предложения 3, имеем: $y(J_y^+) = v(J_y^+) - v_2^-(J_y^+, N \setminus J_y^+)$. Отсюда, учитывая (3.11) и то, что $x(J_y^+) < y(J_y^+)$, получаем: $v(J_y^+) \geq v(N)$. Значит, $S_0 \subseteq J_y^+$, откуда $y(S_0) > x(S_0) = v(N)$. Но это противоречит включению $y \in A_v^+(N)$. Следовательно, допущение $C_k(v) \setminus C(U_v^+) \neq \emptyset$ неверно, что и означает справедливость теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Поскольку $C(v) \subseteq C_k(v)$ и $C(v) \subseteq A(v)$ для всех $v \in V$, теорема 4 является также усилением предложения 3.1 из [5]. Условие $A_v^+(N) \neq \emptyset$ существенно, как показывает следующий пример:

$$N = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$v_\omega = \begin{cases} -1, & \omega = \{1, 2\}, \\ 1, & \omega = \{3, 4\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $C_k(v) = \{0\} \neq \emptyset$. В то же время, как нетрудно проверить, $A_v^+(N) = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Легко проверить, что описываемый теоремой 4 класс игр, имеющих непустое ядро $C(U_v^+)$, отнюдь не исчерпывается сбалансированными в смысле Скарфа функциями U_v^+ . Более того, приводимый ниже пример показывает, что существуют не $b^{(S)}$-сбалансированные ни при каких $b^{(S)}$ $(S \subseteq N)$ игры U_v^+ , для которых $C_k(v) \neq \emptyset$:

$$N = \{1, 2, 3\},$$

$$v_\omega = \begin{cases} 1, & \omega' = \{1, 2, 3\}, \\ -1, & \omega = \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ж) Определение сбалансированности по Скарфу и $b^{(S)}$-сбалансированности см. в [3].

Ясно, что здесь $C_k(v)=C(U_v^+)=\{0\}\neq\phi$. Допустим, что U_v^+ – $b^{(S)}$-сбалансированная функция при некоторых $b^{(S)}$ $(S\subseteq N)$. Тогда должно быть $b^{(S)}$-сбалансированным одно из семейств (\{1,2\},\{1\},\{3\}), (\{1,2\},\{2\},\{3\}), (\{1,2\},\{3\}). Стало быть, один из векторов ($^1/_3$, 0,0), (0,$^1/_3$, 0) должен принадлежать $U_v^+(N)$. Но это невозможно, так как $U_v^+(N)=\{x\in R^3 \mid x_i\le 0 \ \ (i=1,2,3)\}$.

В заключение отметим одно важное свойство ядер $C(U_v)$ и $C(U_v^+)$ в случае, когда v – выпуклая функция. Оказывается, что здесь, как и для выпуклых игр с побочными платежами, ядро является единственным Н – М-решением. Именно, справедлив следующий аналог теоремы Шепли [7].

ТЕОРЕМА 5. Если v - выпуклая функция, то $C(U_v)$ является Н – М - решением игры U_v. Других Н – М - решений игра U_v не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ядро содержится в каждом Н – М - решении (если таковые существуют), то для доказательства теоремы 5 достаточно установить, что $C(U_v)$ является Н – М -решением. Итак, Пусть v – выпуклая функция. Как показано в [7], в этом случае $C(v)\neq\phi$. Значит, v сбалансированная и поэтому, в силу теоремы 2, $C(U_v)\neq\phi$ и $C(U_v)=C(v)$. Ясно, что $C(U_v)$ внутренне устойчиво. Покажем, что имеет место и внешняя устойчивость. Пусть x – произвольный элемент из $U_v(N)\setminus C(U_v)$. Так как $x\notin C(v)$, то, в силу леммы 2, найдется $S_0\subseteq N$ и $z\in A_v(S_0)$ такие, что $z_i>x_i$ $(i\in S_0)$. Занумеруем произвольным образом элементы из $N\setminus S_0=\{i_1,\dots,i_{|N\setminus S_0|}\}$ и рассмотрим вектор y с компонентами

$$y_j=\begin{cases} z_j, & j\in S_0,\\ \sum_{\omega \mid j\in\omega\subseteq T_j} v_\omega, & j\in N\setminus S_0,\end{cases}$$

где $T_j=S_0\cup\{i_1,\dots,i_{n(j)}\}$, а $n(j)$ – номер j в заданном упорядочении $N\setminus S_0$.

Установим принадлежность $y\in C(v)$. Пусть S – произвольное подмножество N. Поскольку $y^{S_0}=z$, имеем: $y(S)=z(S\cap S_0)+$ $+y(S\cap(N\setminus S_0))$. Отсюда

$$y(S)\ge v(S\cap S_0)+\sum_{k\in S\cap(N\setminus S_0)}\ \sum_{\omega \mid k\in\omega\subseteq T_k} v_\omega. \qquad (3.12)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что второе слагаемое в правой части (3.12) равно $\vartheta(T_{i_{m(S)}})-\vartheta(T_{i_{m(S)}}\setminus(S\setminus S_0))$, где $m(S)$ определяется из условия: $i_{m(S)}\in S\setminus S_0$, $i_k\notin S\setminus S_0$ $(k>m(S))$. Далее, в силу выпуклости ϑ, имеем

$$\vartheta(T_{i_{m(S)}})-\vartheta(T_{i_{m(S)}}\setminus(S\setminus S_0))\geq\vartheta(S_0\cup S)-\vartheta(S_0).$$

Поэтому, учитывая (3.12) и еще раз воспользовавшись выпуклостью ϑ, получаем: $y(S)\geq\vartheta(S)$. Ввиду произвольности $S\subseteq N$ для завершения доказательства включения $y\in C(\vartheta)$ осталось заметить, что $x(S_0)=\vartheta(S_0)$ и $T_{i_{m(N)}}=N$, откуда $y(N)=\vartheta(N)$.

Итак, $y\in C(\vartheta)$ и в силу построения $y\succ x$, что и завершает доказательство внешней устойчивости $C(U_\vartheta)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если ϑ – выпуклая функция, то Н-М-решение игры U_ϑ^+ существует, единственно и совпадает с $C(\vartheta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об H-дележах кооперативных игр. – Оптимизация. Настоящий сб., 1979, с. 18–32.
2. AUMANN R.J., PELEG B. Von Neumann – Morgenstern solution to cooperative games without side-payments. – Bull. Amer. Math. Soc., 1960, v.66, N3, p.173–179.
3. BILLERA L.J. Some theorems on the core of n-person game without side-payments. – SIAM J. Appl. Math., 1970, v.18, N3, p.567–579.
4. БОНДАРЕВА О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр. – Проблемы кибернетики, 1963, № 10, с. 119–139.

5. ВАСИЛЬЕВ В.А. Полиномиальные ядра кооперативных игр. - Оптимизация, 1978, вып. 21 (38), с.5-29.
6. НЕЙМАН Дж., МОРГЕНШТЕРН О. Теория игр и экономическое поведение. - М: Наука, 1970.
7. SHAPLEY L.S. Cores of convex games. - Intern. J. Game Theory, 1971, №1, p.11-26.

Поступила в ред.-изд. отдел
1.10.1979 г.