Выпуск 24 (41) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ТРАЕКТОРИЙ МОДЕЛЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ВЫПУКЛЫМИ КОНУСАМИ

А.Ж. Жафяров

В [1] рассмотрен новый класс траекторий моделей[ж)] Неймана – Гейла, оптимальных в смысле некоторого класса суперлинейных функционалов (впредь назовем их $\mathcal{G}$-оптимальными). Автор указанной работы предложил исследовать асимптотические свойства этого класса траекторий. Получены четыре теоремы, указывающие достаточные условия принадлежности $\mathcal{G}$-оптимальных траекторий неймановской грани как для моделей Неймана, так и для моделей Неймана – Гейла. Причем для моделей Неймана – Гейла доказаны две теоремы о принадлежности самих элементов (а не пар) $\mathcal{G}$-оптимальной траектории некоторому специальному множеству. Заметим, что из этих теорем следует справедливость теоремы о магистрали в сильнейшей форме, а обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В конце статьи рассмотрен пример модели Неймана, удовлетворяющей условиям всех указанных теорем. Здесь же показано, что классы эффективных функционалов и $\mathcal{G}$-оптимальных траекторий достаточно богаты.

Приведем основные определения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $\mathcal{Z}$ – модель Неймана или Неймана – Гейла, a-суперлинейное отображение, графиком которого является выпуклый конус $\mathcal{Z}$.

ж) В дальнейшем будем пользоваться терминологией и обозначениями, принятыми в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Суперлинейный функционал $q: R_+^n \to R_+^1$ называется эффективным [I], если найдется число $\alpha > 0$ такое, что для всех $x \in R_+^n$ выполняется соотношение: $\max\{q(y) | y \in a(x)\} = \alpha q(x)$.

Число α называется показателем эффективности функционала q.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Траекторию $\chi_q = (\bar{x}_t)$ модели $\mathcal{Z}$ называют q-оптимальной [I], если справедливы равенства

$$q(\bar{x}_0) = \frac{q(\bar{x}_1)}{\alpha} = \ldots = \frac{q(\bar{x}_t)}{\alpha^t} = \ldots \qquad (I)$$

В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать $\alpha = 1$. Договоримся также собственное множество $\mathfrak{F}$ отображения $a^* = (a')^{-1}$, соответствующее собственному числу $\alpha = 1$, определять так, чтобы выполнилось условие: для любого $f \in \mathfrak{F}$ норма $\|f\| = f^1 + \ldots + f^n \geq 1$, причем хотя бы для одного $f_0 \in \mathfrak{F}$ достигается равенство $\|f_0\| = 1$.

I. Для моделей Неймана доказаны две теоремы: в первой из них показана справедливость теоремы о магистрали в сильнейшей форме, причем для всех q-оптимальных траекторий, но только при довольно жестких ограничениях на модель; во второй ограничения на модель ослаблены, но наложены некоторые ограничения на саму траекторию.

Прежде чем сформулировать эти теоремы, введем следующие обозначения. Пусть модель Неймана $\mathcal{Z}$ определяется парой матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Через $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$ обозначим матрицы, составленные из тех столбцов соответственно матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, которые не входят в образующие неймановской грани N_α.

ТЕОРЕМА I. Пусть в модели Неймана $\mathcal{Z}$ найдется собственное множество $\mathfrak{F}$ отображения a^*, соответствующее темпу роста $\alpha = 1$, такое, что: 1) $\partial^- \mathfrak{F}$ – многогранная поверхность с вершинами $f_1, \ldots, f_k$, где $\partial^- \mathfrak{F} = \{f \in \mathfrak{F} | \nexists f' \in \mathfrak{F}, f' \geq f\}$, 2) $f_i \mathcal{A}_2 > f_j \mathcal{B}_2$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда все q – оптимальные траектории этой модели, где $q(x) = \inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x), x \in R_+^n$, – принадлежат неймановской грани N_α для любого момента времени t, $t = 0, 1, 2, \ldots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_q = (\bar{x}_t)$ – произвольная q-оптимальная траектория и t – произвольное натуральное число. Покажем, что $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \in N_\alpha$, т.е. любой базисный процесс $(a_k, b_k) \in \mathcal{A}_2 \times \mathcal{B}_2$ используется в паре $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ с нулевой интенсивностью. Пред-

положим противное: пусть процесс $(a_s, b_s) \in A_2 \times B_2$ используется в этой паре с положительной интенсивностью, т.е. $\{u_t\}^s > 0$, где $\bar{x}_t = Au_t, \bar{x}_{t+1} = Bu_t, u_t \in R^m_t, \{u_t\}^s$ – координата вектора u_t с номером s. Вектор u_t представим в виде $u_t = u_t' + u_t''$, где k-я координата вектора u_t', т.е. $\{u_t'\}^k$, равна $\{u_t\}^k$, если $a_k \notin A_2$, и $\{u_t'\}^k = 0$, если $a_k \in A_2, k=1,\dots,m$, а вектор $u_t'' = u_t - u_t'$. Заметим, что $u_t'' \neq 0$ из-за предположения. Положим $x_t' = Au_t', x_t'' = Au_t''$, $x_{t+1}' = Bu_t', x_{t+1}'' = Bu_t''$. Тогда $\bar{x}_t = Au_t = A(u_t' + u_t'') = x_t' + x_t''$; $\bar{x}_{t+1} = Bu_t = B(u_t' + u_t'') = Bu_t' + Bu_t'' = x_{t+1}' + x_{t+1}''$, причем $x_{t+1}' \in a(x_t')$, $x_{t+1}'' \in a(x_t'')$. Так как q – эффективный функционал с показателем эффективности $\alpha = 1$, то $q(x_t') \geq q(x_{t+1}')$. Поэтому имеют место соотношения:

$$q(\bar{x}_t) = q(x_t' + x_t'') \geq q(x_t') + q(x_t') \geq q(x_{t+1}') + q(x_t''). \quad (2)$$

Из ограничения на $\partial^- \mathfrak{F}$ следует, что найдутся вершины f_i и f_j многогранной поверхности $\partial^- \mathfrak{F}$, которые будут удовлетворять следующим условиям:

$$q(x_{t+1}') = \inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x_{t+1}') = \inf_{f \in \partial^- \mathfrak{F}} f(x_{t+1}') = f_i(x_{t+1}') = \sum_{r=1}^{m} \{u_t'\}^r f_i(b_r), \quad (3)$$

$$q(x_t'') = \inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x_t'') = \inf_{f \in \partial^- \mathfrak{F}} f(x_t'') = f_j(x_t'') = \sum_{r=1}^{m} \{u_t''\}^r f_j(a_r). \quad (4)$$

По условию теоремы имеем

$$\sum_{r=1}^{m} \{u_t''\}^r f_j(a_r) > \sum_{r=1}^{m} \{u_t''\}^r f_i(b_r). \quad (5)$$

Учитывая (2)-(5), получим, что

$$q(\bar{x}_t) \geq q(x_{t+1}') + q(x_t'') = \sum_{r=1}^{m} \{u_t'\}^r f_i(b_r) + \sum_{r=1}^{m} \{u_t''\}^r f_j(a_r) >$$

$$> \sum_{r=1}^{m} \{u_t'\}^r f_i(b_r) + \sum_{r=1}^{m} \{u_t''\}^r f_i(b_r) = f_i\left(\sum_{r=1}^{m} \{u_t' + u_t''\}^r b_r\right) =$$

$$= f_i\left(\sum_{r=1}^{m} \{u_t\}^r b_r\right) = f_i(\bar{x}_{t+1}) = q(\bar{x}_{t+1}).$$

Так как $q(\bar{x}_{t+1}) = q(\bar{x}_t)$, то получим противоречие $q(\bar{x}_t) > q(\bar{x}_t)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть q – оптимальная траектория $X_q = (\bar{x}_t)$ $(q(\bar{x}_0) > 0)$ модели Неймана $\mathcal{Z}$–удовлетворяет условиям:

1) последовательность $\varphi=(f_t)$ образует траекторию модели $\mathcal{Z}'$, где $f_t(\bar{x}_t)=$ $=q(\bar{x}_t)=\inf_{f\in\mathcal{F}} f(\bar{x}_t)$, $t=0,1,2,\dots$, $\mathcal{F}$ - собственное множество отображения a^*, соответствующее темпу роста $\alpha=1$,
2) найдется натуральное число t_0 такое, что $f_t A_2 > f_{t+1} B_2$ для любого $t\geq t_0$.
Тогда эта траектория χ_q принадлежит неймановской грани N_α, начиная с момента t_0, т.е. $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\in N_\alpha$ для любого $t\geq t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно убедимся в том, что последовательность $\varphi=(f_t)$ является характеристикой траектории $\chi_q=(\bar{x}_t)$ тогда и только тогда, если $\varphi=(f_t)$ - траектория модели $\mathcal{Z}'$. Необходимость очевидна. Пусть теперь $\varphi=(f_t)$ - траектория модели $\mathcal{Z}'$. Тогда для любой траектории $\chi=(x_t)$ последовательность $(f_t(x_t))$ убывает, а для траектории $\chi_q=(\bar{x}_t)$ последовательность $(f_t(\bar{x}_t))$ является постоянной, причем $f_t(\bar{x}_t)=q(\bar{x}_t)=q(\bar{x}_0)>0$. Следовательно, $\varphi=(f_t)$ - характеристика траектории χ_q. Теперь покажем, что пара $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\in N_\alpha$ для любого $t\geq t_0$. Предположим противное: пусть найдется натуральное число $t'\geq t_0$ такое, что $(\bar{x}_{t'}, \bar{x}_{t'+1})\notin N_\alpha$. Отсюда следует, что базисный процесс $(a_k, b_k)\in A_2\times B_2$ используется в паре $(\bar{x}_{t'}, \bar{x}_{t'+1})$ с положительной интенсивностью $\{u_{t'}\}^k$, где $\bar{x}_{t'}=Au_{t'}$, $\bar{x}_{t'+1}=Bu_{t'}$, $u_{t'}\in R^m_+$. Из равенств $f_{t'}(Au_{t'})=f_{t'}(\bar{x}_{t'})=q(\bar{x}_{t'})=q(\bar{x}_{t'+1})=f_{t'+1}(\bar{x}_{t'+1})=f_{t'+1}(Bu_{t'})$ получим, что

$$0=f_{t'}(Au_{t'})-f_{t'+1}(Bu_{t'})=\sum_{i=1}^{m}\{u_{t'}\}^i(f_{t'}(a_i)-f_{t'+1}(b_i)).\tag{6}$$

Так как последовательность $\varphi=(f_t)$ является характеристикой $\chi_q=(\bar{x}_t)$, то, учитывая (6), получим истинность равенства $f_{t'}(a_i)=f_{t'+1}(b_i)$ для любого $i\in\{1,2,\dots,m\}$, для которого $\{u_{t'}\}^i>0$, в частности для $i=k$, т.е. $f_{t'}(a_k)=f_{t'+1}(b_k)$. Однако полученное равенство противоречит условию 2) теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Траектория, о которой говорится в теореме, вообще говоря, не является φ-оптимальной [3]. В самом деле, из условия $f_t A_2 > f_{t+1} B_2$ для любого $t\geq t_0$ не следует, что все предельные точки последовательности $((f_t, f_{t+1}))$ принадлежат множеству Q_α.

$$Q_\alpha = \{(f,g) \in \mathcal{Z}' \mid fA_2 > gB_2.$$

2. В этом пункте для моделей Неймана - Гейла доказаны теоремы 3 и 4. В первой из них при довольно жестких ограничениях на модель показана принадлежность элементов целого класса оптимальных траекторий некоторому специальному множеству. В теореме 4 аналогичное утверждение доказано для элементов q-оптимальной траектории при существенном ослаблении ограничений на модель, но при некоторых дополнительных ограничениях на саму траекторию. Из теорем 3 и 4 следует справедливость теоремы о магистрали в сильнейшей форме соответственно для любой и фиксированной q-оптимальной траектории. Показана также необратимость указанных предложений, т.е. из справедливости теоремы о магистрали в сильнейшей форме для q-оптимальной траектории не следует, вообще говоря, принадлежность элементов этой траектории указанному выше специальному множеству. Это множество обозначим через Ω_c и определим следующим образом:

$$\Omega_c = \{x \in R^n_t \mid q(x) = p(x) = c\}, \qquad (7)$$

где $c \geq 0, p \in (ri\,\Pi_\alpha) \cap \mathfrak{F}$, $q(x) = \inf\limits_{f \in \mathfrak{F}} f(x)$ для любого $x \in R^n_+$, $\mathfrak{F}$ - собственное множество отображения a^*, соответствующее темпу роста $\alpha = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть модель Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$ и собственное множество $\mathfrak{F}$ отображения a^*, соответствующее темпу роста $\alpha=1$ модели $\mathcal{Z}$, таковы, что выполнены условия: 1) $ri\,\Pi_\alpha \supset \partial^- \mathfrak{F}$, 2) $\partial^- \mathfrak{F}$ - многогранная поверхность. Тогда для любой q-оптимальной траектории $X_q = (\bar{x}_t)$, где $q(x) = \inf\limits_{f \in \mathfrak{F}} f(x)$ для любого $x \in R^n_+$, справедливы утверждения:

1) найдется натуральное число t_0, начиная с которого элементы траектории X_q принадлежат множеству Ω_{c_0}, $c_0 = q(x_0)$, т.е. $\bar{x}_t \in \Omega_{c_0}$ для любого $t \geq t_0$.

2) справедлива теорема о магистрали в сильнейшей форме, причем пара $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \in N_\alpha$ для любого $t \geq t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим справедливость первого утверждения. Пусть $X_q=(\bar{x}_t)$ - произвольная q-оптимальная траектория, где $q(x)=\inf_{f\in\mathfrak{F}} f(x), x\in R^n_+$. Так как $\partial^-\mathfrak{F}$ - многогранная поверхность, то найдется конечное число точек (вершин) $f_1,f_2,\ldots,f_k$ множества $\partial^-\mathfrak{F}$ таких, что $\partial^-\mathfrak{F}\subset co\{f_1,\ldots,f_k\}+(R^n_+)^*$. Кроме того, для многогранной поверхности $\partial^-\mathfrak{F}$ имеют место равенства:

$$q(x)=\inf_{f\in\mathfrak{F}} f(x)=\inf_{f\in\partial^-\mathfrak{F}} f(x)=\min_{f\in\{f_1,\ldots,f_k\}} f(x). \tag{8}$$

Учитывая (I), (8), получим, что для любого $t=0,1,2,\ldots$ верно равенство

$$q(\bar{x}_t)=f_t(\bar{x}_t), \tag{9}$$

где $f_t(\bar{x}_t)=\min_{f\in\{f_1,\ldots,f_k\}} f(\bar{x}_t)$. Из бесконечности элементов траектории $X_q=(\bar{x}_t)$ следует, что хотя бы одна из вершин $f_1,\ldots,f_k$ множества $\partial^-\mathfrak{F}$ удовлетворяет равенству (9) более чем конечное число раз. Пусть такой вершиной является f_1. Положим $t_0=\min\{t|q(\bar{x}_t)=f_1(\bar{x}_t)\}$. Тогда $q(\bar{x}_{t_0})=f_1(\bar{x}_{t_0})$, причем $f\in(ri\,\Pi_\alpha)\cap\partial^-\mathfrak{F}$. Покажем, что найденное значение t_0 искомое, т.е. $\bar{x}_t\in\Omega_{c_0}$ для любого $t\geq t_0$. Поскольку $f_1\in ri\,\Pi_\alpha$, то f_1 является равновесным вектором цен и последовательность (f_t), где $f_t=f_1$ для любого $t=0,1,2,\ldots$, есть траектория модели $\mathcal{Z}'$. Тогда для любого $t\geq t_0$ справедливо неравенство $f_1(\bar{x}_{t_0})\geq f_1(\bar{x}_t)$. С другой стороны, для любого $t\geq t_0$ имеют место соотношения:

$$f_1(\bar{x}_{t_0})=q(\bar{x}_{t_0})=q(\bar{x}_t)=\inf_{f\in\mathfrak{F}} f(\bar{x}_t)\leq\inf_{f\in(ri\Pi_\alpha)\cap\mathfrak{F}} f(\bar{x}_t)\leq f_1(\bar{x}_t),$$

т.е. $f_1(\bar{x}_{t_0})\leq f_1(\bar{x}_t)$. Следовательно, $f_1(\bar{x}_{t_0})=f_1(\bar{x}_t)$ для любого $t\geq t_0$. Так как $f_1\in\mathfrak{F}\cap ri\,\Pi_\alpha$ и $f_1(\bar{x}_t)=q(\bar{x}_t)$ для любого $t\geq t_0$, то получим, что $\bar{x}_t\in\Omega_{c_0}$ для любого $t\geq t_0$. Теперь докажем вторую часть теоремы, которая легко получается из первой. Пусть $X_q=(\bar{x}_t)$-произвольная q-оптимальная траектория. По первой части теоремы найдется натуральное t_0 такое, что для любого $t\geq t_0$ имеет место включение $\bar{x}_t\in\Omega_{c_0}$, т.е. $q(\bar{x}_0)=p(\bar{x}_{t_0})=p(\bar{x}_t)$. Тогда пара $(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})\in N_\alpha$ для любого $t\geq t_0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В п.3 показано, что из справедливости теоремы о магистрали в сильнейшей форме не следует принадлежность элементов траектории множеству Ω_{c_0}.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для справедливости теоремы 3 достаточно существование такой точки $f\in\partial^-\mathfrak{F}\cap ri\,\Pi_\alpha$, которая бесконечно мно-

го раз удовлетворяет равенству (9).

ТЕОРЕМА 4. Пусть модель Неймана-Гейла $\mathcal{Z}$ и q-оптимальная траектория $\chi_q=(\bar{x}_t)$, где $q(x)=\inf_{f\in\mathfrak{F}} f(x), x\in R^n_+$, таковы, что выполнено равенство $p(\bar{x}_{t_0})=q(\bar{x}_{t_0})$ для некоторого натурального числа t_0 и функционала $p\in\mathfrak{F}\cap ri\Pi_\alpha$. Тогда для любого $t\geq t_0$: 1) элементы траектории χ_q принадлежат множеству Ω_{c_0}; 2) для траектории χ_q справедлива теорема о магистрали в сильнейшей форме, причем пара $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\in N_\alpha$, начиная с t_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t - некоторое натуральное число, большее t_0. Для равновесного вектора цен p имеет место неравенство $p(\bar{x}_{t_0})\geq p(\bar{x}_t)$. Так как $p\in\mathfrak{F}\cap ri\Pi_\alpha$, то $p(\bar{x}_t)\geq \geq\inf_{f\in\mathfrak{F}\cap ri\Pi_\alpha} f(\bar{x}_t)\geq q(\bar{x}_t)=q(\bar{x}_{t_0})=p(\bar{x}_{t_0})$. Отсюда следует, что $p(\bar{x}_t)=p(\bar{x}_{t_0})$ для любого $t\geq t_0$. Далее, рассуждая так же, как и в предыдущей теореме, убедимся в истинности утверждений теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Укажем множество начальных состояний, из которых можно попасть в множество Ω_{c_0}, а следовательно, и в неймановскую грань N_α. Ясно, что таким является множество $a^{-t_0}(\bar{x}_{t_0})$. Найдется по крайней мере одна q-оптимальная траектория, исходящая из начального состояния $x_0\in a^{-t_0}(\bar{x}_{t_0})$ и принадлежащая множеству Ω_{c_0}, $c_0=q(x_0)$, начиная с некоторого момента t.

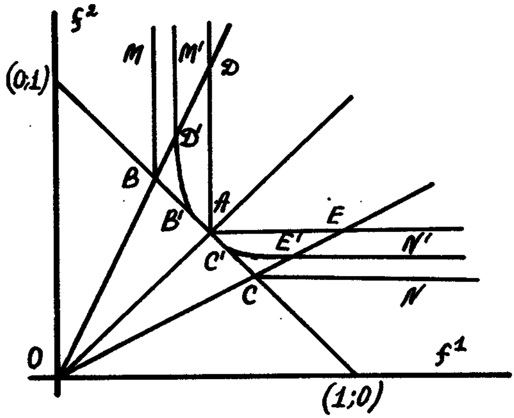
3. Приведем пример модели, удовлетворяющей условиям всех указанных выше теорем. Рассмотрим модель Неймана $\mathcal{Z}_R$, определяемую следующей парой матриц A и B, где

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1/2&0&0&0\\1&0&0&1/2&0&0\end{pmatrix}.$$

Состояние равновесия модели $\mathcal{Z}_R$ определяется тройкой $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),\bar{p})$, где $\alpha=1$, $\bar{x}=\bar{y}=(1/3;1/3)$, $\bar{p}=(1/2;1/2)$. Неймановская грань N_α представляет собой коническую оболочку первых двух базисных процессов (a_1,b_1) и (a_2,b_2). Заметим, что $\Pi_\alpha=\{\lambda\bar{p}\}_{\lambda>0}$. Теперь опишем все эффективные функционалы с показателем эффективности, равным неймановскому темпу роста $\alpha=1$ модели $\mathcal{Z}_R$. Предварительно укажем все собственные множества $\mathfrak{F}$ отображе-

ния a^*, соответствующие собственному числу $\alpha=1$. (Заметим, что темп роста α отображения a является собственным числом отображения $a^*=(a')^{-1}$.) Так как собственное множество $\mathfrak{F}$ отображения a^* определяется с точностью до положительной константы, то, как и ранее, будем считать, что для любого $f\in\mathfrak{F}, \|f\|=f^1+f^2+\dots+f^n\geq 1$, причем хотя бы для одного функционала $f_0\in\mathfrak{F}$ достигается равенство $\|f_0\|=1$.

Пусть $\mathfrak{F}_0$ – выпуклое множество (см. рис.), ограниченное отрезком BC и лучами BM и CN. Через G обозначим множество всех непустых выпуклых множеств $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}_0$, обладающих



свойствами: I) $(R^2_+)^*$ - устойчивости, 2) симметричности относительно биссектрисы угла $(R^2_+)^*$, 3) $\partial^-\mathfrak{F}\subset\Delta ABD\cup\Delta ACE$, где $(AD)\|(BM)\|(Of^2)$, $(AE)\|(CN)\|(Of^1)$. Уравнениями прямых OB, OA и OC являются соответственно $f^2=2f^1$, $f^2=f^1, f^2=\frac{1}{2}f^1$. Ясно, что $\mathfrak{F}_0$ и $\angle DAE$ являются наибольшими и наименьшими по включению множествами, принадлежащими G.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. В модели $\mathcal{Z}_R$ любое множество $\mathfrak{F}$ является собственным множеством отображения a^*, соответствующим собственному числу $\alpha=1$, тогда и только тогда, если $\mathfrak{F}\in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Нетрудно убедиться, что для модели $\mathcal{Z}_R$ множество $a^*(g)$ имеет вид:

$$a^*(g)=\{(f^1,f^2)\mid f^1\geq\max\{g^2;\tfrac{1}{2}g^1\};\ f^2\geq\max\{g^1;\tfrac{1}{2}g^2\}\} \quad (10)$$

где $g=(g^1,g^2)\in(R^2_+)^*$. Теперь покажем, что любое множество $\mathfrak{F}\in G$ является собственным множеством отображения a^*, соответствующим собственному числу $\alpha=1$, т.е. $\mathfrak{F}=a^*(\mathfrak{F})$. Пусть $\tilde{f}\in\mathfrak{F}$. Найдется функционал $f=(f^1,f^2)\in\partial^-\mathfrak{F}$ такой,

что $f \le \tilde{f}$. Так как $\partial^- \mathfrak{F}$ симметрично относительно биссектрисы OA, то функционал $g=(f^2; f^1) \in \partial^- \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$. Учитывая равенство (I0) и условие $\frac{1}{2} f^2 \le f^1 \le 2f^2$, вытекающее из 3), получим справедливость включения $f \in a^*(g)$. Из неравенства $f \le \tilde{f}$ следует, что включение $\tilde{f} \in a^*(g)$ истинно. Следовательно, $\tilde{f} \in a^*(\mathfrak{F})$, а потому имеет место соотношение: $\mathfrak{F} \subset a^*(\mathfrak{F})$.

Пусть теперь $f=(f^1; f^2) \in a^*(\mathfrak{F})$. Найдется функционал $\tilde{g} \in \mathfrak{F}$ такой, что $a^*(\tilde{g}) \ni f$. Выберем $g=(g^1; g^2) \in \mathfrak{F}$ так, чтобы $g \in \partial^- \mathfrak{F}$, $g \le \tilde{g}$. Так как $a^*(g) \supset a^*(\tilde{g})$, то $f \in a^*(g)$, т.е.

$$f^1 \ge \max\{g^2; \tfrac{1}{2} g^1\}; \ f^2 \ge \max\{g^1; \tfrac{1}{2} g^2\}. \quad \text{(II)}$$

Из условия $g \in \partial^- \mathfrak{F}$ следует, что $\frac{1}{2} g^2 \le g^1 \le 2g^2$. Учитывая (II), получим справедливость следующих неравенств: $f^1 \ge g^2$, $f^2 \ge g^1$. В силу симметричности $\partial^- \mathfrak{F}$ точка $(g^2; g^1) \in \partial^- \mathfrak{F}$, а следовательно, $f \in \mathfrak{F}$. Итак, $a^*(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$. Отсюда следует истинность равенства $\mathfrak{F} = a^*(\mathfrak{F})$.

Необходимость. Пусть M – произвольное множество, не принадлежащее G. Покажем, что $M \ne a^*(M)$. Учитывая определения собственного множества отображения a^* и множества G, достаточно рассмотреть случаи, когда: а) $M \setminus \mathfrak{F}_0 \ne \varnothing$, б) M не симметрично относительно биссектрисы OA, в) $\partial^- M \not\subset \Delta ABD \cup \Delta ACE$.

В случае а) нарушение равенства $M = a^*(M)$ следует из того, что $a^*(M) \subset \mathfrak{F}_0$. Нетрудно убедиться в нарушении указанного равенства и в остальных случаях.

ЗАМЕЧАНИЕ. В модели Неймана $\mathcal{Z}_R$ – выпуклое немногогранное множество, ограниченное линией $M'D'B'C'N'$ (см. рис.), – является собственным множеством отображения a^*, соответствующим собственному числу $\alpha = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функционалы $g: R^n_+ \to R^1_+$, определяемые формулой $g(x) = \inf f(x), f \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F} \in G$, и только они являются эффективными функционалами с показателем эффективности $\alpha = 1$ модели $\mathcal{Z}_R$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы I [I].

СЛЕДСТВИЕ. В модели $\mathcal{Z}_R$ имеется бесконечное множество эффективных функционалов с коэффициентом эффективности, равным неймановскому темпу роста модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В модели $\mathcal{Z}_R$ имеется бесконечное множество собственных множеств отображения a^*, соответствующих неймановскому темпу роста $\alpha = 1$ (предложение I). Каждое собственное множество отображения позволяет построить эффективный функционал с показателем $\alpha = 1$. Отсюда следует истинность искомого утверждения.

В заключение этого пункта рассмотрим те траектории модели $\mathcal{Z}_R$, о которых говорилось в теоремах I – 4:

$$\chi_1 = (x_t),\ x_{2k} = (0,1),\ x_{2k+1} = (1,0);\ k = 0,1,\dots,[\tfrac{t_0}{2}],\ x_t = \bar{x} = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),\ t \geq t_0;$$

$$\chi_2 = (x_t),\ x_{2k} = (x_0^1, x_0^2),\ x_{2k+1} = (x_0^2, x_0^1),\ x_0^1 \neq x_0^2,\ k = 0,1,2,\dots;$$

$$\chi_3 = (x_t),\ x_{2k} = (x_0^1, x_0^2),\ x_{2k+1} = (x_0^2, x_0^1),\ k = 0,1,2,\dots$$

Отметим некоторые свойства траекторий $\chi_1 - \chi_3$:

I) эти траектории являются оптимальными в обычном смысле;

2) траектория χ_1 оптимальна в смысле эффективного функционала $q : R_+^n \to R_+^1$, где
$$q(x) = \inf_{f \in \xi_0} f(x) = \begin{cases} f(x),\ f = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}),\ x^1 \geq x^3; \\ \hat{f}(x),\ \hat{f} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}),\ x^1 \leq x^2; \end{cases}$$

причем в момент времени t_0 имеет место равенство $\rho(x_{t_0}) = q(x_{t_0})$, которое играет важную роль в теореме 4;

3) траектории χ_2 и χ_3 являются q-оптимальными, причем относительно всех эффективных функционалов с показателем $\alpha = 1$. Эти функционалы имеют вид:
$$q(x) = \begin{cases} f(x),\ f = (\tfrac{1}{3} + \varepsilon, \tfrac{2}{3} - \varepsilon),\ x^1 \geq x^2,\ 0 \leq \varepsilon \leq \tfrac{1}{6}; \\ \hat{f}(x),\ \hat{f} = (\tfrac{2}{3} - \varepsilon, \tfrac{1}{3} + \varepsilon),\ x^1 \leq x^2,\ 0 \leq \varepsilon \leq \tfrac{1}{6}. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *В модели $\mathcal{Z}_R$ из любой точки исходит хотя бы одна q-оптимальная траектория.*

Справедливость сказанного следует из того, что траектория χ_3 является q-оптимальной и исходит из точки, на которую нет никаких ограничений, кроме как $x_0^1 \geq 0$, $x_0^2 \geq 0$.

Резюмируя сказанное в предложениях I–3, приходим к выводу, что в модели $\mathcal{Z}_R$ классы как эффективных, так и q-оптимальных траекторий достаточно обширны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модель $\mathcal{Z}_R$ удовлетворяет всем требованиям теорем I–4. Действительно, для справедливости условий теоремы I

достаточно в качестве собственного множества отображения a^*, соответствующего собственному числу $\alpha=1$, взять любое множество $\mathfrak{F}$, обладающее следующими тремя свойствами: $\mathfrak{F}\in G$, $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{F}_0$, $\partial^-\mathfrak{F}$ – многогранная поверхность. Выше доказано, что таких множеств в модели $\mathcal{Z}_R$ имеется бесчисленное множество. Для указанных множеств эффективные функционалы с показателем эффективности $\alpha=1$ имеют вид:

$$g(x)=\begin{cases} f(x),\text{ где } f=(\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{2}{3}-\varepsilon) \text{ при } x^1\geq x^2,\ 0<\varepsilon\leq\frac{1}{6};\\ \hat{f}(x),\text{ где } \hat{f}=(\frac{2}{3}-\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon) \text{ при } x^1\leq x^2, 0<\varepsilon\leq\frac{1}{6}.\end{cases} \quad (12)$$

Истинность условия $f_i A_2 > f_j B_2$ проверяется непосредственно.

Траектории вида $\chi_3=(x_t)=(x_0,x_0',x_0,x_0',\ldots)$, $x_0=(x_0^1,x_0^2)$, $x_0'=(x_0^2,x_0^1)$ модели $\mathcal{Z}_R$ удовлетворяют условиям теоремы 2. В самом деле, эти траектории являются оптимальными относительно эффективных функционалов, определяемых формулой (12). Кроме того, последовательность $\varphi=(f_t)$, где $f_t(x_t)=g(x_t)$, $f=f_t=(\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{2}{3}-\varepsilon)$ при $x_t^1\geq x_t^2$ и $\hat{f}=f_t=(\frac{2}{3}-\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon)$ при $x_t^1\leq x_t^2$, является траекторией модели $\mathcal{Z}_R'$. Справедливость условий $fA_2>\hat{f}B_2$ и $\hat{f}A_2>fB_2$ проверяется непосредственно.

Собственное множество $\angle DAE=\bar{p}+(R_+^2)^*$ отображения a^*, где $\bar{p}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, удовлетворяет условиям теоремы 3. Покажем, что из справедливости теоремы о магистрали в сильнейшей форме для q-оптимальной траектории не следует принадлежность элементов этой траектории множеству Ω_{C_0}. В самом деле, траектории вида $\chi_2=(x_t)$, $x_{2k}=x_0=(x_0^1,x_0^2)$, $x_0^1\neq x_0^2$, $x_{2k+1}=(x_0^2,x_0^1)$, $k=0,1,\ldots$, модели $\mathcal{Z}_R$ являются q-оптимальными относительно эффективных функционалов q, где

$$q(x)=\begin{cases} f(x),\ f=(\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{2}{3}-\varepsilon),\ x_0^1>x_0^2,\ 0\leq\varepsilon\leq\frac{1}{6};\\ \hat{f}(x),\ \hat{f}=(\frac{2}{3}-\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon),\ x_0^1<x_0^2,\ 0\leq\varepsilon\leq\frac{1}{6}.\end{cases}$$

Указанные траектории принадлежат неймановской грани N_α, но не принадлежат множеству Ω_{C_0}, так как $\bar{p}(x_t)>q(x_t)$ для любого натурального t. Истинность последнего утверждения следует из следующих соотношений:

$$q(x_0)=q(x_t)=\min\{(\tfrac{1}{3}+\varepsilon)x_0^1+(\tfrac{2}{3}-\varepsilon)x_0^2;\ (\tfrac{2}{3}-\varepsilon)x_0^1+(\tfrac{1}{3}+\varepsilon)x_0^2\}<\bar{p}(x_t)=\tfrac{1}{2}(x_0^1+x_0^2).$$

Наконец, как уже отмечалось, траектория χ_1 удовлетворяет условиям теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНОВ А.М. Об одном классе оптимальных траекторий в моделях Неймана - Гейла. - Оптимизация, 1978, вып. 20(37), с. 147-155.
2. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
3. ЖАФЯРОВ А.Ж. Теорема о магистрали в сильнейшей форме. - Оптимизация, 1972, вып. 7(24), с.14-25.

Поступила в ред.-изд. отдел
30.05.1979 г.