

УДК 330.115

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КАДРОВ В ОРГАНИЗАЦИЯХ

А.К.Романов, А.И.Терехов

В последнее время уделяется серьезное внимание изучению деятельности организационных систем с целью повышения эффективности их функционирования [1]. Одной из главных составляющих, от которой в решающей мере зависит эффективность таких систем, являются кадры. Многие аспекты функционирования и развития организаций связаны с численностью и составом кадров, их изменением во времени. Важность изучения динамики и структуры кадровой составляющей, целесообразность использования для этих целей математических методов и ЭВМ отмечается в работах [2-4]. В настоящей работе представлены 3 математические модели, отражающие достаточно общие черты динамики персонала в организациях при различных условиях их функционирования.

Рассмотрим организационную систему, персонал которой разделен на k категорий, образующих строго иерархическую структуру. Динамика кадров в такой системе схематично представлена на рис. [1]. Данная схема типична, например, для движения кадров в научных учреждениях, если под категорией понимать квалификационно-должностной уровень сотрудника.

Как следует из ряда работ [2-4], склонность сотрудника к уходу из организации, а также шансы перехода из категории z в категорию $z+1$ существенно зависят от промежутка времени, в течение которого он принадлежал к z -й категории. Процесс продвижения и выбытия индивидуумов в такой организации можно

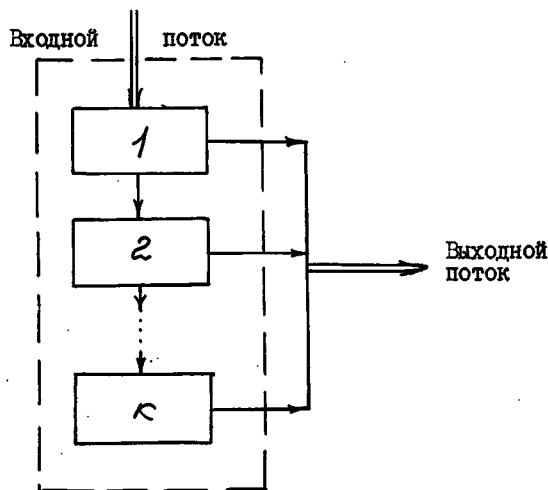


Рис. I

описать с помощью следующей полумарковской модели^{*}).

Пусть всякий индивидуум, находящийся в состоянии z , либо покидает систему с вероятностью q_z , в случае чего он продолжает оставаться в этом состоянии в течение времени x с функцией плотности вероятности $q_z(x)$, либо переходит в состояние $z+1$ с вероятностью p_z , в случае чего он продолжает оставаться в этом состоянии в течение времени y с функцией плотности вероятности $p_z(y)$, $q_z + p_z = 1$. Обозначим через $P_{ij}(t)$ вероятность индивидууму находиться в момент времени $t > 0$ в состоянии j при условии, что в момент $t = 0$ он находился в состоянии i . (Здесь и в дальнейшем t — время в годах.)

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{ii}(t) = p_i F_i(t) + q_i G_i(t), \quad i = 1, \dots, k; \\ P_{i,k+1}(t) = q_i [1 - G_i(t)] + p_i \int_0^t f_i(\tau) P_{i+1,k+1}(t-\tau) d\tau, \\ \quad i = 1, \dots, k-1; \\ P_{k,k+1}(t) = 1 - G_k(t); \\ P_{ij}(t) = p_i \int_0^t f_i(\tau) P_{i+1,j}(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, k-1, j = 1, \dots, k, i < j; \\ P_{ij}(t) = 0, \quad j < i. \end{array} \right. \quad (I)$$

^{*} В дальнейшем, где это необходимо, будем, пользуясь терминологией полумарковских процессов, говорить об z -м состоянии, в котором может находиться индивидуум в произвольный момент времени, вместо того, чтобы говорить о принадлежности его к z -й категории персонала.

Здесь $F_i(t) = \int_0^t f_i(\tau) d\tau$, $G_i(t) = \int_0^t g_i(\tau) d\tau$. Предположим, что величины $P_{ji}(t)^e$, удовлетворяющие данной системе, могут быть найдены аналитически или численно. Тогда если $R(\tau)d\tau$ — ожидаемое число лиц, вновь принимаемых в интервале $(\tau, \tau+d\tau)$, то ожидаемая численность персонала в состоянии i в момент времени t

$$\bar{n}_i(t) = \sum_{j=1}^i n_j(0) P_{ji}(t) + \int_0^t R(\tau) P_{ii}(t-\tau) d\tau,$$

где $n_j(0)$ — численность персонала в состоянии j в момент времени $t=0$.

Рассмотрим 3 способа образования потока лиц, вновь входящих в систему.

1. Численность вновь принимаемых является пуассоновской переменной с параметром λ , не зависящим от времени. В этом случае

$$\bar{n}_i(t) = \sum_{j=1}^i n_j(0) P_{ji}(t) + \lambda \int_0^t P_{ii}(t-\tau) d\tau.$$

2. Всякий индивидуум, выбывающий из системы, мгновенно замещается индивидуумом, входящим в первое состояние. Если при этом продолжительности пребывания индивидуумов в системе являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с одной и той же плотностью распределения $b(t)$, то процесс на уровне всей системы будет описываться с помощью интегрального уравнения восстановления [4,5]:

$$h(t) = b(t) + \int_0^t h(t-\tau) b(\tau) d\tau. \quad (2)$$

В нашем случае $b(t) = \bar{P}_{i,k+1}(t)$, где $\bar{P}_{i,k+1}(t)$ определяется из системы рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k,k+1}(t) &= g_k(t), \\ \bar{P}_{k-i,k+1}(t) &= g_{k-i} g_{k-i}(t) + P_{k-i} \int_0^t h_{k-i}(\tau) \bar{P}_{k-(i-1),k+1}(t-\tau) d\tau, \\ &\quad i=1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Функция $h(t)$ называется плотностью восстановления и указывает на среднее число восстановлений, ожидаемых в малом интервале времени вблизи t . Предположим, что в момент $t=0$ весь персонал системы находится в i -м состоянии и каждый индивидуум имеет нулевой стаж, тогда

$$\bar{n}_i(t) = N \left[P_{ii}(t) + \int_0^t h(\tau) P_{ii}(t-\tau) d\tau \right],$$

где N — общая численность персонала в системе.

3. Пусть с пребыванием индивидуума в каждом состоянии связаны определенные, различающиеся по величине расходы. Будем, например, считать, что α_z — средняя ставка заработной платы для z -й категории сотрудников, причем $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$. Если предположить, что высвобождающиеся в связи с увольнением, а также дополнительно выделяемые денежные средства идут на прием новых членов в систему и реализуются мгновенно, то мы приходим к модели, описывающей процесс восстановления по фонду заработной платы. Основные соотношения такой модели для случая организации с двумя категориями сотрудников приведены в §3.

Важным аспектом применения описанных моделей для выработки и обоснования решений по управлению кадровым составом организации может являться расчет и сравнение траекторий изменения численности и структуры персонала при различных схемах притока новых членов в организацию и различных значениях модельных параметров, установление асимптотических свойств этих траекторий.

В качестве иллюстрационного примера рассмотрим организацию с двумя категориями сотрудников. Отметим, что для многих организаций является типичным унимодальное асимметричное распределение времени пребывания сотрудника в том или ином состоянии до ухода из организации [4]. В ряде случаев распределения такого рода можно аппроксимировать в классе специальных распределений Эрланга определенного порядка с однопараметрической функцией плотности

$$p(t) = \frac{a(at)^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}.$$

Предположим для нашего случая, что

$$g_1(t) = a_1^2 t e^{-a_1 t},$$

$$g_2(t) = a_2^2 t e^{-a_2 t}.$$

Пусть $f(t)$ также задается плотностной функцией распределения Эрланга второго порядка со сдвигом по временной оси, равным $\tau \geq 0$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ a_2^2 (t - \tau) e^{-a_2 (t - \tau)}, & t \geq \tau. \end{cases}$$

(С помощью таких кривых можно описать, например, процессы, связанные с увольнением и защитой кандидатских диссертаций

сотрудниками научного учреждения [3].)

§1. Модель динамики персонала при пуассоновском притоке новых членов в организацию

Пусть

P - вероятность перехода из состояния 1 в состояние 2;

q_1 - вероятность увольнения из состояния 1;

λ - параметр пуассоновского потока вновь входящих в организацию;

$n_1(0), n_2(0)$ - начальные численности персонала в состояниях 1 и 2.

В этом случае система (1) может быть решена аналитически, при этом выражения для ожидаемых численностей персонала в различных состояниях имеют вид

$$\sum_i [(b_i + c_i t) e^{-a_i t} + d_i].$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\bar{n}_1(t) \rightarrow \lambda (q_1 M_1 + P M_2),$$

$$\bar{n}_2(t) \rightarrow \lambda P M_3,$$

$$\frac{\bar{n}_2(t)}{\bar{n}_1(t) + \bar{n}_2(t)} \rightarrow \frac{P M_3}{q_1 M_1 + P (M_2 + M_3)},$$

где

$$M_1 = \int_0^{\infty} t g_1(t) dt = \frac{2}{a_1}, M_2 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \tau + \frac{2}{a_2},$$

$$M_3 = \int_0^{\infty} t g_2(t) dt = \frac{2}{a_3}.$$

Для целей экспериментального расчета значения параметров a_1, τ, a_2, a_3 можно получить, задавая, например, средние значения времен задержек. На рис. 2,3 (кривая 1) представлены графики изменения доли сотрудников 2-й категории в общем контингенте персонала, полученные в соответствии с данной моделью при

$$a_1 = 0,285, \quad a_2 = 0,335, \quad a_3 = 0,344, \quad \lambda = 300,$$

$$n_1(0) = 1000, \quad n_2(0) = 0.$$

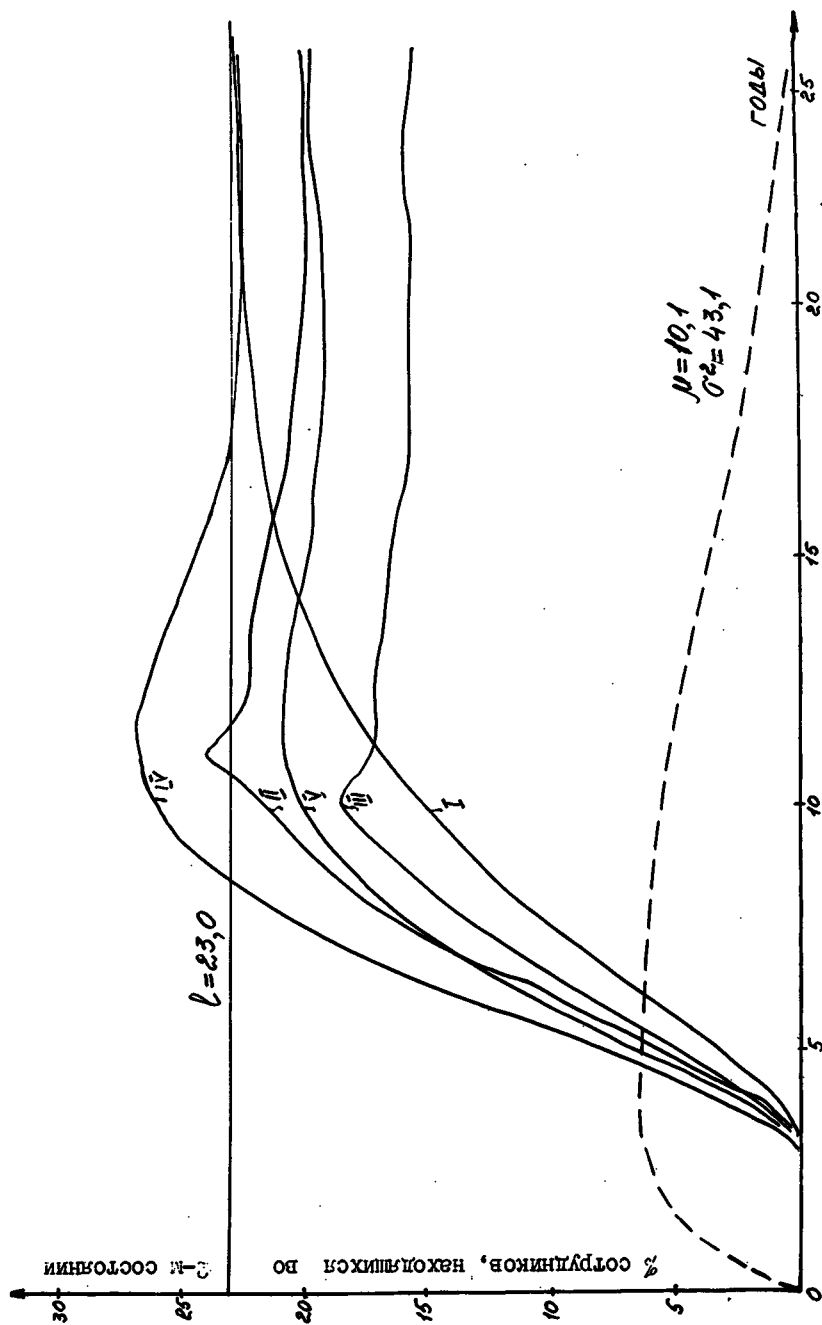


Рис. 4. Динамика структуры персонала в условной организации при $\rho = 0,4$

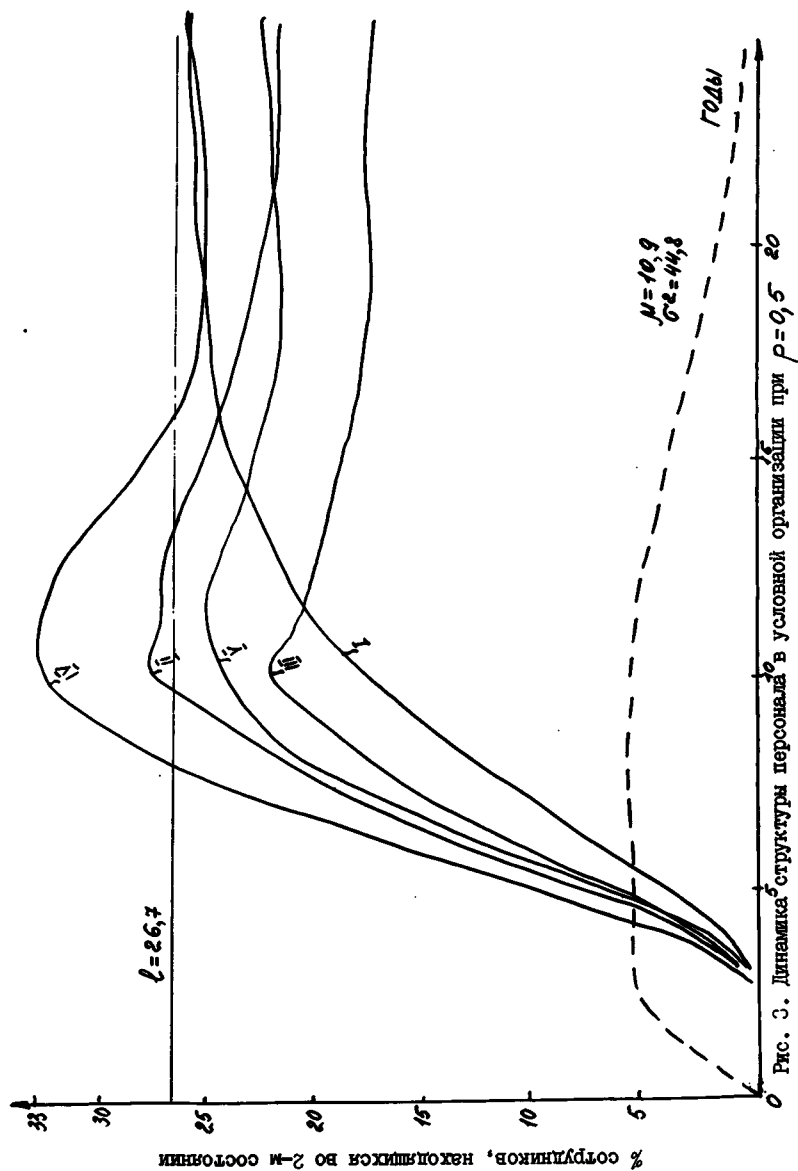


Рис. 3. Динамика структуры персонала в условной организации при $\rho = 0,5$

§2. Модель динамики персонала при простом и расширенном восстановлении

В случае системы с двумя категориями сотрудников функция плотности вероятности полной продолжительности пребывания всякого индивидуума в системе до увольнения

$$\begin{aligned} b(t) &= qa_1^2 t e^{-a_1 t} \\ b(t) &= qa_1^2 t e^{-a_1 t} + \rho a_2^2 a_3^2 \left\{ e^{-a_2(t-\tau)} \sqrt{\frac{t-\tau}{(a_3-a_2)^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{(a_3-a_2)^3} \right\} + e^{-a_3(t-\tau)} \left[\frac{t-\tau}{(a_3-a_2)^2} + \frac{2}{(a_3-a_2)^3} \right] \Bigg\} \quad \text{при } t \geq \tau. \end{aligned}$$

Причем

$$\begin{aligned} M &= qM_1 + \rho(M_2 + M_3), \\ \sigma^2 &= q\sigma_1^2 + \rho(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \rho q(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) - \\ &\quad - 2\rho q(M_1 M_2 + M_1 M_3 - M_2 M_3), \end{aligned}$$

где M — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия времени полного пребывания индивидуума в системе; $\sigma_1^2 = 2/a_1^2$, $\sigma_2^2 = 2/a_2^2$, $\sigma_3^2 = 2/a_3^2$ — дисперсии, соответствующие распределениям $q_1^2(z)$, $f(t)$, $g_2(t)$. На рис. 2 и 3 функция плотности $b(t)$ изображена кривой У1.

Обозначим

$$G(t) = \int_0^t b(\tau) d\tau, \quad \bar{G}(t) = \int_t^\infty b(\tau) d\tau = 1 - G(t);$$

$$P_{11}(t) = \begin{cases} \rho + q[e^{-a_1 t}(a_1 t + 1)], & t < \tau, \\ \rho\{e^{-a_2(t-\tau)}[a_2(t-\tau) + 1]\} + q[e^{-a_1 t} + 1], & t \geq \tau. \end{cases}$$

Знание плотности восстановления позволяет получить следующие основные характеристики динамики персонала в системе.

1) Ожидаемое число лиц, выбывающих из системы (или входящих в систему) в интервале $(0, t)$.

$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$; $H(t)$ называется функцией восстановления.

2) Ожидаемые численности персонала в первом и втором состояниях в момент t

$$\bar{n}_1(t) = N[P_{11}(t) + \int_0^t P_{11}(\tau) h(t-\tau) d\tau,$$

$$\bar{n}_e(t) = N - \bar{n}_i(t).$$

3) Распределение срока служб всякого индивидуума, находящегося в системе в момент времени t , имеет функцию плотности

$$a(\tau|t) = h(t-\tau) \bar{G}(\tau), 0 \leq \tau < t,$$

причем вероятность того, что срок службы равен t , есть $\bar{G}(t)$.

Один из основных результатов теории восстановления [5] состоит в том, что при достаточно общих условиях

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \mu^{-1},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = t\mu^{-1}$$

или, более точно, при $t \rightarrow \infty$

$$H(t) = t\mu^{-1} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + o(1).$$

Таким образом, исследование динамики персонала в системе с простым восстановлением не представляет трудностей, если интегральное уравнение (2) может быть решено точно (например, с помощью преобразования Лапласа) или плотность восстановления достигает своего предельного значения достаточно быстро.

Однако в нашем примере мы не можем получить точного решения (2), кроме того, распределение времени пребывания индивидуума в системе имеет положительную асимметрию (кривая имеет длинный "хвост" в правой части; см. рис. 2,3). В этом случае для решения интегрального уравнения может быть использовано следующее приближение [4]:

$$h^0(t) = b(t) + G^2(t) / \int_0^t \bar{G}(\tau) d\tau.$$

При общих условиях это приближение обладает следующими свойствами:

$$1) \text{ при } b(t) = \lambda e^{-\lambda t} (\lambda > 0) \quad h^0(t) = h(t) \quad \forall t;$$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h^0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \mu^{-1};$$

$$3) \quad h^0(0) = h(0) = 0;$$

$$4) \quad h^{0'}(0) = h'(0).$$

Кроме того, если $b(t)/\bar{G}(t)$ является невозрастающей функцией, то $h^0(t)$ является верхней границей для $h(t)$.

Для ориентировочной проверки качества приближения была использована невязка, получаемая при подстановке $h^0(t)$ в урав-

нение

$$\int_0^t h(\tau) d\tau = G(t) + \int_0^t G(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

для $t=1, \dots, 25$. Максимальная абсолютная величина невязки составила 0,040 при $\rho=0,4$ и 0,53 при $\rho=0,5$. Следует отметить, что в случае необходимости всякое приближение может быть улучшено путем использования его в качестве начального в процессе итеративного решения интегрального уравнения:

$$h^{(i+1)}(t) = z(t) + \int_0^t h^{(i)}(t-\tau) z(\tau) d\tau.$$

Кривая II на рис. 2 и 3 показывает изменение доли сотрудников 2-й категории в общем контингенте персонала при $n_1(0) = N = 1000$. На рис. 4 приведены интегральные кривые распределения срока службы индивидуума, находящегося в момент $t=20$ при $\rho=0,4$ и $\rho=0,5$.

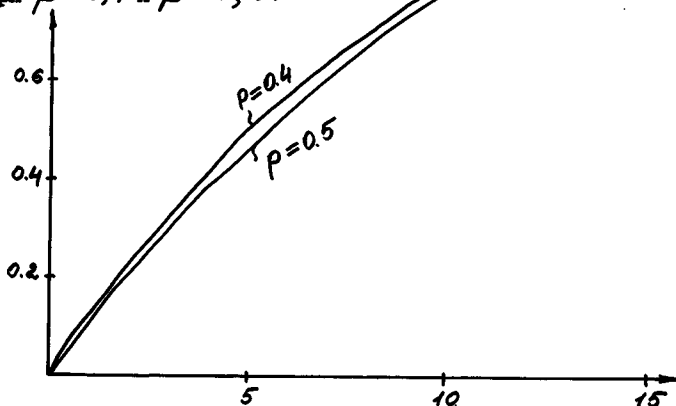


Рис. 4. Интегральные кривые распределения срока службы индивидуума в модели простого восстановления

Рассмотрим расширяющуюся организацию, в которой размер приема новых членов превышает численность выбывающих в один и тот же период времени [4].

Пусть $N(t)$ - численность персонала в системе в момент времени t ($N(t)$ может быть задана как некая монотонно растущая функция t);

$\bar{n}_{t+1}(t)$ - ожидаемая численность потерь в интервале $(0, t)$;
 $R(\tau) d\tau$ - ожидаемый размер приема новых членов в ин-

тервале $(\tau, \tau + d\tau)$;

$M(\tau)d\tau$ - прирост численности в организации в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$.

В этом случае показатели приема и выбытия для системы с двумя состояниями удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\bar{n}_3(t) = N(0)G(t) + \int_0^t G(t-\tau)R(\tau)d\tau,$$

$$R(t) = M(t) + \frac{d\bar{n}_3(t)}{dt},$$

где $N(t) = N(0) + \int_0^t M(\tau)d\tau$.

Применим преобразование Лапласа и перейдем к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций

$$\begin{cases} n_3^*(s) = N(0) \frac{s^*(s)}{s} + R^*(s) \frac{s^*(s)}{s}, \\ R^*(s) = M^*(s) + \bar{n}_3^*(s) s. \end{cases}$$

Решая эту систему и используя соотношение $N^*(s) = N(0)/s + M^*(s)/s$, получим

$$\begin{cases} \bar{n}_3^*(s) = N^*(s) \frac{s^*(s)}{1 - s^*(s)} = N^*(s) h^*(s), \\ R^*(s) = M^*(s) + N(0) h^*(s) + M^*(s) h^*(s). \end{cases}$$

Переходя к оригиналам, имеем

$$\begin{aligned} \bar{n}_3(t) &= \int_0^t N(\tau) h(t-\tau) d\tau, \\ R(t) &= M(t) + N(0) h(t) + \int_0^t M(\tau) h(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Как видно из полученных соотношений, плотность восстановления играет основную роль в теории расширяющихся организаций,

$$\bar{n}_1(t) = N(0)P_H(t) + \int_0^t R(\tau)P_H(t-\tau)d\tau,$$

$$\bar{n}_2(t) = N(t) - \bar{n}_1(t).$$

Предположим, например, что численность персонала в организации растет с постоянным темпом: $N(t) = N(0)e^{rt}$. Тогда

$$M(t) = N(0)re^{rt}, \quad t > 0.$$

На рис. 2 и 3 кривая III представляет траекторию изменения доли сотрудников 2-й категории в общем контингенте персонала при $N(0) = 1000$ и $e^r = 1,05$.

§3. Модель динамики персонала, связанная с фондом заработной платы

Пусть $R(t)dt$ - ожидаемая численность новых членов, входящих в систему в интервал времени $(t, t+dt)$; α_1 - средняя ставка заработной платы сотрудника в 1-м состоянии; α_2 - средняя ставка заработной платы сотрудника во 2-м состоянии; $\varphi(t)$ - дифференцируемая функция, описывающая динамику роста фонда заработной платы в системе, $\varphi(0) = \alpha_1 n_1(0) + \alpha_2 n_2(0)$. Тогда справедливо следующее уравнение:

$$R(t) = q[n_1(0)g_1(t) + \int_0^t R(t-\tau)g_1(\tau)d\tau] + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}[n_2(0)g_2(t) + \int_0^t P(t-\tau)g_2(\tau)d\tau] - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}\right)P(t) + \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

где

$$P(t) = p[n_1(0)f(t) + \int_0^t R(t-\tau)f(\tau)d\tau].$$

Средние численности персонала в состояниях 1 и 2 в момент времени t можно выразить в этом случае следующим образом:

$$\bar{n}_1(t) = n_1(0)G_1(t) + \int_0^t R(t-\tau)G_1(\tau)d\tau, \\ \bar{n}_2(t) = n_2(0)G_2(t) + \int_0^t P(t-\tau)G_2(\tau)d\tau,$$

где

$$G_1(t) = \int_t^\infty [qg_1(\tau) + pf(\tau)]d\tau, \quad G_2(t) = \int_t^\infty g_2(\tau)d\tau.$$

Применив преобразование Лапласа, перейдем к системе алгебраических уравнений относительно $R^*(s)$ и $P^*(s)$:

$$\begin{cases} R^*(s) = qg_1^*(s)[n_1(0) + R^*(s)] + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}g_2^*(s)[n_2(0) + P^*(s)] - \\ \quad - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}\right)P^*(s) + \frac{1}{\alpha_1}[s\varphi^*(s) - \varphi(0)], \\ P^*(s) = pf^*(s)[n_1(0) + R^*(s)]. \end{cases}$$

Решение этой системы дает

$$R^*(s) = \frac{\alpha_1 n_1(0)qg_1^*(s) + \alpha_2 n_2(0)g_2^*(s) + n_1(0)pf^*(s)[\alpha_2 g_2^*(s) - \alpha_2 + \alpha_1] + s\varphi^*(s) - \varphi(0)}{\alpha_1[1 - qg_1^*(s) - pf^*(s) + \alpha_2 pf^*(s)[1 - g_2^*(s)]]},$$

$$P^*(s) = \rho f^*(s) \frac{s \varphi^*(s) - \alpha_2 n_2(0) [1 - g_2^*(s)]}{\alpha_1 [1 - q g_1^*(s) - \rho f^*(s)] + \alpha_2 \rho f^*(s) [1 - g_2^*(s)]}.$$

Используя $R^*(s)$ и $P^*(s)$, можно найти изображения для функций $\bar{n}_1(t)$ и $\bar{n}_2(t)$:

$$\bar{n}_1^*(s) = \frac{1 - q g_1^*(s) - \rho f^*(s)}{s} \left\{ s \varphi^*(s) - \alpha_2 n_2(0) [1 - g_2^*(s)] \right\},$$

$$\bar{n}_2^*(s) = \frac{1 - g_2^*(s)}{s} \left\{ \rho f^*(s) s \varphi^*(s) + \alpha_1 n_2(0) [1 - q g_1^*(s) - \rho f^*(s)] \right\}.$$

Поскольку $f^*(s) = e^{-2s} [a_2 / (s + a_2)]^2$, то операция обращения для этих выражений не может быть выполнена точно в элементарных функциях. Попытаемся, однако, с помощью изображений функций $\bar{n}_1(t)$ и $\bar{n}_2(t)$ установить их асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$. Для простоты положим $n_2(0) = 0$ и рассмотрим

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{n}_2^*(s)}{\varphi^*(s)},$$

$$\frac{\bar{n}_2^*(s)}{\varphi^*(s)} = \frac{\rho f^*(s)}{\alpha_1 \frac{1 - q g_1^*(s) - \rho f^*(s)}{1 - g_2^*(s)} + \alpha_2 \rho f^*(s)};$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - q g_1^*(s) - \rho f^*(s)}{1 - g_2^*(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-q g_1^{*'}(s) - \rho f^{*'}(s)}{-g_2^{*'}(s)} = \frac{q \mu_1 + \rho \mu_2}{\mu_3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} l &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{n}_2^*(s)}{\varphi^*(s)} = \frac{\rho}{\alpha_1 \frac{q \mu_1 + \rho \mu_2}{\mu_3} + \alpha_2 \rho} = \\ &= \frac{\rho \mu_3}{\alpha_1 (q \mu_1 + \rho \mu_2) + \alpha_2 \rho \mu_3} = \frac{\rho \mu_3}{\alpha_1 \mu + (\alpha_2 - \alpha_1) \rho \mu_3}. \end{aligned}$$

Предположим, что $\varphi(t) = k t^n (k > 0, n \geq 0)$, $\varphi^*(s) = \frac{k \Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$.

Тогда функция $y(x) = l k \Gamma(n+1) x^{n+1}$ является возрастающей и стремится к ∞ вместе с x , $\bar{n}_2(s) \sim y(\frac{1}{s})$. Поскольку $\bar{n}_2(t) \geq 0$, то, используя теорему 108 ([6], с.210), можно показать,

$$\bar{n}_2(t) \sim \frac{y'(t)}{\Gamma(n+2)} = l k \frac{(n+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} t^n = l k t^n.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\varphi(t)$ является полиномом, то $\ell \varphi(t)$ является главным членом асимптотики $\bar{n}_2(t)$. В этом случае при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{n}_2(t)}{\bar{n}_1(t) + \bar{n}_2(t)} \rightarrow \frac{\alpha_1}{\frac{1}{\ell} + (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 M + (\alpha_2 - \alpha_1) P M_3 + (\alpha_1 - \alpha_2) P M_3} = P M_3 / M.$$

Таким образом, кривые удельного веса сотрудников, находящихся во 2-м состоянии, в общем контингенте персонала, полученные в соответствии с 1-й и 3-й моделями, являются асимптотически эквивалентными. Следует, однако, отметить, что примененная здесь общая тауберова теорема не дает оценки остаточного члена асимптотики.

Рассмотрим дискретный аналог приведенной модели, где время изменяется с шагом, равным одному году:

$$P_1 = p n_1(0) f(1),$$

$$R_1 = q n_1(0) g_1(1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} n_2(0) g_2(1) - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \right) P_1 + \frac{1}{\alpha_1} \Delta \varphi_1;$$

$$P_k = p [n_1(0) f(k) + \sum_{i=1}^{k-1} R_i f(k-i)];$$

$$R_k = q [n_1(0) g_1(k) + \sum_{i=1}^{k-1} R_i g_1(k-i)] + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} [n_2(0) g_2(k) + \sum_{i=1}^{k-1} P_i g_2(k-i)] -$$

$$- \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \right) P_k + \frac{1}{\alpha_1} \Delta \varphi_k, \quad k=2, 3, \dots;$$

$$n_1(k) = n_1(0) G_1(k) + \sum_{i=1}^k R_i G_1(k-i),$$

$$n_2(k) = n_2(0) G_2(k) + \sum_{i=1}^k P_i G_2(k-i);$$

где

$$\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1},$$

$$G_1(0) = G_2(0) = 1,$$

$$G_1(k) = 1 - \sum_{i=1}^k [q g_1(i) + p f(i)],$$

$$G_2(k) = 1 - \sum_{i=1}^k g_2(i), \quad k=1, 2, \dots$$

Кривые IV и V (рис. 2,3) представляют траектории изменения удельного веса сотрудников 2-й категории в общем контингенте персонала, рассчитанные с помощью приведенной конечно-разностной схемы при $\alpha_1 = 150$, $\alpha_2 = 250$, $n_1(0) = 1000$, $n_2(0) = 0$ и $\varphi_k = 150 \times 10^3$, $q_k = 150 \times 10^3 + 75 \times 10^3 k$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. ДУДНИКОВ Е.Е., ХАЙНИШ С.В., ЯНКОВ Д.Т. Анализ и усовершенствование функционирующих организационных систем : Обзор - М.: Международный центр научной и технической информации, 1979.
2. РОМАНОВ А.К., ТЕРЕХОВ А.И. Математические модели процессов мобильности: Обзор . Часть 2. Модели динамики кадрового персонала в организационных системах. - Новосибирск, 1978 - (Препринт/ВЦ СО АН СССР).
3. РОМАНОВ А.К., АНДРОСОВА Л.А., ФЕЛИНТЕР А.Ф. Научные кадры Сибирского отделения АН СССР. Методы и результаты статистического исследования. - Новосибирск: Наука, 1979.
4. BARTOLOMEW D.J. Stochastic models for social processes. - N.Y.: Wiley and sons, 1967.
5. КОКС Д., СМИТ В. Теория восстановления. - М.: Советское радио, 1967.
6. ХАРДИ Г. Расходящиеся ряды. - М.: ИЛ, 1951.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.03.1980 г.