Выпуск 26 (43) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Численные методы

УДК 51.330.115

РЕЛАКСАЦИЯ И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В.А.Булавский

Термин "релаксация" в данной статье употребляется в своем исходном значении – как смягчение напряженности каких-либо требований или ограничений. Если мы рассматриваем линейно-программную модель

$$min\{c'x : Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\},$$

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$ и неизвестное $x \in R^n$, то правую часть b можно трактовать как наши требования на производство учитываемых факторов. Вопрос о конкретном выборе требований b обычно решается за рамками модели. Часто это делается без достаточного учета реальной напряженности системы ограничений. Чтобы соразмерить выбор задания b с производственными возможностями, нужно ввести обратную связь между этим выбором и экономической оценкой производственной ситуации. Способу введения такой обратной связи и его использованию в задачах многокритериальной оптимизации и посвящена предлагаемая статья.

1. Задача квазилинейного программирования

Обозначим через b_0 наши "абсолютные" (возможно, недостижимые) требования, и пусть вектор y – это вектор оценок учитываемых факторов. В ответ на оценки y мы смягчаем наши требования, выбирая в качестве правой части вектор $b_0 - \beta(y)$, где β – *функция релаксации задания*. Фактически компоненты $\beta(y)$ не обязаны все быть неотрицательными: при данном векторе оценок требование на некоторые факторы может и возрасти, компенсируя уменьшение задания на другие, оолее

дефицитные.

Симметрично можно подойти к выбору вектора c. Трактуя компоненты искомого вектора x как интенсивности применения некоторых способов деятельности (технологий, производств или целых программ - в зависимости от масштабов постановки задачи), компоненты вектора c следует рассматривать как нормативные затраты в расчете на единичную интенсивность. Фактически же затраты, которые мы готовы нести на единицу интенсивности, могут зависеть от самой интенсивности x. Так что если через c_0 обозначить удельные нормативные затраты при нулевой интенсивности, то в качестве вектора c нужно взять вектор $c_0 + \gamma(x)$, где γ - функция релаксации нормативных затрат. Знак плюс снова надо понимать лишь условно: некоторые нормативные затраты могут уменьшаться, чтобы компенсировать увеличение затрат по другим способам деятельности.

Если суммировать сказанное, то мы получаем следующую систему связей между оценками y и планом x:

$$Ax \geqslant b_0 - \beta(y),\ y \geqslant 0; \qquad A'y \leqslant c_0 + \gamma(x),\quad x \geqslant 0. \tag{I}$$

Системы (I) отражают лишь требование допустимости плана и непротиворечивость оценок согласованным нормативным затратам. При этом подсчитанный по оценкам y результат нашей деятельности $y' \cdot (b_0 - \beta(y))$ не превосходит нормативных затрат $(c_0 + \gamma(x))' \cdot x$. Минимизация суммарных нормативных затрат в рамках рассматриваемой модели означала бы фактически минимизацию нашей деятельности, что едва ли может быть признано достойной целью. Точно так же максимизация валового результата $y'(b_0 - \beta(y))$ стимулировала бы в определенной степени стремление повысить оценки, а следовательно, и нормативные затраты. Такую одностороннюю цель также следует признать далеко не безупречной. Конечно, в силу условий связи (I) и минимизация деятельности, и завышение нормативных затрат будут ограничены определенными рамками. Однако разумность поставленной цели должна быть заложена в ней самой, а не являться побочным продуктом обстоятельств. Поэтому вместо экстремизации какой-либо целевой функции мы примем концепцию равновесия: факторы, имеющие положительную оценку, не должны производиться в избытке, а нормативные затраты фактически используемых способов деятельности

не должны быть завышенными. Это приводит нас к условиям дополнительности вида

$$y'(b_0-\beta(y))=y'Ax=(c_0+\gamma(x))'\cdot x. \qquad (2)$$

Задачу (I) с условиями дополнительности (2) мы назовем з а д а ч е й к в а з и л и н е й н о г о п р о г р а м м и р о в а н и я.

Задача (I)-(2) является частным случаем нелинейной задачи с условиями дополнительности [1,2]. Если положить

$$z=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \quad M(z)=\begin{bmatrix} \beta(y)+Ax \\ -A'y+\gamma(x) \end{bmatrix}, \quad q=\begin{bmatrix} b_0 \\ -c_0 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

то задачу квазилинейного программирования можно записать в виде

$$z\geqslant 0, \quad M(z)\geqslant q, \quad z'\cdot M(z)=z'\cdot q.$$

Однако специальный вид этой задачи позволяет доказать теоремы существования и разрабатывать специальные методы решения.

Поставленную задачу квазилинейного программирования можно также трактовать как способ решения модели равновесия с одним участником, уравновешивающим свои предпочтения, которые зависят как от получаемого набора благ b , так и от производимых при этом затрат c . Именно, предположим, что л о к а л ь н ы е п р е д п о ч т е н и я участника определяются дифференциальной формой

$$(b_0-\beta(y)-Ax)'\cdot dy-(c_0+\gamma(x)-A'y)'\cdot dx \qquad (4)$$

в том смысле, что движение по некоторой кривой в пространстве $R^m\times R^n$ пар (y,x) соответствует локальным предпочтениям, если дифференциальная форма (4) вдоль этой кривой положительна. Тогда решение задачи (I)-(2) соответствует стационарной точке наших локальных предпочтений на множестве $R^m_+\times R^n_+$.

Если дифференциальная форма

$$(b_0-\beta(y))'\cdot dy-(c_0+\gamma(x))'\cdot dx \qquad (5)$$

является точной, т.е. существуют функции $V(y)$ и $W(x)$, для которых

$$b_0-\beta(y)=\frac{dV}{dy}, \qquad c_0+\gamma(x)=\frac{dW}{dx},$$

то получаем обычную задачу о равновесии для функции

$$U(x,y)=V(y)+W(x)-y'Ax.$$

Рассматриваемая задача квазилинейного программирования в этом случае сводится к отысканию седловой точки функции $U(x,y)$ на $R_+^n \times R_+^m$. В общем же случае такое сведе́ние оказывается невозможным.

Отметим, что дифференциальную форму (5) можно также трактовать как наши локальные предпочтения в предположении, что мы игнорируем производственные возможности. Непотенциальность этих локальных предпочтений фактически означает их глобальную нетранзитивность.

2. Существование решения при линейной релаксации

Рассмотрим сначала линейный случай, когда $\beta(y)=By$, $\gamma(x)=Cx$, а матрицы B и C играют роль коэффициентов эластичности. Если положить

$$D=\begin{bmatrix} B & A \\ -A' & C \end{bmatrix} \tag{6}$$

то задача (3) превращается в линейную задачу с условиями дополнительности:

$$z \geqslant 0, \quad Dz \geqslant q, \quad z'Dz = z'q. \tag{7}$$

Наряду с задачей (7) рассмотрим однородную задачу

$$\zeta \geqslant 0, \quad D\zeta \geqslant 0, \quad \zeta' D \zeta = 0. \tag{8}$$

Для разрешимости задачи (7) при любой правой части q общепринятым является требование положительности всех главных миноров матрицы D .В частности, это́ будет так, если матрица D , не являясь обязательно симметричной, положительно-определена. Для наших целей этот критерий требует уточнения.

ЛЕММА I. *Пусть матрица D является положительно-полуопределенной (без требования симметрии). Тогда для разрешимости задачи (7) необходимо и достаточно, чтобы для всех решений однородной задачи (8) выполнялось неравенство $\zeta' q \leq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала необходимость. Если ζ удовлетворяет соотношениям (8), то $\zeta'(D+D')\zeta=0$, и так как симметричная матрица $D+D'$ полуопределена по условию леммы, то $(D+D')\zeta=0$. Следовательно, $D'\zeta\leq 0$. Поэтому в случае разрешимости задачи (7) имеем $\zeta'q\leq\zeta'Dz\leq 0$, поскольку $z\geqslant 0$.

Для доказательства достаточности отметим прежде всего, что в силу условий доказываемой леммы совместна система

$$z\geqslant 0,\quad Dz\geqslant q. \tag{9}$$

Действительно, из условий $\zeta\geqslant 0$, $\zeta'D\leqslant 0$ и положительной полуопределенности матрицы D следует, что ζ решает однородную задачу (8), и $\zeta'q\leqslant 0$. Таким образом, система (9) совместна. Поэтому задача минимизации выпуклой квадратичной функции $z'Dz-z'q$ на множестве решений системы (9), где эта функция неотрицательна, имеет решение z, являющееся [I] решением задачи (7). Лемма доказана.

Если системы

$$x\geqslant 0,\ Ax\geqslant b_0;\qquad y\geqslant 0,\ A'y\leqslant c_0 \tag{10}$$

совместны, то для всякого ζ, удовлетворяющего первым двум соотношениям (8), будет $\zeta'q\leqslant 0$. Поэтому для разрешимости линейной задачи (7) достаточно, чтобы матрицы B и C были положительно-полуопределенными. В общем случае в системах (10) можно выделить совместные подсистемы, разбив множества индексов по схеме

$$M=\{1,2,\dots,m\}=M_0\cup M_1,\quad N=\{1,2,\dots,n\}=N_0\cup N_1 \tag{11}$$

и предположив совместными системы

$$x\geqslant 0,\ A[M_0,N]\cdot x\geqslant b_0[M_0];\quad y\geqslant 0,\ A'[N_0,M]\cdot y\leqslant c_0[N_0]. \tag{12}$$

Соответственно матрицы B и C разобьются на четыре клетки каждая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что квадратная матрица $S(Q,Q)$, где Q - множество индексов ее строк и столбцов, является строго релаксационной относительно множества $Q_1\subset Q$, если выполнены следующие условия (в которых $Q_0=Q\setminus Q_1$):

I) матрица S положительно-полуопределена (без требования симметрии);

2) подматрица $S[Q_1, Q_1]$ положительно-определена для неотрицательных векторов;

3) матрица $S[Q_0, Q_1]+S'[Q_0, Q_1]$ неотрицательная;

4) матрица $S[Q_1, Q_0]$ неположительная;

5) из условий $z[Q_0]\geqslant 0$, $z'[Q_0]\cdot S[Q_0,Q_0]\cdot z[Q_0]=0$ следует, что $S[Q_0,Q_0]\cdot z[Q_0]\leqslant 0$.

ТЕОРЕМА I. Если системы (I2) совместны и матрицы $B[M,M]$ и $C[N,N]$ являются строго релаксационными относительно множеств $M_1=M\setminus M_0$ и $N_1=N\setminus N_0$, то задача (7) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что пара $\zeta=(\eta,\xi)$ решает однородную задачу (8). Тогда $0=\zeta'D\zeta=\eta'B\eta+\xi'C\xi$ и, следовательно, $\eta'B\eta=\xi'C\xi=0$. Но

$$\eta'B\eta=\eta'[M_0]\cdot B[M_0,M_0]\cdot\eta[M_0]+\eta'[M_1]\cdot B[M_1,M_1]\cdot\eta[M_1]+$$
$$+\eta'[M_0]\cdot(B[M_0,M_1]+B'[M_0,M_1])\cdot\eta[M_1].$$

В силу строгой релаксационности матрицы B каждое из трех слагаемых неотрицательно и, следовательно, все они равны нулю. Поэтому $\eta[M_1]=0$ и $B[M,M_0]\cdot\eta[M_0]\leqslant 0$. Аналогично устанавливается, что $\xi[N_1]=0$ и $C[N,N_0]\cdot\xi[N_0]\leqslant 0$. Из среднего соотношения (8) тогда получаем, что

$$A[M,N_0]\cdot\xi[N_0]\geqslant -B[M,M_0]\cdot\eta[M_0]\geqslant 0,$$
$$A'[N,M_0]\cdot\eta[M_0]\leqslant C[N,N_0]\cdot\xi[N_0]\leqslant 0.$$

Поскольку системы (I2) совместны, то отсюда вытекает, что

$$\eta'b_0=\eta'[M_0]\cdot b_0[M_0]\leqslant 0,\qquad \xi'c_0=\xi'[N_0]\cdot c_0[N_0]\geqslant 0,$$

т.е. $\zeta'q=\eta'b_0-\xi'c_0\leqslant 0$. Используя лемму I, заключаем, что задача (7) разрешима. Теорема доказана.

Отметим, что для линейного случая точность формы (5) эквивалентна симметрии матриц B и C.

3. Существование решения при нелинейной релаксации

Сделаем два основных предположения относительно функций релаксации $\beta(y)$ и $\gamma(x)$. Первое состоит в том, что отображения $\beta: R^m\to R^m$ и $\gamma: R^n\to R^n$ монотонные, т.е. при всех y_1, $y_2\in R^m$ и $x_1, x_2\in R^n$

$$(y_1-y_2)'\cdot(\beta(y_1)-\beta(y_2))\geqslant 0,\qquad (x_1-x_2)'\cdot(\gamma(x_1)-\gamma(x_2))\geqslant 0.$$

Грубо говоря, для функции β это означает, что "в целом" с возрастанием оценок спрос на блага не возрастает. Аналогичная трактовка возможна и для функции γ. Хотя эти предположения выполняются далеко не всегда, они представляются достаточно естественными. В дифференцируемом случае, который мы и будем рассматривать, монотонность означает положительную полуопределенность матрицы Якоби. Как всюду в этой статье, симметрия матрицы Якоби при этом не предполагается.

В качестве второго предположения мы потребуем, чтобы функции $\beta(y)$ и $\gamma(x)$ были вогнутые. Содержательно это означает, что с ростом оценок (и соответствующим ростом уступок) эластичность наших требований не должна возрастать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция $f: R^p \to R^p$ непрерывно дифференцируема и покомпонентно вогнута. Обозначим через f_x ее матрицу Якоби в точке x, и пусть $P_1 \subset \{1,2,\ldots,p\}$. Положим

$$\alpha(f,t)=\inf\{\eta' f_x[P_1,P_1]\cdot\eta:\ \|\eta\|=1,\ \|x\|\leq t\}$$

(используется евклидова норма). Функция f называется строго релаксационной относительно подмножества P_1, если

1) матрица Якоби f_x является при каждом x строго релаксационной относительно P_1 (см. определение 1);

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} t\cdot\alpha(f,t)=+\infty.$

В дальнейшем нам потребуется также

УСЛОВИЕ ЛИНЕЙНОСТИ. В матрице Якоби функций релаксации подматрицы $\beta_y[M_1,M_0]$ и $\gamma_x[N_1,N_0]$ нулевые, а подматрицы $\beta_y[M_0,M]$ и $\gamma_x[N_0,N]$ постоянны.

Таким образом, собственно нелинейную зависимость мы допускаем лишь для факторов и производственных способов с номерами из M_1 и N_1, причем релаксация этих факторов зависит лишь от $y[M_1]$ и $x[N_1]$. В этом отношении рассматриваемый нелинейный случай не вполне включает в себя случай линейных функций релаксации: в определении 1 п. 4) теперь заменяется условием $S[Q_1,Q_0]=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система

$$u\geqslant 0,\ A_0u\geqslant b_0;\quad v\geqslant 0,\ A_0'v\leqslant c_0 \tag{13}$$

называется устойчиво совместной, если существует $\varepsilon > 0$, при котором совместна система

$$u \geqslant 0,\ [A_0 - \varepsilon \cdot e \cdot f'] \cdot u - \varepsilon \cdot [e \cdot e'] \cdot v \geqslant b_0, \qquad (14)$$
$$v \geqslant 0,\ \varepsilon \cdot [f \cdot f'] \cdot u + [A_0 + \varepsilon \cdot e \cdot f']' v \leqslant c_0,$$

где e и f – векторы надлежащей размерности, все компоненты которых равны единице.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть система (13), где $A_0 = A[M_0, N_0]$, $b_0 = b_0[M_0]$, $c_0 = c_0[N_0]$, устойчиво совместна, функции $\beta(y)$ и $\gamma(x)$ строго релаксационные относительно множеств M_1 и N_1, $\beta(0)=0$, $\gamma(0)=0$ и выполнено условие линейности. Тогда задача (1)-(2) имеет решение.*

Доказательству теоремы 2 предпошлем две леммы. Выберем некоторую пару $\bar{z} = (\bar{y}, \bar{x}) \in R_+^m \times R_+^n$ и, обозначив через $B = B(\bar{y})$ и $C = C(\bar{x})$ матрицы Якоби функций β и γ в выбранных точках, рассмотрим линеаризованную задачу

$$By + Ax \geqslant b_0 - \beta(\bar{y}) + B\bar{y}, \quad y \geqslant 0, \qquad (15)$$

$$-A'y + Cx \geqslant -c_0 - \gamma(\bar{x}) + C\bar{x}, \quad x \geqslant 0, \qquad (16)$$

$$y' \cdot (By + Ax) = y' \cdot (b_0 - \beta(\bar{y}) + B\bar{y}), \qquad (17)$$

$$x' \cdot (-A'y + Cx) = x' \cdot (-c_0 - \gamma(\bar{x}) + C\bar{x}). \qquad (18)$$

Множество решений этой задачи обозначим через $G(\bar{z})$.

В соответствии с разбиениями (11) каждую пару $z = (y, x)$ можно представить в виде $z = z_1 + z_0$, где $z_1 = (y_1, x_1)$, $z_0 = (y_0, x_0)$, причем $y_1[M_0] = 0$, $x_1[N_0] = 0$, $y_0[M_1] = 0$ и $x_0[N_1] = 0$. В дальнейшем нижние индексы 0 и 1 будут обозначать описанное разложение.

Ввиду условия линейности задача (15)-(18) фактически зависит лишь от составляющей $\bar{z}_1$, так как функции релаксации нелинейны только по этим переменным. В частности, это означает, что правые части неравенств (15) и (16) с компонентами из M_0 и N_0 постоянны и равны соответсвенно $b_0[M_0]$ и $-c_0[N_0]$. Поэтому в предположениях теоремы 2 задача (15)-(18) удовлетворяет условиям теоремы 1, и множество $G(\bar{z})$ непустое. Если через q обозначить правую часть системы (15)-(16), а через

D - матрицу ее левой части, то множество $G(\bar{z})$ описывается системой

$$z \geqslant 0, \quad Dz \geqslant q, \quad z'Dz \leqslant z'q$$

с положительно-полуопределенной матрицей D. Поэтому $G(\bar{z})$ - выпуклое и замкнутое множество. Ввиду непрерывной зависимости ограничений от $x, y, \bar{x}$ и $\bar{y}$ отображение $\bar{z} \to G(\bar{z})$ имеет замкнутый график. Для применения теоремы Какутани остается обеспечить компактность некоторого инвариантного выпуклого множества.

ЛЕММА 2. Если выполнены условия теоремы 2, то при всяком $L_1 > 0$ существует такое число $q(L_1)$, что при $\|\bar{z}\| \leqslant L_1$ в $G(\bar{z})$ найдется точка z, для которой $\|z\| \leqslant q(L_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду непустоты и замкнутости каждого множества $G(a)$ мы можем выбрать элемент $z^a \in G(a)$, минимальный по норме. Предположим, что для некоторого L_1 числа $q(L_1)$ не найдется. Ввиду компактности множества $\{a \in R^m_+ \times R^n_+ : \|a\| \leqslant L_1\}$ тогда найдется последовательность $\{a\} \subset R^m_+ \times R^n_+$, сходящаяся к некоторому $\bar{z}$ и такая, что $\lim \|z^a\| = +\infty$. Можно считать при этом, что существует $\lim (z^a / \|z^a\|) = \zeta = (\eta, \xi) \geqslant 0$.

Рассмотрим задачу (15)-(18) для $\bar{z} = a$ и обозначим через q_a и D_a правую часть и матрицу левой части этой задачи. Тогда

$$z^a \geqslant 0, \quad D_a \cdot z^a \geqslant q_a, \quad (z^a)' \cdot D_a \cdot z^a = (z^a)' q_a . \tag{19}$$

Разделив эти соотношения на $\|z^a\|$ и $\|z^a\|^2$, в пределе получим, что направление ζ удовлетворяет соотношениям (8). В силу релаксационности матриц B и C, как и при доказательстве теоремы 1, тогда установим, что

$$\eta[M_1] = 0, \quad \xi[N_1] = 0. \tag{20}$$

При этом $\zeta[k] > 0$, лишь если $z^a[k] > 0$, и $D[s, M \cup N] \cdot \zeta > 0$, лишь если $D_a[s, M \cup N] \cdot z^a > 0$. Однако в силу условия линейности и равенств (20) $D\zeta = D_a \zeta$, $D'\zeta = D'_a \zeta$ и $\zeta' q = \zeta' q_a$. Поскольку задача (15)-(18) или, что то же, задача (7) имеет решение, то в силу леммы 1 $\zeta' q \leqslant 0$. Кроме того, при достаточно малых $\delta > 0$ левые два неравенства в (19) останутся выполненными, если z^a заменить на $z^a - \delta \zeta$. При этом

$$0 \geqslant (z^a - \delta \zeta)' q_a - (z^a - \delta \zeta)' D_a \cdot (z^a - \delta \zeta) =$$
$$= -\delta \zeta' q_a + \delta \zeta' (D_a + D_a') \cdot z^a - \delta^2 \zeta' D_a \zeta =$$
$$= -\delta \zeta' q + \delta \zeta' (D + D') \cdot z^a - \delta^2 \zeta' D \zeta \geqslant 0.$$

Таким образом, сдвинутая точка $z^a - \delta \zeta$ удовлетворяет при достаточно малых δ соотношениям (I9), т.е. принадлежит $G(a)$. Ввиду монотонности евклидовой нормы это противоречит выбору z^a. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 3. В условиях теоремы 2 существует такое число L_2, что при $\|\bar{z}_1\| \geqslant L_2$ для любого $z \in G(\bar{z})$ оказывается $\|z_1\| \leqslant \|\bar{z}_1\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такая последовательность

$$\{\bar{z}_1, z\}, \tag{2I}$$

что $z \in G(\bar{z}_1)$, $\lim \|\bar{z}_1\| = +\infty$ и $\|z_1\| > \|\bar{z}_1\|$. Мы снова, чтобы не загромождать формулы, опускаем индексацию последовательности (2I). Взяв, если нужно, подпоследовательность, можно считать, что существует $\lim (z / \|z\|) = \zeta = (\eta, \xi) \geqslant 0$. Заметим, что $\|z\| \geqslant \|z_1\| > \|\bar{z}_1\|$, и поэтому $\lim \|z\| = +\infty$.

Используя (I5)-(I8), релаксационность матриц B и C, а также вогнутость функций β и γ, получим

$$\alpha(\beta, \|\bar{y}_1\|) \cdot \|y_1\|^2 + \alpha(\gamma, \|\bar{x}_1\|) \cdot \|x_1\|^2 \leqslant y_1' B y_1 + x_1' C x_1 \leqslant$$
$$\leqslant y' B y + x' C x = y'(b_0 - \beta(\bar{y}) + B\bar{y}) + x'(-c_0 - \gamma(\bar{x}) + C\bar{x}) \leqslant$$
$$\leqslant y'(b_0 - \beta(0)) + x'(-c_0 + \gamma(0)) = y' b_0 - x' c_0 \leqslant \|q\| \cdot \|z\|,$$

где вектор q определен в (3). Таким образом, если на некоторой подпоследовательности окажется $\|y_1\| / \|z\| \geqslant \delta > 0$, то на этой подпоследовательности

$$\alpha(\beta, \|\bar{y}_1\|) \leqslant \|q\| \cdot \|z\| / \|y_1\|^2 \leqslant \|q\| / \delta^2 \cdot \|z\|$$

и, следовательно, $\alpha(\beta, \|\bar{y}_1\|) \to 0$, так что $\|\bar{y}_1\| \to \infty$. Но тогда неравенство

$$\alpha(\beta, \|\bar{y}_1\|) \cdot \|\bar{y}_1\| \leqslant \alpha(\beta, \|\bar{y}_1\|) \cdot \|z\| \leqslant \|q\| / \delta^2$$

противоречит релаксационности функции β. Поэтому $\lim \|y_1\| / \|z\| = 0$. Аналогично устанавливается, что $\lim \|x_1\| / \|z\| = 0$.

Таким образом, $\eta[M_1]=0$ и $\xi[N_1]=0$.

В силу условия линейности и условий дополнительности из (I5) получаем

$$y_0'By+y_0'Ax=y_0'\cdot b_0.$$

Разделив это неравенство на $\|z\|^2$, в пределе найдем

$$\eta'[M_0]\cdot B[M_0,M_0]\cdot\eta[M_0]+\eta'[M_0]\cdot A[M_0,N_0]\cdot\xi[N_0]=0.$$

Аналогично из (I6) выводится равенство

$$\xi'[N_0]\cdot C[N_0,N_0]\cdot\xi[N_0]-\xi'[N_0]\cdot A'[N_0,M_0]\cdot\eta[M_0]=0.$$

Сложив эти равенства и использовав релаксационность матриц B и C, получим, что

$$B[M_0,M_0]\cdot\eta[M_0]\leq 0,\qquad C[N_0,N_0]\cdot\xi[N_0]\leq 0.$$

Поскольку к тому же $\eta[M_1]=0$ и $\xi[N_1]=0$, то для всякого $\varepsilon>0$ на достаточно далеких членах последовательности (2I)

$$B[M_0,M]\cdot y+A[M_0,N_1]\cdot x_1-b_0[M_0]\leq\varepsilon\cdot e\cdot(f'\cdot x_0+e'\cdot y_0),$$

где e и f – векторы с единичными компонентами. Учитывая (I5), отсюда получим

$$(A_0+\varepsilon\cdot e\cdot f')\cdot x_0+\varepsilon\cdot e\cdot e'\cdot y_0\geq 0,$$

и аналогично

$$\varepsilon\cdot f\cdot f'\cdot x_0-(A_0'-f\cdot e')\cdot y_0\geq 0.$$

Ввиду совместности систем (I4) при достаточно малом ε оказывается, что $y_0'b_0-x_0'c_0\leq 0$. Поэтому

$$\alpha(\beta,\|\bar{y}_1\|)\cdot\|y_1\|^2+\alpha(\gamma,\|\bar{x}_1\|)\cdot\|x_1\|^2\leq$$
$$\leq y'\cdot b_0-x'\cdot c_0\leq y_1'\cdot b_0-x_1'\cdot c_0=z_1'\cdot q.$$

Положим $\alpha=min\{\alpha(\beta,\|\bar{y}_1\|),\ \alpha(\gamma,\|\bar{x}_1\|)\}$. Тогда $\alpha\cdot\|z_1\|^2\leq\|q\|\cdot\|z_1\|$, т.е. $\alpha\cdot\|z_1\|\leq\|q\|$. Но ввиду релаксационности функций β и γ и того, что $\lim\|\bar{z}_1\|=+\infty$, получаем $\lim\alpha(\beta,\|\bar{y}_1\|)\cdot\|\bar{z}_1\|=\lim\alpha(\gamma,\|\bar{x}_1\|)\cdot\|\bar{z}_1\|=+\infty$. Тем более, $\lim\alpha\cdot\|z_1\|=+\infty$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Выберем L_2 согласно лемме 3 и положим $L_1=max\{L_2,q(L_2)\}$, $L_0=max\{L_1,q(L_1)\}$, $H=\{z\in R_+^m\times R_+^n:\ \|z_1\|\leq L_1,\ \|z_0\|\leq L_0\}$. Если $\bar{z}\in H$ и $\|\bar{z}\|<L_2$, то существует такой $z\in G(\bar{z})$, что $\|z_1\|\leq\|z\|\leq q(L_2)\leq L_1$ и $\|z_0\|\leq\|z\|\leq L_1\leq L_0$. Если же $\bar{z}\in H$ и $\|\bar{z}_1\|>L_2$, то суще-

ствует $z \in G(\bar{z})$ такой, что $\|z_*\| \leqslant \|z\| \leqslant q(L_1) \leqslant L_0$, и для этого z в силу выбора константы L_1 оказывается $\|z_1\| \leqslant \|\bar{z}_1\| \leqslant \leqslant L_1$. Таким образом, при $\bar{z} \in H$ множество $G(\bar{z}) \cap H$ непустое. Ввиду выпуклости и компактности H уменьшенное отображение $z \to G(z) \cap H$ удовлетворяет на H условиям теоремы Какутани, и существует $\bar{z} \in G(\bar{z}) \cap H$. Если в (15)-(18) положить $y = \bar{y}$ и $x = \bar{x}$, то для пары $(\bar{y}, \bar{x})$ эти соотношения превращаются в (I)-(2). Теорема доказана.

Отметим два случая, когда система (I3) в формулировке теоремы 2 оказывается устойчиво совместной. Во-первых, это будет так, если у системы (I3) существуют решения $\bar{u} \geqslant 0$ и $\bar{v} > 0$, удовлетворяющие строгим неравенствам

$$A_0 \bar{u} > b_0, \quad A_0' \bar{v} < c_0.$$

Второй случай - это тот, когда либо $M_0 = \phi$ и $c_0[N_0] > 0$, либо $N_0 = \phi$ и $b_0[M_0] \leqslant 0$. В этом случае системы (I3) и (I4) обе выполняются тривиальным образом (матрица A_0 пустая).

4. Многокритериальные задачи

Чтобы не усложнять изложение деталями, мы в этом пункте ограничимся применением лишь линейной релаксации. Использование результатов предыдущего пункта, касающихся нелинейной релаксации, ничем принципиально не отличается. Ограничение линейным случаем оправдано еще и потому, что фактическое построение достаточно обоснованных функций релаксации, более или менее прилично отражающих реальные предпочтения, - задача сама по себе не из легких. Такие функции реально строить лишь в окрестности исследуемой точки, а при больших сдвигах их следует уточнять.

Рассмотрим сначала традиционную постановку задачи векторной оптимизации. Пусть задана линейно-программная модель с ограничениями

$$A[M_0, N_0] \cdot x[N_0] \geqslant b_0[M_0], \quad x[N_0] \geqslant 0, \qquad (22)$$

и вектором нормативных затрат $c_0[N_0]$. Минимизация суммарных нормативных затрат в наши планы не входит: нормативные затраты показывают лишь, какую сумму мы считаем целесообразным затратить, если будет признано необходимым использовать данный технологический способ. Вопрос же о целесообразности плана

$x[N_0]$ определяется совокупностью критериев, задаваемых линейным оператором $A[M_1,N_0]$. Таким образом, при ограничениях (22) мы хотели бы максимизировать каждую из компонент столбца $A[M_1,N_0]\cdot x[N_0] = b[M_1]$. Поскольку эти пожелания, как правило, противоречивы, то дело часто тем или иным способом сводят к максимизации некоторой линейной функции. Наиболее распространенным способом является использование весовых коэффициентов $\lambda[M_1]$ для перехода к максимизации линейной функции

$$(\lambda[M_1]\cdot A[M_1,N_0])\cdot x[N_0] \qquad (23)$$

или же назначение "идеальной точки" $b_0[M_1]$ и минимизация отклонения, оцениваемого некоторой функцией $\varphi[(b_0[M_1]-b[M_1])^+]$.

Подход, предлагаемый в данной статье, в известной степени ближе к последнему. Однако вместо минимизации некоторой штрафующей функции мы используем релаксацию $\beta(y)$. Помимо того, что данный подход отличается большей общностью (не предполагается потенциальность нашей релаксации), в нем явно учитывается экономическая сторона дела: релаксация зависит от оценок, а следовательно, от степени напряженности требований, выраженных точкой $b_0[M_1]$. Кроме того, сами оценки y отражают не только производственные обстоятельства, но и степень нашей неудовлетворенности планом (недобором до $b_0[M_1]$). Такая взаимосвязь позволяет надеяться, что предлагаемый способ решения задачи векторной оптимизации окажется более реалистичным.

Выберем матрицу $B[M_1,M_1]$ так, чтобы ее симметризация $(B+B')/2$ была положительно-определенной, и назначим желательные уровни $b_0[M_1]$ показателей качества. Тогда решением нашей многокритериальной задачи можно считать решение задачи квазилинейного программирования с ограничениями

$$A[M_0,N_0]\cdot x[N_0] \geqslant b_0[M_0], \qquad x[N_0]\geqslant 0,$$

$$A[M_1,N_0]\cdot x[N_0] \geqslant b_0[M_1]-B[M_1,M_1]\cdot y[M_1],$$

$$A'[N_0,M_0]\cdot y[M_0]+A'[N_0,M_1]\cdot y[M_1] \leqslant c[N_0], \quad y[M_0\cup M_1]\geqslant 0,$$

к которым надо еще дописать условие дополнительности

$$c'[N_0]\cdot x[N_0]=y'[M_0\cup M_1]\cdot A[M_0\cup M_1,N_0]\cdot x[N_0] =$$
$$=y'[M_0\cup M_1]\cdot b_0[M_0\cup M_1].$$

Если система (22) совместна и на множестве ее решений форма $c[N_0]\cdot x[N_0]$ (суммарные нормативные затраты) ограничена сни-

зу, то выполнены условия теоремы I, и решение поставленной задачи существует. Обозначим его через $\bar{y}[M]$, $\bar{x}[N_o]$, где $M = M_o \cup M_1$.

Легко видеть, что $\bar{x}[N_o]$ максимизирует форму (23) при ограничениях (22), если положить $\lambda[M_1] = \bar{y}'[M_1]$. Таким образом, если $\bar{y}[M_1] > 0$, то мы получаем точку на границе Парето области достижимости в пространстве целей. Если же $\bar{y}[M_1] = 0$, то это означает, что назначенная нами желаемая точка $b_o[M_1]$ достижима, и дело сводится только к минимизации суммарных нормативных затрат. Чтобы исключить этот случай, можно задать на оценки $y[M_1]$ априорные ограничения

$$G[\hat{N}_o, M_1]\cdot y[M_1] \geqslant g[\hat{N}_o]. \qquad (24)$$

Формально это сведется к тому, что расширится множество N_o и мы будем иметь уже не $N = N_o$, а $N = N_o \cup \hat{N}_o$. При этом нужно положить

$$A[M_1, \hat{N}_o] = -G[M_1, \hat{N}_o], \quad A[M_o, \hat{N}_o] = 0, \quad c[\hat{N}_o] = -g[\hat{N}_o]$$

и добавить неизвестные $x[\hat{N}_o]$. К примеру, можно взять $\hat{N}_o = M_1$ и в качестве $G[M_1, M_1]$ выбрать единичную матрицу. Тогда $g[M_1]$ будут задавать минимальные оценки факторов, избранных в качестве мультицели, а величина $x[M_1]$ даст сдвиг в сторону большей жесткости наших исходных требований $b_o[M_1]$. Конечно, ограничения (24) не должны противоречить системе $A'[N_o, M]\cdot y[M] \leqslant c[N_o]$.

В реальной постановке задачи первое решение обычно следует рассматривать как пристрелочное, после получения которого уточняются некоторые ограничения, желаемая точка $b_o[M_1]$ и коэффициенты эластичности $B[M_1, M_1]$. Возможных способов такого уточнения весьма много. Здесь мы их рассматривать не будем, а лишь отметим, что решение задачи с многими критериями описанной методикой близко к способу решения несовместных систем, опубликованному автором ранее [3].

В заключение рассмотрим вариант постановки задачи многокритериальной оптимизации, приводящей к симметричной постановке задачи квазилинейного программирования. Предположим, что помимо выделения группы факторов (с индексами M_1), которые мы избрали в качестве критериев оптимизации, технологические способы также разделены нами на две группы. Технологические способы с индексами из множества N_o — это традиционные способы

$A[M,N_0]$ с установившимися нормативными затратами $c_0[N_0]$ (которые в дальнейшем мы, конечно, вправе изменить, но относительно которых у нас нет особых колебаний). Технологические же способы с номерами из множества N_1 – новые (скажем, использующие новую технику, на которую еще нет установившейся цены). Поэтому для столбцов $A[M,N_1]$ мы может задать лишь минимальные необходимые нормативные затраты $c_0[N_1]$. Вместе с тем, реализация плана, предусматривающего использование новаторских способов, требует стимулирования (повышенные цены на новую технику, повышенные затраты на внедрение новой технологии и т.п.). Хотя само это стимулирование происходит вне рамок нашей модели (мы моделируем не реализацию, а лишь выбор плана), оно должно найти отражение в назначаемых нормативных затратах. Таким образом, мы получаем ситуацию, сходную с той, что имели при выборе коэффициентов эластичности $B[M_1,M_1]$. Теперь мы должны из внемодельных соображений назначить связь между интенсивностью использования новых способов и нормативными затратами. Ограничиваясь снова линейным случаем (хотя нелинейность здесь, возможно, и более необходима, чем для функции релаксации $\beta(y)$), мы должны выбрать положительно-определенную (но не обязательно симметричную) матрицу $C[N_1,N_1]$ и в качестве нормативных затрат взять $c[N_0]=c_0[N_0]$ и $c[N_1]=c_0[N_1]+C[N_1,N_1]\cdot x[N_1]$. Мы таким образом приходим к задаче квазилинейного программирования в симметричной постановке, рассмотренной в п.2:

$$A[M_0,N]\cdot x[N] \geqslant b_0[M_0], \qquad x[N] \geqslant 0,$$

$$A[M_1,N]\cdot x[N] \geqslant b_0[M_1]-B[M_1,M_1]\cdot y[M_1],$$

$$A'[N_0,M]\cdot y[M] \leqslant c_0[N_0], \qquad y[M] \geqslant 0,$$

$$A'[N_1,M]\cdot y[M] \leqslant c_0[N_1]+C[N_1,N_1]\cdot x[N_1].$$

К этим неравенствам нужно еще добавить условия дополнительности. Здесь, как и раньше, $N=N_0\cup N_1$, $M=M_0\cup M_1$.

В планы данной статьи не входило рассмотрение способов получения реальной исходной информации и, в частности, матриц эластичности $B[M_1,M_1]$ и $C[N_1,N_1]$. Мы хотели лишь описать сам предлагаемый математический аппарат и некоторые принципы его использования. Следует признать, что получение обоснованных матриц эластичности несколько труднее, видимо, чем получение технологических коэффициентов $A[M,N]$, и во всяком слу-

чае менее привычно для постановок линейных задач. Однако всякое усложнение модели требует и дополнительной информации. И если мы хотим реально решать задачи в условиях не вполне четко (численно) поставленных целей, мы должны научиться моделировать наше отношение к достигнутому результату, а не только подсчитывать, во что нам этот результат обошелся. Думается, что особенно ясно это должно проявляться при планировании мероприятий, касающихся крупных природных объектов. Но и в менее масштабных моделях такой подход может найти применение. Заметим, что ошибки в матрицах эластичности в ряде случаев, видимо, терпимее, чем отсутствие этих матриц в модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. COTTLE R.W. On a problem in linear inequalities. - J. London Math. Soc., 1968, v.43, part 3, N171, pp.378-384.
2. EAVES B.C. The linear complementarity problem. - Management Sci., 1971, N 17, pp.68-75.
3. БУЛАВСКИЙ В.А. Релаксация в задачах с неравенствами. - Оптимизация, 1979, вып. 23(40), с. 32-40.