Выпуск 26 (43) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Численные методы

УДК 512.25

ПРИВЕДЕНИЕ К БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ МАТРИЦЫ С СИММЕТРИЧНО РАЗВЕТВЛЕННОЙ БЛОЧНОСТЬЮ

Р.А.Звягина

Для решения систем с матрицей, имеющей симметрично разветвленную блочную структуру, наиболее естественными считаются алгоритмы, основанные на ее представлении в виде блочно-треугольной матрицы, умноженной справа и слева на некоторые преобразования [1,2]. Соблюдение специальных структурных требований при таком разложении обеспечивает более или менее полный учет специфики задачи. Однако при изменении базисной матрицы (как, например, в линейном программировании при добавлении матрицы ранга 1) исправление структурных нарушений требует проведения на каждом шаге довольно трудоемких процедур [3]. Поэтому в некоторых случаях при изменении базисной матрицы можно накапливать преобразования соответствующей обратной матрицы, а учет специфики задачи возложить на так называемую процедуру повторения. В мультипликативных алгоритмах эта процедура, как правило, состоит в обновлении набора мультипликаторов для некоторого базиса A_0, принимаемого за начальный, с более или менее рациональным выбором их порядка. В нашем случае процедура повторения является фактическим приведением начальной базисной матрицы A_0 к блочно-треугольному виду.

Таким образом, если A - текущая базисная матрица, то обратная к ней имеет вид:

$$A^{-1} = L_m \cdot L_{m-1} \cdot \ldots \cdot L_1 \cdot A_0^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n ,$$

где L_k и P_r - соответственно лево- и правосторонние накоп-

ленные преобразования. Использование матрицы A_0^{-1} для решения систем здесь заменяется тем алгоритмом, который определяется выбором хранимой информации в процессе приведения A_0 к блочно-треугольному виду. Как будет видно из дальнейшего, этот выбор согласуется с разработанными ранее алгоритмами [I-3].

Описываемая ниже процедура повторения может оказаться полезной и при использовании этих алгоритмов в чистом виде: например, для обновления информации о текущем базисе, если есть опасность накапливания ошибок округления, или для начала решения задачи, если известна некоторая базисная матрица A_0, отличная от единичной.

§ I. Описание класса матриц

Пусть в матрице $A[M,N]$ множества M и N индексов ее строк и столбцов разбиты на непересекающиеся подмножества M^1, $M^2, \ldots, M^p$ и $N^1, N^2, \ldots, N^p$ соответственно. При этом ненулевые элементы этой матрицы заключены в блоках $A[M^k, N^k]$, $k=1,2,\ldots,p$ (рис. I при $p=4$). Такие матрицы назовем блочно-диагональными. Предположим теперь, что множество $\{1,2,\ldots,p\}$ номеров блоков разбито на два непересекающихся подмножества $P_-(0)$ и $P_+(0)$, и положим

$$M_1^0 = M \setminus \Big(\bigcup_{k\in P_-(0)} M^k\Big), \qquad N_1^0 = N \setminus \Big(\bigcup_{k\in P_+(0)} N^k\Big).$$

Если допустить, что в матрице $A[M,N]$ клетка $A[M_1^0, N_1^0]$ также отлична от нуля (рис. 2), то получается довольно широкий класс матриц, обладающий очевидной спецификой и включающий классы блочно-диагональных матриц с горизонтальным $(P_+(0)=\phi)$ и вертикальным $(P_-(0)=\phi)$ окаймлением [4]. При $P_-(0)\neq\phi$ и $P_+(0)\neq\phi$ будем говорить, что матрица $A[M,N]$ обладает симметричной блочной структурой (рис. 2).

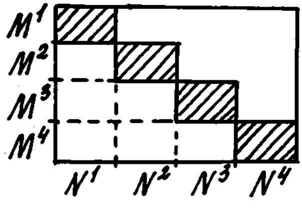


Рис. I

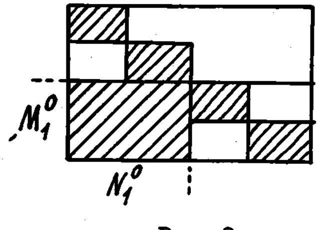


Рис. 2

Классы матриц с симметрично разветвленной блочной структурой получаются рекурсивно. Например, двухступенчатое разветвление получается в предположении, что каждый из блоков $A[M^k, N^k]$, $k \in P_-(0) \cup P_+(0)$, в свою очередь обладает симметричной блочной структурой (рис. 3). Аналогичным образом рекурсию можно продолжить.

Положим $M^0 = M$, $N^0 = N$ и обозначим через P множество номеров всех блоков, включая и саму матрицу $A[M^0, N^0]$ с номером 0. Для каждого блока $A[M^k, N^k]$ через $P_-(k)$ и $P_+(k)$ будем обозначать множества номеров его подблоков соответственно в горизонтальной и вертикальной блочно-диагональных полосах. Отсюда ясно, что в парах (M^τ, N^τ), $\tau \in P_-(k) \cup P_+(k)$, выделяющих эти подблоки, множества M^τ, $\tau \in P_-(k) \cup P_+(k)$, попарно не пересекаются, и если $P_+(k) \neq \emptyset$, то, не нарушая общности, можно считать, что множество

$$M_1^k = M^k \setminus \left(\bigcup_{\tau \in P_-(k)} M^\tau \right)$$

является объединением множеств M^τ, $\tau \in P_+(k)$. Симметричное утверждение верно и для попарно-непересекающихся множеств N^τ, $\tau \in P_-(k) \cup P_+(k)$, при $P_-(k) \neq \emptyset$:

$$N_1^k = N^k \setminus \left(\bigcup_{\tau \in P_+(k)} N^\tau \right) = \bigcup_{\sigma \in P_-(k)} N^\sigma .$$

Описанная структура матриц имеет очень наглядное представление в виде ориентированного графа, если отождествить каждый блок, а тем самым и его номер, с вершиной и соединить вершины $\tau \in P_-(k) \cup P_+(k)$ с вершиной k направленными дугами (рис. 3,4). Вершины $\tau \in P_-(k)$ на графе будем отмечать знаком -I, а $\tau \in P_+(k)$ знаком +I. Это позволяет для каждого $k \in P$ вы-

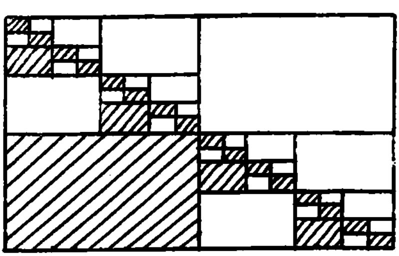


Рис.3

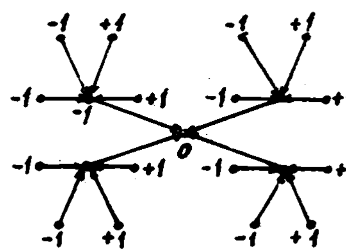


Рис. 4

делить зону P_-^k горизонтального и зону P_+^k вертикального подчинения, собрав в P_-^k и P_+^k те вершины $\tau \in P$, из которых имеется путь в вершину k, состоящий лишь из вершин, отмеченных знаком -I и +I соответственно.

§ 2. Приведение базисной матрицы к блочно-треугольному виду

Для наглядности рассмотрим сначала матрицу $A[M,N]$ с одноступенчатым разветвлением, т.е. с разбиением $\{0\}$, $P_-(0)$, $P_+(0)$ множества P и семейством пар (M^k,N^k), $k \in P_-(k) \cup P_+(k)$, выделяющих независимые блоки на диагонали (рис. 2).

Пусть $A[I,J]$ - квадратная неособенная подматрица матрицы $A[M,N]$. Чтобы привести $A[I,J]$ к блочно-треугольному виду с учетом структуры, положим

$$I^k = M^k \cap I,\ k \in P_-(0), \qquad J^k = N^k \cap J,\ k \in P_+(0).$$

Каждое из множеств $N^k \cap J$, $k \in P_-(0)$, требуется представить как объединение двух непересекающихся подмножеств J^k и J_{1k} таким образом, чтобы клетки $A[I^k, J^k]$, $k \in P_-(0)$, были квадратными неособенными матрицами Аналогично, для $k \in P_+(0)$ требуется определить I^k и I_{1k} из условий

$$M^k \cap I = I^k \cup I_{1k}, \qquad I^k \cap I_{1k} = \phi$$

и условия неособенности квадратных клеток $A[I^k, J^k]$, $k \in P_+(0)$ (рис. 5).

Выбор "местных" базисов, т.е. базисов в блоках на диагонали, осуществляется с помощью процедуры, аналогичной обычному симплекс-методу. Отличие состоит в том, что матрица $A[I^k, N^k \cap J]$ при некотором $k \in P_-(0)$ (или матрица $A[M^k \cap I, J^k]$ при некотором $k \in P_+(0)$) преобразуется не вся сразу по мере последовательного выбора базисных столбцов (строк), а накапливается и преобразуется по строкам (столбцам).

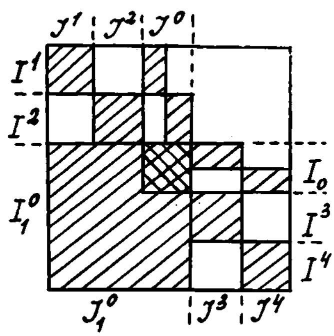
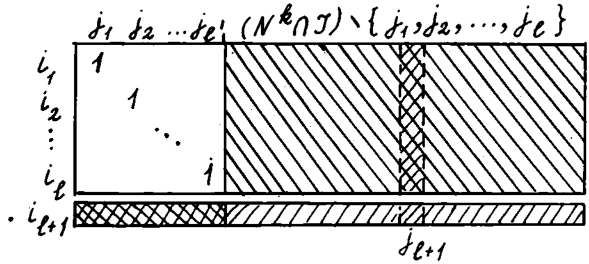


Рис. 5

2.1. Предположим, что для некоторого $k \in P_-(0)$ уже преобразованы строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in I^k$ и выбраны номера базисных столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_\ell \in N^k \cap J$ $(\ell \geq 0)$. Пусть $i_{\ell+1}$ – номер очередной строки, подлежащей преобразованию, так что частичная симплекс-таблица имеет вид:



Чтобы расширить эту таблицу $(\ell+1)$ -й строкой, нужно, во-первых, исключить элементы $A[i_{\ell+1}, j_s]$, $s = 1, 2, \ldots, \ell$. Для этого достаточно вычесть из $(\ell+1)$-й строки первые ℓ строк с соответствующими коэффициентами $A[i_{\ell+1}, j_s]$. Во-вторых, в остальной части $(\ell+1)$ -й строки нужно найти наибольший по абсолютной величине элемент (пусть его номер $j_{\ell+1}$). Этот элемент отличен от нуля, так как строки матрицы $A[I^k, J]$ линейно-независимы. В-третьих, нужно преобразовать таблицу так, чтобы столбец с номером $j_{\ell+1}$ стал единичным с единицей в $(\ell+1)$-й строке.

Исчерпав все множество I^k, получим множества J^k и $J_{1k} = (N^k \cap J) \setminus J^k$. Матрицу, полученную в окончательной симплекс-таблице справа от единичной, обозначим через $R_k[J^k, J_{1k}]$. Это есть не что иное, как решение системы

$$A[I^k, J^k] \cdot R_k[J^k, J_{1k}] = A[I^k, J_{1k}]. \qquad (2.1)$$

2.2. Выбор базисных строк в матрице $A[M^k \cap J, J^k]$, $k \in P_+(0)$, делается аналогично путем последовательного преобразования столбцов $A[M^k \cap I, j]$, $j \in J^k$. В результате при каждом $k \in P_+(0)$ получим базисное множество I^k и множество $I_{1k} = (M^k \cap I) \setminus I^k$. Вычеркнув из окончательной симплекс-таблицы единичную матрицу, получим матрицу $T_k[I_{1k}, I^k]$ – решение системы

$$T_k[I_{1k}, I^k] \cdot A[I^k, J^k] = A[I_{1k}, J^k]. \qquad (2.2)$$

2.3. Как уже отмечалось [1,2], с помощью матриц

$$R_k[J^k, J_{1k}], \; k\in P_-(0), \; T_k[I_{1k}, I^k], \; k\in P_+(0), \qquad (2.3)$$

можно привести $A[I,J]$ к блочно-треугольному виду $B[I,J]$, исключив ненулевые клетки

$$A[I^k, J_{1k}], \; k\in P_-(0), \qquad A[I_{1k}, J^k], \; k\in P_+(0).$$

При этом на диагонали изменится лишь клетка $A[I_0, J_0]$, где

$$I_0 = I \setminus \left(\bigcup_{k\in P_-(0)\cup P_+(0)} I^k\right), \quad J_0 = J \setminus \left(\bigcup_{k\in P_-(0)\cup P_+(0)} J^k\right).$$

Формулы вычисления клетки $B[I_0, J_0]$ (для общего случая) будут получены позднее. Выбранные способы решения систем с матрицами $B[I_0,J_0]$, $A[I^k, J^k]$, $k\in P\setminus\{0\}$, вместе с клетками (2.3) дают достаточную информацию для решения систем с матрицей $A[I,J]$.

§ 3. Обобщение на случай многоступенчатого разветвления

Предположим сначала, что вершина k , для которой нужно определить базисную пару (I^k, J^k) , находится в зоне корня 0, т.е. $k\in P_-^0$ или $k\in P_+^0$, и положим $I^0=I$, $J^0=J$.

3.1. Пусть $k\in P_-^0$ и требуется определить множества J^k и J_{1k} таким образом, чтобы, во-первых,

$$N^k \cap J^0 = J^k \cup J_{1k}, \qquad J^k \cap J_{1k} = \varnothing$$

и, во-вторых, матрица $A[I^k, J^k]$, где $I^k = M^k \cap I^0$, была бы квадратной и неособенной.

Если множество $P_-(k)$ пусто, то процедура п. 2.1 применима в вершине k без всяких изменений. Поэтому будем считать, что $P_-(k) \neq \varnothing$. В этом случае также предполагается, что для всех $\tau\in P_-(k)$ пары (I^τ, J^τ), определяющие "местные" базисы горизонтальной блочно-диагональной полосы в блоке $A[M^k \cap I^0, N^k \cap J^0]$, уже выбраны (рис. 6), причем $I^\tau = M^\tau \cap I^0$, а $J_{1\tau} = (N^\tau \cap J^0)\setminus J^\tau$.

Тогда множества J^τ, $\tau\in P_-(k)$, можно считать входящими в множество J^k . Выбор же недостающей части множества J^k сводится к преобразованию симплекс-таблицы, набираемой из части строк преобразованной к блочно-треугольному виду матрицы $A[I^k, N^k\cap J^0]$, т.е. матрицы с исключенными ненулевыми

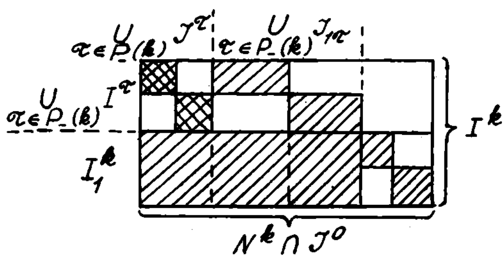


Рис. 6

клетками $A[I^\tau, J_{1\tau}]$, $\tau\in P_-(k)$. При этом номера строк и столбцов этой таблицы определяются соответственно множествами

$$I_1^k = M_1^k \cap I^k, \qquad (N^k\cap J^0)\setminus\Big(\bigcup_{\tau\in P_-(k)} J^\tau\Big).$$

Это значит, что для каждого $i\in I_1^k$ в строке $A[i, J^0]$ части $A[i, J_{1\tau}]$ заменяются на

$$B_-[i,J_{1\tau}] = A[i,J_{1\tau}] - A[i,J^\tau]\cdot R_\tau[J^\tau, J_{1\tau}], \tau\in P_-(k), \qquad (3.I)$$

где $R_\tau[J^\tau, J_{1\tau}]$ – решение системы (2.I) с заменой k на τ. Множество, дополняющее семейство J^τ, $\tau\in P_-(k)$, до базисного множества J^k, обозначим через $J_k\cup J_0^k$, не уточняя пока состав его подмножеств J_k и J_0^k, т.е. положим

$$J_k\cup J_0^k = J^k\setminus\Big(\bigcup_{\tau\in P_-(k)} J^\tau\Big).$$

В отличие от п.2.I в результате преобразования симплекс-таблицы вместе с множеством J^k получается лишь вырезка $R_k[J_k\cup J_0^k, J_{1k}]$ из матрицы $R_k[J^k, J_{1k}]$ – решения системы (2.I). Отсюда ясно, что и для каждой вершины $\tau\in P_-^k$ известной можно считать лишь вырезку $R_\tau[J_0^\tau\cup J_\tau, J_{1\tau}]$ из матрицы $R_\tau[J^\tau, J_{1\tau}]$. (Заметим, что $J_\tau\cup J_0^\tau = J^\tau$ при $P_-(\tau) = \emptyset$.) Это значит, что в строках (3.I) произведения $A[i, J^\tau]\cdot R_\tau[J^\tau, J_{1\tau}]$ при $\tau\in P_-(k)$ нужно вычислять с помощью рекуррентного процесса по зоне P_-^k с использованием вырезок $R_\tau[J_\tau\cup J_0^\tau, J_{1\tau}]$, $\tau\in P_-^k$. Этот процесс подробно описан в работах [I,2]. В случае же полного отказа от хранения матриц $R_\tau[J^\tau, J_{1\tau}]$, $\tau\in P_-(k)$, можно воспользоваться

соотношением

$$A[i,J^{\tau}]\cdot R_{\tau}[J^{\tau},J_{1\tau}]=\{A[i,J^{\tau}]\cdot(A[I^{\tau},J^{\tau}])^{-1}\}\cdot A[I^{\tau},J_{1\tau}],$$

которое следует из определения матрицы $R_{\tau}[J^{\tau}, J_{1\tau}]$, и для каждого $\tau\in P_{-}(k)$ решать систему

$$h[I^{\tau}]\cdot A[I^{\tau},J^{\tau}]=A[i,J^{\tau}].$$

3.2. Аналогично, относительно вершины $k\in P_{+}^{0}$ с непустым множеством $P_{+}(k)$ предполагается, что для всех $\tau\in P_{+}^{k}$ определены пары (I^{τ},J^{τ}), причем $J^{\tau}=N^{\tau}\cap J^{0}$, и вычислены матрицы $T_{\tau}[I_{1\tau}, I_{\tau}\cup I_{0}^{\tau}]$, где

$$I_{1\tau}=(M^{\tau}\cap I^{0})\setminus I^{\tau},\qquad I_{\tau}\cup I_{0}^{\tau}=I^{\tau}\setminus\Big(\bigcup_{\sigma\in P_{+}(\tau)}I^{\sigma}\Big).$$

Тогда можно положить $J^{k}=N^{k}\cap J^{0}$, а дополнение семейства I^{τ}, $\tau\in P_{+}(k)$, до базисного множества I^{k} выбрать из множества

$$(M^{k}\cap I^{0})\setminus\Big(\bigcup_{\tau\in P_{+}(k)}I^{\tau}\Big).$$

Для этого из матрицы $A[M^{k}\cap I^{0},J^{k}]$ после исключения в ней клеток $A[I_{1k},J^{\tau}]$, $\tau\in P_{+}(k)$, набирается симплекс-таблица с номерами столбцов из множества $J_{1}^{k}=N_{1}^{k}\cap J^{k}$, т.е. для каждого $j\in J_{1}^{k}$ в столбце $A[I^{0},j]$ части $A[I_{1\tau},j]$ заменяются на

$$B_{+}[I_{1\tau},j]=A[I_{1\tau},j]-T_{\tau}[I_{1\tau},I^{\tau}]\cdot A[I^{\tau},j],\ \tau\in P_{+}(k). \quad (3.2)$$

В результате определяются множества

$$I_{k}\cup I_{0}^{k}=I^{k}\setminus\Big(\bigcup_{\tau\in P_{+}(k)}I^{\tau}\Big),\qquad I_{1k}=(M^{k}\cap I^{0})\setminus I^{k},$$

а в симплекс-таблице попутно получается вырезка $T_{k}[I_{1k},I_{k}\cup I_{0}^{k}]$ из матрицы $T_{k}[I_{1k},I^{k}]$ – решения системы (2.2). Произведение $T_{\tau}[I_{1\tau},I^{\tau}]\cdot A[I^{\tau},j]$ в строке (3.2) либо заменяется на

$$A[I_{1\tau},J^{\tau}]\cdot\{(A[I^{\tau},J^{\tau}])^{-1}\cdot A[I^{\tau},j]\},$$

и тогда для каждого $\tau\in P_{+}(k)$ нужно решать систему

$$A[I^{\tau},J^{\tau}]\cdot g[J^{\tau}]=A[I^{\tau},j],$$

либо нужно воспользоваться рекуррентным процессом по зоне P_{+}^{k} для вычисления произведений $T_{\tau}[I_{1\tau},I^{\tau}]\cdot u[I^{\tau}]$, $\tau\in P_{+}^{k}$ (см. [1,2]).

3.3. Обобщение на случай некорневой зоны. Предположим теперь, что в цепочке

$$\underset{k}{\bullet}\longrightarrow\bullet\longrightarrow\bullet\ \cdots\ \bullet\longrightarrow\underset{\bar{k}}{\bullet}\longrightarrow\bullet\ \cdots\ \bullet\longrightarrow\underset{0}{\bullet} \qquad (3.3)$$

соединяющей вершину k с корнем 0, имеются вершины, отмеченные знаком, противоположным знаку вершины k, и пусть $\bar{k}$ - самая левая из них. В этом случае дополнительно к предположениям п.3.I (если $k \in P_-^{\bar{k}}$) или п.3.2 (если $k \in P_+^{\bar{k}}$) будем считать известными базисные множества $I^{\bar{k}}$ и $J^{\bar{k}}$. А тогда в пп. 3.I-3.2 всюду следует лишь заменить множества I^0 и J^0 на множества $I^{\bar{k}}$ и $J^{\bar{k}}$ соответственно.

3.4. Порядок перебора вершин при повторении обуславливается требованиями предыдущих пп.3.I-3.3: перебирая вершины $k \in \in P_-^0$ в порядке приближения к корню 0, получим множества $J_0^k \cup J_k$ и матрицы $R_k[J_k \cup J_0^k, J_{1k}]$, $k \in P_-^0$, т.е. определим базисные множества J^k для всех вершин $k \in P_-^0$. Точно так же можно было бы начать с корневой зоны P_+^0, просматривая ее вершины k в порядке приближения к корню 0 и определяя множества $I_k \cup I_0^k$ вместе с матрицами $T_k[I_{1k}, I_k \cup I_0^k]$, $k \in P_+^0$. Тем самым определяются базисные множества I^k для всех вершин $k \in P_+^0$. Поскольку множества I^0 и J^0 базисные и оба заданы, то безразлично, с какой из корневых зон начинать процесс.

Согласно требованиям п.3.3 теперь с каждой вершиной $\bar{k}$ из корневых зон можно поступать так же, как и с корнем 0. Отличие состоит в том, что для $\bar{k} \in P_-^0$ пары (I^k, J^k), $k \in P_-^{\bar{k}}$, уже определены, поскольку $P_-^{\bar{k}} \subset P_-^0$. Точно так же для $\bar{k} \in P_+^0$ определены пары (I^k, J^k), $k \in P_+^{\bar{k}}$, поскольку $P_+^{\bar{k}} \subset P_+^0$. Таким образом, от первого "слоя" разветвления - в области корня - произошел переход ко второму слою - разветвлению в области вершины $\bar{k}$, принадлежащей одной из корневых зон. Ясно, что такое расслоение зон можно было бы продолжить. Однако с точки зрения реализации описываемого алгоритма на ЭВМ более простым представляется другой путь.

Легко видеть, что порядок просмотра вершин, обуславливаемый требованиями пп. 3.I-3.3, не единственный. Поэтому для реализации на ЭВМ предпочтительнее использовать такой просмотр, в котором глубина цикла не зависит явно от степени расслоения зон. Так, например, после того как обработаны обе корневые зоны P_-^0 и P_+^0, можно организовать многократный линейный просмотр всех вершин $k \in P$ в любом порядке, проверяя для каждой из них следующие условия и производя следующие действия.

I) Если для вершины $k \in P$ определена пара (I^k, J^k) и об-

работаны обе зоны P_-^k и P_+^k, т.е. построены пары (I^τ, J^τ), $\tau \in P_-^k \cup P_+^k$ (пустая зона считается обработанной), то тем самым определена пара

$$I_k = I^k \setminus \Big(\bigcup_{\tau \in P_-(k) \cup P_+(k)} I^\tau\Big), \quad J_k = J^k \setminus \Big(\bigcup_{\tau \in P_-(k) \cup P_+(k)} J^\tau\Big),$$

выделяющая квадратную неособенную клетку $B[I^k, J^k]$ на диагонали в матрице $B[I,J]$ - в преобразованной к блочно-треугольному виду матрице $A[I,J]$.

В этом случае можно вычислить матрицу $B[I^k, J^k]$ по одной из следующих групп формул:

$$B[I_k \cap M^\tau, J_k] = B_-[I_k \cap M^\tau, J_k] - T_\tau[I_k \cap M^\tau, I^\tau] \cdot B_-[I^\tau, J_k], \quad \tau \in P_+(k), \tag{3.4}$$

$$B[I_k, J_k \cap N^\tau] = B_+[I_k, J_k \cap N^\tau] - B_+[I_k, J^\tau] \cdot R_\tau[J^\tau, J_k \cap N^\tau], \quad \tau \in P_-(k), \tag{3.5}$$

где строки $B_-[i, J_k]$, $i \in I_1^k$, и столбцы $B_+[I_k, j]$, $j \in J_1^k$, определяются соответственно формулами (3.I) и (3.2) с учетом замечаний об их вычислении. Кроме того, для вычисления произведений $T_k[I_k \cap M^\tau, I^\tau] \cdot B_-[I^\tau, j]$, $j \in J_k$, в формуле (3.4) и произведений $B_+[i, J^\tau] \cdot R_\tau[J^\tau, J_k \cap N^\tau]$, $i \in I^k$, в формуле (3.5) нужно также воспользоваться замечаниями к формулам (3.2) и (3.I).

Для вычисленной матрицы $B[I_k, J_k]$ необходимо выбрать тот или иной способ решения систем с ней, например обратить ее.

2) Если для вершины $k \in P$ определена пара (I^k, J^k) и обработана лишь зона P_-^k, то согласно п.3.3(при $\bar{k} = k$) можно обработать зону P_+^k, т.е. построить пары (I^σ, J^σ), $\sigma \in P_+^k$, в порядке приближения вершин σ к вершине k. Аналогично, если обработана лишь зона P_+^k, то можно обработать зону P_-^k. В любом из этих случаев вершина k оказывается в ситуации I).

3) Если для вершины $k \in P$ не обработана ни одна из зон P_-^k и P_+^k, то эту вершину нужно пропустить. Поскольку все цепочки (3.3) упираются в корень 0, то после конечного числа просмотров множества P (не более числа перемен знака в цепочке (3.3)) вершина k окажется в ситуации 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для более полного учета структуры базисной матрицы $A[I,J]$ порядка m естественно стремиться к тому, чтобы величина $\sum_{k \in P} m_k^2$, где m_k - порядок матрицы $B[I_k, J_k]$, бы-

ла бы как можно меньшей при условии $\sum_{k\in P} m_k = m$. При этом, разумеется, обусловленность матриц не должна ухудшаться. Как видно из предыдущего, возможность неоднозначного выбора величин m_k при некоторых $k \in P$ имеется лишь в ситуациях пп.3.I-3.2 при выборе множества $J_k \cup J_0^k$ или множества $I_k \cup I_0^k$, дополняющих соответственно множества $J^\tau, \tau \in P_-(k)$, или $I^\tau, \tau \in P_+(k)$, до базисных множеств J^k или I^k. При прочих равных условиях в ситуации п.3.I можно, например, отдавать предпочтение номерам j из тех множеств $N^\tau \cap J^0, \tau \in P_+(k)$, для которых $P_-(\tau) \cup P_+(\tau) \neq \emptyset$, т.е. для которых вершина τ не концевая и, следовательно, множество $J^\tau = N^\tau \cap J^k$ шире множества J_τ. Аналогичной тактики можно придерживаться и при выборе множества $I_k \cup I_0^k$ в п.3.2.

ЛИТЕРАТУРА

I. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании. - Докл. АН СССР, 1977, т.205, № 5, с. 993-996.

2. ЗВЯГИНА Р.А. Системы линейных уравнений с иерархической симметричной блочностью матриц. - Оптимизация, 1978, вып. 22(39), с. 69-82.

3. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Преобразование мультипликативного представления матрицы с иерархической блочностью.- Оптимизация, 1978, вып. 22(39), с. 53-68.

4. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. - М.: Наука, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.VI.1980 г.