Выпуск 26 (43) О П Т И М И З А Ц И Я 1981 г.
Численные методы

УДК 512.25

КОМБИНИРОВАННОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО АЛГОРИТМОВ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Р.А.Звягина

Матрицу с симметрично разветвленной блочностью [I-4] можно разбить на клетки, выделив на некоторых уровнях разветвления горизонтальную и вертикальную блочно-диагональные полосы (рис.I). При этом каждый блок в отсеченных полосах и оставшаяся после отсечения часть также могут обладать разветвленной блочностью (возможно, меньшей глубины, чем исходная матрица). Если эта матрица квадратная и неособенная, то она приводится к блочно-треугольному виду с учетом лишь указанного одноступенчатого разветвления [4] и с сохранением разветвленной блочности в "средней" клетке [I-2].

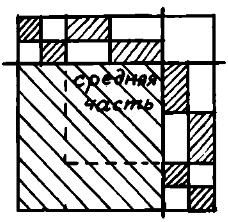

Рис. I

При таком разбиении базисной матрицы решение систем и изменение базиса в методах линейного программирования можно расчленить так, что для отсеченных блоков будут использоваться специальные алгоритмы, а для "средней" части - мультипликативный алгоритм [5]. В качестве процедуры повторения при этом используется алгоритм приведения "средней" клетки к блочно-треугольному виду с учетом ее специфики [4]. Как будет видно из дальнейшего, в процессе изменения базиса (здесь рассматривается лишь замена столбца) в "средней" части будут накапливаться как лево-, так и правосторонние преобразования.

§ I. Описание информации и решение систем

Пусть квадратная неособенная матрица $A[I,J]$ обладает тем свойством, что в множествах ее строк и столбцов можно выделить подмножества $I_1 \subset I$ и $J_2 \subset J$ таким образом, что подматрица $A[I_1,J_2]$ нулевая, клетки $A[I_1,J \setminus J_2]$ и $A[I \setminus I_1, J_2]$ имеют некоторую специальную структуру (рис. 2).

I.I. **Приведение базисной матрицы к блочно-треугольному виду.** Выделив в полосах $A[I_1,J]$ и $A[I,J_2]$ квадратные неособенные клетки $A[I_1,J_1]$ и $A[I_2,J_2]$, можно исключить ненулевые клетки $A[I_1,J_0]$ и $A[I_0,J_2]$, где

$$I_0 = I \setminus (I_1 \cup I_2),$$

$$J_0 = J \setminus (J_1 \cup J_2),$$

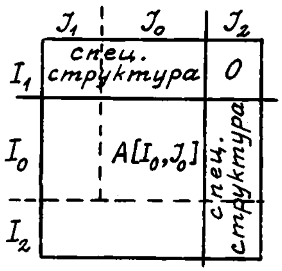

Рис. 2

приведя тем самым матрицу $A[I,J]$ к блочно-треугольному виду

$$B[I,J] = T[I,I] \cdot A[I,J] \cdot R[J,J]. \qquad (I.I)$$

Здесь преобразование $T[I,I]$ получается заменой в единичной матрице $E[I,I]$ нулевой клетки $E[I_0,I_2]$ на матрицу $-T_2[I_0,I_2]$ - решение системы

$$\{-T_2[I_0,I_2]\} \cdot A[I_2,J_2] = -A[I_0,J_2].$$

Аналогично, преобразование $R[J,J]$ получается заменой в единичной матрице $E[J,J]$ нулевой клетки $E[J_1,J_0]$ на $-R_1[J_1,J_0]$ - решение системы

$$A[I_1,J_1] \cdot \{-R_1[J_1,J_0]\} = -A[I_1,J_0]. \qquad (I.2)$$

Если через $D[J,I]$ обозначить матрицу, обратную к $A[I,J]$, то ее вырезка $D[J_0,I_0]$ является матрицей, обратной к $B[I_0,J_0]$. В дальнейшем будем считать известными матрицу $D[J_0,I_0]$ и некоторые способы решения систем с матрицами $A[I_1,J_1]$ и $A[I_2,J_2]$ в зависимости от их структуры, например транспортной, двухкомпонентной или разветвленной блочной [2, 5].

2.2. Чтобы решить систему

$$A[I,J]\cdot g[J]=u[I] \qquad (I.3)$$

относительно столбца $g[J]$, подставим в нее выражение для матрицы $A[I,J]$ из соотношения (I.I):

$$B[I,J]\cdot\{R^{-1}[J,J]\cdot g[J]\}=T[I,I]\cdot u[I].$$

Учитывая блочную треугольность матрицы $B[I,J]$, структуру преобразований $R[J,J]$ и $T[I,I]$, а также решив относительно столбца $g_1[J_1]$ систему

$$A[I_1,J_1]\cdot g_1[J_1]=u[I_1] \qquad (I.4)$$

специального вида, части столбца $g[J]$ получим по формулам

$$g[J_0]=D[J_0,I_0]\cdot\{u[I_0]-A[I_0,J_2]\cdot(A^{-1}[J_2,I_2]u[I_2])-B[I_0,J_1]\cdot g_1[J_1]\}, \qquad (I.5)$$

$$g[J_1]=g_1[J_1]-A^{-1}[J_1,I_1]\cdot\{A[I_1,J_0]\cdot g[J_0]\}, \qquad (I.6)$$

$$g[J_2]=A^{-1}[J_2,I_2]\cdot\{u[I_2]-A[I_2,J_1]\cdot g[J_1]-B[I_2,J_0]\cdot g[J_0]\}. \qquad (I.7)$$

Здесь и в дальнейшем произведение обратной матрицы на столбец или строки на обратную матрицу означает решение соответствующих систем подходящим случаю способом. Кроме того, клетки матрицы $B[I,J]$ в выражениях (I.5), (I.7) следует заменять по формулам

$$B[I_0,J_1]=A[I_0,J_1]-A[I_0,J_2]\cdot A^{-1}[J_2,I_2]\cdot A[I_2,J_1], \qquad (I.8)$$

$$B[I_2,J_0]=A[I_2,J_0]-A[I_2,J_1]\cdot A^{-1}[J_1,I_1]\cdot A[I_1,J_0]. \qquad (I.9)$$

2.3. Решение $h[I]$ транспонированной системы

$$h[I]\cdot A[I,J]=v[J]$$

получается симметричным образом. Решив относительно строки $h_2[I_2]$ систему

$$h_2[I_2]\cdot A[I_2,J_2]=v[J_2] \qquad (I.10)$$

специального вида, части строки $h[I]$ вычислим по формулам

$$h[I_0]=\{v[J_0]-(v[J_1]\cdot A^{-1}[J_1,I_1])\cdot A[I_1,J_0]-h_2[I_2]\cdot B[I_2,J_0]\}\cdot D[J_0,I_0], \qquad (I.11)$$

$$h[I_2]=h_2[I_2]-\{h[I_0]\cdot A[I_0,J_2]\}\cdot A^{-1}[J_2,I_2], \qquad (I.12)$$

$$h[I_1]=\{v[J_1]-h[I_2]\cdot A[I_2,J_1]-h[I_0]\cdot B[I_0,J_1]\}\cdot A^{-1}[J_1,I_1]. \qquad (I.13)$$

2.4. В дальнейшем удобно считать, что $A[I,J]$ является подматрицей некоторой матрицы $A[I,N]$ с нулевой клеткой

$A[I_1, N_2]$, где $N_2 \subset N$, и с клетками $A[I_1, N \setminus N_2]$, $A[I \setminus I_1, N_2]$ специального вида. Если $j' \in N \setminus J$ - номер столбца, которым нужно заменить столбец $A[I, j'']$ в матрице $A[I, J]$, то будем предполагать, что известны столбцы $g_1[J_1] = R_1[J_1, j']$ и $g[J] = g'[J]$ - решения систем (I.4) и (I.3) с правой частью $u[I] = A[I, j']$. Кроме того, после замены j'' на j' требуется, чтобы номера столбцов специального вида, т.е. $j \in N_2$, не входили в среднюю часть разбиения матрицы.

Цель следующих трех параграфов состоит в том, чтобы выяснить, как изменяется матрица $D[J_0, I_0]$ при замене j'' на j' в зависимости от принадлежности j'' множествам J_1, J_0, J_2 , а j' - множествам $N \setminus N_2$, N_2 . Причем изменения матрицы $D[J_0, I_0]$ нас интересуют в мультипликативной форме. В последнем параграфе рассматривается вычисление правых частей в формулах (I.5) и (I.II) при мультипликативном представлении матрицы $D[J_0, I_0]$.

§ 2. Замена в средней части

Если в множестве J элемент j'' заменяется на $j' \in N \setminus J$, то изменение матрицы $A[I, J]$ можно записать следующим образом:

$$A'[I,J] = A[I,J] + \{A[I,j'] - A[I,j'']\} \cdot E[j'', J]. \qquad (2.I)$$

Тогда матрица, обратная к (2.I), записывается в виде

$$D'[J,I] = \{E[J,J] - \frac{1}{g'[j'']}(g'[J] - E[J,j'']) \cdot E[j'', J]\} \cdot D[J,I], \qquad (2.2)$$

т.е. матрица $D[J,I]$ умножается слева на простейший мультипликатор, который отличается от единичной матрицы $E[J,J]$ лишь j''-м столбцом.

2.I. Пусть $j'' \in J_0$, $j' \in N \setminus N_2$. Умножив соотношение (2.2) слева на $E[J_0, J]$, а справа на $E[I, I_0]$, получим выражение для вырезки $D'[J_0, I_0]$, из которого следует, что матрицу $D[J_0, I_0]$ нужно умножить слева на преобразование

$$H_{j''}[J_0,J_0] = E[J_0,J_0] - \frac{1}{g'[j'']} \cdot \{g'[J_0] - E[J_0, j'']\} \cdot E[j'', J_0]. \qquad (2.3)$$

При этом вместе с j''-м столбцом и номером j'' , определяющими преобразование (2.3), "запоминается" номер j' , поскольку множество J_0 заменяется на $J_0' = (J_0 \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$.

2.2. Пусть $j'' \in \mathcal{J}_0$, а $j' \in N_2$. Тогда остаются в силе преобразования п. 2.I и, кроме того, номер j' требуется присоединить к множеству $\mathcal{J}_2$ в паре с некоторым номером $i'' \in I_0$, присоединяемым к множеству I_2. Для определения номера i'' вычислим столбец

$$\alpha[I_0] = A[I_0, j'] - A[I_0, \mathcal{J}_2] \cdot \{A^{-1}[\mathcal{J}_2, I_2] \cdot A[I_2, j']\}. \quad (2.4)$$

Выбрав в столбце (2.4) наибольший по абсолютной величине элемент, тем самым определим номер i'' из условия неособенности матрицы, полученной окаймлением $A[I_2, \mathcal{J}_2]$ столбцом $A[I_2, j']$ и строкой $A[i'', \mathcal{J}_2 \cup \{j'\}]$.

Таким образом, в результате преобразований п. 2.I и усечения клетки $A[I_0, \mathcal{J}_0]$ матрица $D[\mathcal{J}_0, I_0]$ умножается справа на вырезку $E[I_0, I_0 \setminus \{i''\}]$ из единичной матрицы $E[I_0, I_0]$, а слева на вырезку

$$H_{j''}[\mathcal{J}_0 \setminus \{j''\}, \mathcal{J}_0] = E[\mathcal{J}_0 \setminus \{j''\}, \mathcal{J}_0] - \frac{1}{g'[j'']} g'[\mathcal{J}_0 \setminus \{j''\}] \cdot E[j'', \mathcal{J}_0] \quad (2.5)$$

из преобразования (2.3), вместе с которой запоминается лишь номер j'', поскольку теперь

$$I_0' = I_0 \setminus \{i''\}, \ \mathcal{J}_0' = \mathcal{J}_0 \setminus \{j''\}, \ I_2' = I_2 \cup \{i''\}, \ \mathcal{J}_2' = \mathcal{J}_2 \cup \{j'\}.$$

§ 3. Циклическая перестановка

Если $j'' \in \mathcal{J}_1$, то прежде всего вычислим определяемую соотношением (I.2) строку

$$R_1[j'', \mathcal{J}_0] = \{E[j'', \mathcal{J}_1] \cdot A^{-1}[\mathcal{J}_1, I_1]\} \cdot A[I_1, \mathcal{J}_0]. \quad (3.I)$$

Заметим, что если матрица $A[I_1, \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_2]$ блочно-диагональная, то в строке (3.I) отлична от нуля разве лишь часть, соответствующая блоку, который пересекается столбцом $A[I, j'']$.

Пусть $j_0 \in \mathcal{J}_0 \cup \{j'\}$ - номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке $R_1[j'', \mathcal{J}_0 \cup \{j'\}]$. В зависимости от расположения номеров j_0 и j' различаются следующие три случая.

3.I. Если $j_0 = j'$, $j' \in N \setminus N_2$, то нужно положить $\mathcal{J}_1' = (\mathcal{J}_1 \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$, а множество $\mathcal{J}_0$ оставить без изменения. В этом случае матрица $D[\mathcal{J}_0, I_0]$ должна быть преобразована по формуле

$$D'[\mathcal{J}_0, I_0] = D[\mathcal{J}_0, I_0] - \frac{1}{g'[j'']} g'[\mathcal{J}_0] \cdot D[j'', I_0], \quad (3.2)$$

которая получается как вырезка из соотношения (2.2). Однако строка $D[j'', I_0]$ здесь неизвестна, поэтому ее нужно получить исходя из имеющейся информации. Для этого достаточно воспользоваться формулами (I.9)-(I.II), положив $v[J] = E[j'', J]$. Поскольку $j'' \in J_1$, то решение системы (I.I0) нулевое, а на основании формулы (3.I) имеем

$$D[j'', I_0] = -R_1[j'', J_0] \cdot D[J_0, I_0]. \qquad (3.3)$$

Отсюда и из формулы (3.2) следует, что матрицу $D[J_0, I_0]$ нужно умножить слева на преобразование

$$G[J_0, J_0] = E[J_0, J_0] + \frac{1}{g'[j'']} \cdot g'[J_0] \cdot R_1[j'', J_0]. \qquad (3.4)$$

Если множество J_0 расширить фиктивным номером 0, то преобразование (3.4) можно представить в виде произведения двух элементарных преобразований:

$$H_0[J_0, J_0 \cup \{0\}] = E[J_0, J_0 \cup \{0\}] + \frac{1}{g'[j'']} \cdot g'[J_0] \cdot E[0, J_0 \cup \{0\}], \qquad (3.5)$$

$$F_0[J_0 \cup \{0\}, J_0] = E[J_0 \cup \{0\}, J_0] + E[J_0 \cup \{0\}, 0] \cdot R_1[j'', J_0], \qquad (3.6)$$

каждое из которых запоминается вместе с фиктивным номером 0.

3.2. Пусть $j_0 \in J_0$, а $j' \in N \setminus N_2$. Поскольку величина $R_1[j'', j_0]$ отлична от нуля, то можно сначала поменять местами номера j'' и j_0 в множествах J_1 и J_0, а затем произвести замену в средней части, как в п. 2.I. Перестановка столбцов с номерами j'' и j_0 в матрице $A[I, J]$ влечет перестановку строк с этими же номерами в матрице $D[J, I]$. Вместе с выражением (3.3) это значит, что

$$D'[J_0, I_0] = D[J_0, I_0] - E[J_0, j_0] \cdot \{R_1[j'', J_0] + E[j_0, J_0]\} \cdot D[J_0, I_0],$$

т.е. в результате перестановки номеров j'' и j_0 матрица $D[J_0, I_0]$ умножается слева на преобразование

$$F_{j_0}[J_0, J_0] = E[J_0, J_0] - E[J_0, j_0] \cdot \{R_1[j'', J_0] + E[j_0, J_0]\}. \qquad (3.7)$$

Здесь j_0-я строка преобразования (3.7) запоминается лишь с номером j_0, поскольку столбец $A[I, j'']$ (переставленный на место j_0-го столбца) заменяется столбцом с номером j'. При этом в формулах преобразований п. 2.I происходит замена j'' на j_0 и столбца $g'[J_0]$ на столбец

$$g''[J_0] = g'[J_0] + \{g'[j''] - g'[j_0]\} \cdot E[J_0, j_0],$$

так как в столбце $g'[J]$ компоненты с номерами j'' и j_0 также меняются местами.

Таким образом, матрица $D[J_0,I_0]$ умножается слева на произведение $H_{j_0}[J_0,J_0]\cdot F_{j_0}[J_0,J_0]$, где

$$H_{j_0}[J_0,J_0]= E[J_0,J_0]-\frac{1}{g'[j'']}\cdot$$

$$\cdot\{g'[J_0]+(g'[j'']-g'[j_0]-1)\cdot E[J_0,j_0]\}\cdot E[j_0,J_0]. \quad (3.8)$$

Здесь так же, как и в п. 2.I, вместе с j_0 -м столбцом преобразования (3.8) и номером j_0 запоминается номер j' , так как теперь нужно положить

$$J_1'=(J_1\setminus\{j''\})\cup\{j_0\},\qquad J_0'=(J_0\setminus\{j_0\})\cup\{j'\}.$$

3.3. Если $j_0\in J_0$, а $j'\in N_2$, то, как и в п. 2.2, нужно найти в столбце (2.4) наибольший по абсолютной величине элемент $\alpha[i'']$. В этой ситуации матрица $D[J_0,I_0]$ умножается справа на матрицу $E[I_0,I_0\setminus\{i''\}]$, слева на преобразование (3.7), а затем на вырезку

$$H_{j_0}[J_0\setminus\{j_0\},J_0]=E[J_0\setminus\{j_0\},J_0]-\frac{1}{g'[j'']}\cdot g'[J_0\setminus\{j_0\}]\cdot E[j_0,J_0] \quad (3.9)$$

из преобразования (3.8), j_0 -й столбец которой запоминается лишь с номером j_0 , поскольку теперь

$$I_0'=I_0\setminus\{i''\},\ J_0'=J_0\setminus\{j_0\},\qquad I_2'=I_2\cup\{i''\},\ J_2'=J_2\cup\{j'\}.$$

§ 4. Окаймление

Если $j''\in J_2$, то сначала, не обращая внимания на нарушение структурных требований, сделаем усечение матрицы $A[I_2,J_2]$ по i' -й строке и j''-му столбцу, окаймив матрицу $A[I_0,J_0]$ строкой $A[i',J_0]$ и столбцом $A[I_0\cup\{i'\},j'']$. При этом номер i' выберем из условия неособенности усеченной матрицы, т.е. как номер наибольшего по абсолютной величине элемента в строке $h_2[I_2]$ - решения системы (I.10) при $v[J_2]=E[j'',J_2]$. В этих условиях нужно положить

$$I_0'=I_0\cup\{i'\},\ J_0'=J_0\cup\{j''\},\quad I_2'=I_2\setminus\{i'\},\ J_2'=J_2\setminus\{j''\},$$

а матрицу $D[J_0,I_0]$ окаймить строкой $D[j'',I_0]$, столбцом $D[J_0,i']$ и числом $D[j'',i']$, которые определяются ниже на основании имеющейся информации.

Как и в п. 3.I, воспользуемся формулами (I.9)-(I.II), положив $v[J]=E[j'',J]$. Поскольку строка $h_2[I_2]$ уже вычислена, а $v[J\setminus J_2]=0$, то

$$D[j'',I_0]=h[I_0]=a[J_0]\cdot D[J_0,I_0], \qquad (4.1)$$

где строка $a[J_0]$ получается умножением соотношения (1.9) на строку $-h_2[I_2]$ слева:

$$a[J_0]=-h_2[I_2]\cdot A[I_2,J_0]-\{(h_2[I_2]\cdot A[I_2,J_1])\cdot A^{-1}[J_1,I_1]\}\cdot A[I_1,J_0].$$

Аналогичным образом воспользуемся формулами (1.6) и (1.8), положив $u[I]=E[I,i']$ и вычислив столбец

$$T_2[I_0,i']=A[I_0,J_2]\cdot\{A^{-1}[J_2,I_2]\cdot E[I_2,i']\}. \qquad (4.2)$$

Поскольку $u[I\setminus I_2]=0$, то решение системы (1.4) нулевое, а тогда

$$D[J_0,i']=g[J_0]=D[J_0,I_0]\cdot\{-T_2[I_0,i']\}. \qquad (4.3)$$

Подставив в формулу (1.12) выражение (4.1) строки $h[I_0]$ и воспользовавшись соотношением (4.2), получим

$$D[j'',i']=h_2[i']-a[J_0]\cdot D[J_0,I_0]\cdot T_2[I_0,i']. \qquad (4.4)$$

Заметим, что в случае блочно-диагональной матрицы $A[I\setminus I_1,J_2]$ в столбце (4.2) отлична от нуля разве лишь часть, соответствующая тому блоку, который пересекается строкой $A[i',J]$.

На основании формул (4.1)-(4.4) матрицу $D[J_0',I_0']$ можно представить в виде произведения трех сомножителей:

$$D[J_0',I_0']=\left[\begin{array}{c|c} E[J_0,J_0] & 0 \\ \hline a[J_0] & h_2[i'] \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} D[J_0,I_0] & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} E[I_0,I_0] & -T_2[I_0,i'] \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (4.5)$$

Здесь в среднем множителе матрица $D[J_0,I_0]$ окаймляется строкой с номером j'' и столбцом с номером i' . Если положить $a[j'']=h_2[i']$, $T_2[i',i']=1$, то левый множитель записывается в виде преобразования типа (3.7), т.е.

$$F_{j''}[J_0',J_0']=E[J_0',J_0']+E[J_0',j'']\cdot\{a[J_0']-E[j'',J_0']\}; \qquad (4.6)$$

а правый множитель - в виде преобразования типа (2.3), т.е.

$$H_{i'}[I_0',I_0']=E[I_0',I_0']-\{T_2[I_0',i']-E[I_0',i']\}\cdot E[i',I_0']. \qquad (4.7)$$

Левостороннее преобразование (4.6) запоминается в виде j''-й строки вместе с номером j'' , а правостороннее преобразование (4.7) - в виде столбца $H_{i'}[I_0,i']$ вместе с номером i' . Кроме того, вместе с каждым из этих преобразований запоминается одна и та же метка ξ, устанавливающая связь между номерами j'' и i'. Ее роль будет ясна в следующем параграфе.

Теперь в зависимости от положения номера j' нужно рассмотреть два случая.

4.I. Если $j' \in N \setminus N_2$, то, как и в п. 2.I, матрица $D[J_0', I_0']$ умножается слева на преобразование

$$H_{j''}[J_0', J_0'] = E[J_0', J_0'] - \\ - \frac{1}{g'[j'']} \cdot \{g'[J_0'] - E[J_0', j'']\} \cdot E[j'', J_0'], \qquad (4.8)$$

которое запоминается вместе с номерами j'' и j'.

4.2. Если $j' \in N_2$, то, как и в п.2.2, нужно вычислить столбец

$$\alpha[I_0'] = A[I_0', j'] - A[I_0', J_2'] \cdot \{A^{-1}[J_2', I_2'] \cdot A[I_2', j']\}$$

и найти в нем наибольший по абсолютной величине элемент $\alpha[i'']$. Если $i'' \neq i'$, то матрица (4.5) умножается справа на $E[I_0', I_0]$, а слева на вырезку $H_{j''}[J_0, J_0']$ из преобразования (4.8), которая запоминается лишь с номером j''.

Если же $i'' = i'$, то, как нетрудно заметить, произведение $H_{i'}[I_0', I_0'] \cdot E[I_0', I_0]$ превращается в $E[I_0', I_0]$, так как второе слагаемое в вырезке $H_{i'}[I_0', I_0]$ из преобразования (4.7) - нулевое. В этом случае имеет место уничтожение одного из правосторонних мультипликаторов. Заметим, что подобная ситуация может возникнуть и в случаях, описанных в пп. 2.2, 3.3. Для этого достаточно, чтобы предыдущее правостороннее преобразование было бы преобразованием типа (4.7) и характеризующий его номер i' совпадал бы с номером i'', который определяется с помощью столбца (2.4).

§ 5. Решение систем в средней части

Пусть, как и ранее, квадратная неособенная матрица $A[I, J]$ приведена к блочно-треугольному виду (I.I), однозначно определяемому разбиениями I_1, I_0, I_2 и J_1, J_0, J_2 соответственно множеств I и J. Если при этом матрица $A[I, J]$ обладает разветвленной блочностью, то, как известно [I-5], клетка $B[I_0, J_0]$ наследует структуру клетки $A[I_0, J_0]$.

Предположим, что в результате последовательных замен столбцов из матрицы $A[I,J]$ получена матрица $A[I,\bar{J}]$ с разбиениями I_1, $\bar{I}_0$, $\bar{I}_2$ и $\bar{J}_1$, $\bar{J}_0$, $\bar{J}_2$ соответственно множеств I и $\bar{J}$, так что множества $\bar{I}_0$, $\bar{J}_0$ получаются в конце последовательностей

$$I_0, I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, \ldots, I_0^{(n)}, \bar{I}_0; \quad J_0, J_0^{(1)}, J_0^{(2)}, \ldots, J_0^{(m)}, \bar{J}_0 \qquad (n < m).$$

Если $\bar{D}[\bar{J},I]$ - матрица, обратная к $A[I,\bar{J}]$, то в свете предыдущих параграфов 2-4 вырезку $\bar{D}[\bar{J}_0,\bar{I}_0]$ можно получить исходя из последовательности преобразований

$$L_m, L_{m-1}, \ldots, L_1, B^{-1}[J_0,I_0], P_1, P_2, \ldots, P_n,$$

правила умножения в которой расшифровываются ниже.

5.I. Способы задания мультипликаторов. Каждое левостороннее преобразование L_k однозначно определяется множеством $J_0^{(k)}$, вектором $\ell[J_0^{(k)}]$ и тройкой целых чисел (ℓ_k, j_k, s_k). Здесь ℓ_k принимает значение H или F, т.е. указывает на тип преобразования. Если $\ell_k = H$, то $\ell[J_0^{(k)}]$ - столбец, а L_k соответствует преобразованию

$$H_{j_k}[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}] = E[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}] + \\ + \{\ell[J_0^{(k)}] - E[J_0^{(k)}, j_k]\} \cdot E[j_k, J_0^{(k)}], \qquad (5.I)$$

т.е. одному из преобразований типа (2.3), (2.5), (3.5), (3.8), (3.9), (4.8) при соотвествующем значении $j_k \geqslant 0$. Если же $\ell_k = F$, то $\ell[J_0^{(k)}]$ - строка и L_k при $j_k > 0$ соответствует преобразованию

$$F_{j_k}[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}] = E[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}] + \\ + E[J_0^{(k)}, j_k] \cdot \{\ell[J_0^{(k)}] - E[j_k, J_0^{(k)}]\}, \qquad (5.2)$$

т.е. одному из преобразований типа (3.7), (4.6), а при $j_k = 0$ - преобразованию (3.6). Число $s_k \geqslant 0$ в случае $\ell_k = H$ характеризует изменение множества $J_0^{(k)}$ в результате преобразования L_k: если $s_k \neq 0$, то номер $j_k \in J_0^{(k)}$ заменяется на s_k, а если $s_k = 0$, то из преобразования (5.I) берется вырезка $H_{j_k}[J_0^{(k)} \setminus \{j_k\}, J_0^{(k)}]$ и номер j_k исключается из множества $J_0^{(k)}$. В случае $\ell_k = F$ число $s_k = 0$ выделяет преобразования типа (3.6) и (3.7), причем первому из них соответствует тройка $(F,0,0)$. Если же в тройке (F, j_k, s_k) число s_k отлично от нуля, то (5.2) - преобразование типа (4.6) и s_k совпадает с меткой ξ, которую можно считать порядковым номером мультипликатора L_k в списке всех преобразований типа (4.5).

Правостороннее преобразование P_r типа (4.7) определяется множеством $I_0^{(r)}$, столбцом $\rho[I_0^{(r)}]$ и тройкой (H, i_r, ξ_r). Остальные типы правосторонних преобразований однозначно определяются лишь множеством $I_0^{(r)}$ и тройкой $(F, i_r, 0)$ и представляют собой вырезки из единичной матрицы.

Заметим, что множества $J_0^{(k)}$ и $I_0^{(r)}$ в явном виде не хранятся, а особые строки или столбцы $\ell\cdot[J_0^{(k)}]$ и $\rho[I_0^{(r)}]$ преобразований L_k и P_r запоминаются, как правило, в сокращенном виде - лишь ненулевые компоненты с указанием их номеров из множеств $J_0^{(k)}$ и $I_0^{(r)}$.

5.2. Для примера покажем, как вычисляется произведение некоторой строки $a[\bar{J}_0]$ на матрицу $\bar{D}[\bar{J}_0, \bar{I}_0]$.

Положим $\bar{J}_0^{(m)} = \bar{J}_0$, $a_m[\bar{J}_0^{(m)}] = a[\bar{J}_0]$ и предположим, что уже вычислена строка

$$a_k[\bar{J}_0^{(k)}] = a[\bar{J}_0]\cdot L_m \cdot L_{m-1} \cdot \ldots \cdot L_{k+1} \qquad (k \le m).$$

Если $\ell_k = H$ в тройке (ℓ_k, j_k, s_k), отвечающей преобразованию L_k, то при $s_k \ne 0$ нужно положить

$$J_0^{(k)} = (\bar{J}_0^{(k)} \setminus \{s_k\}) \cup \{j_k\},$$

$$\bar{a}_k[j_k] = a_k[s_k], \quad \bar{a}_k[\bar{J}_0^{(k)} \setminus \{s_k\}] = a_k[\bar{J}_0^{(k)} \setminus \{s_k\}]$$

и вычислить

$$a_{k-1}[J_0^{(k)}] = \bar{a}_k[J_0^{(k)}]\cdot H_{j_k}[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}],$$

полагая затем $\bar{J}_0^{(k-1)} = J_0^{(k)}$. Если же $(\ell_k, j_k, s_k) = (H, j_k, 0)$, то

$$J_0^{(k)} = \bar{J}_0^{(k)} \cup \{j_k\} = \bar{J}_0^{(k-1)},$$

$$a_{k-1}[J_0^{(k)}] = a_k[\bar{J}_0^{(k)}]\cdot H_{j_k}[\bar{J}_0^{(k)}, J_0^{(k)}].$$

Если преобразованию L_k соответствует тройка $(F, 0, 0)$, то

$$J_0^{(k)} = \bar{J}_0^{(k)} \setminus \{0\} = \bar{J}_0^{(k-1)},$$

$$a_{k-1}[J_0^{(k)}] = a_k[J_0^{(k)}] + a_k[0]\cdot \ell[J_0^{(k)}].$$

Если $j_k \ne 0$ в тройке $(F, j_k, 0)$, то

$$J_0^{(k)} = \bar{J}_0^{(k)} = \bar{J}_0^{(k-1)},$$

$$a_{k-1}[J_0^{(k)}] = a_k[J_0^{(k)}] \cdot F_{j_k}[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}] .$$

Если $s_k \neq 0$ в тройке (F, j_k, s_k), то L_k - преобразование типа (4.6) при $j'' = j_k$ и $\xi = s_k$. Поэтому полагаем

$$J_0^{(k)} = \bar{J}_0^{(k)}, \quad \bar{J}_0^{(k-1)} = J_0^{(k)} \setminus \{j_k\},$$

$$a_{k-1}[J_0^{(k)}] = a_k[J_0^{(k)}] \cdot F_{j_k}[J_0^{(k)}, J_0^{(k)}]$$

и запоминаем величину $c[s_k] = a_{k-1}[j_k]$ по "адресу" s_k.

Таким образом, полагая $k = m, m-1, \dots, 1$, вычислим строку $a_0[J_0^{(1)}]$ и определим множество $\bar{J}_0^{(0)} = J_0$. Теперь можно решить относительно строки $b[I_0]$ систему

$$b[I_0] \cdot B[I_0, J_0] = a_0[J_0] . \qquad (5.3)$$

Здесь, как уже отмечалось во введении, предполагается, что матрица $B[I_0, J_0]$, обладающая симметрично разветвленной блочностью, приведена к блочно-треугольному виду с помощью процедуры повторения [4], поэтому система (5.3) решается специальным алгоритмом [1,2].

Положим $\bar{I}_0^{(1)} = I_0$, $b_1[\bar{I}_0^{(1)}] = b[I_0]$ и предположим, что уже вычислена строка

$$b_r[\bar{I}_0^{(r)}] = b[I_0] \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{r-1} \qquad (r \geq 1).$$

Если преобразованию P_r соотвествует тройка (H, i_r, ξ_r), то

$$I_0^{(r)} = \bar{I}_0^{(r)}, \quad \bar{I}_0^{(r+1)} = I_0^{(r)} \cup \{i_r\},$$

$$b_{r+1}[I_0^{(r)}] = b_r[I_0^{(r)}], \quad b_{r+1}[i_r] = c[\xi_r] + b_r[I_0^{(r)}] \cdot p[I_0^{(r)}].$$

Если же преобразованию P_r соотвествует тройка $(F, i_r, 0)$, то P_r - вырезка $E[\bar{I}_0^{(r)}, I_0^{(r)} \setminus \{i_r\}]$ из единичной матрицы. Поэтому

$$I_0^{(r)} = \bar{I}_0^{(r)} \setminus \{i_r\} = \bar{I}_0^{(r+1)}, \quad b_{r+1}[I_0^{(r)}] = b_r[I_0^{(r)}] .$$

Полагая $r = 1, 2, \dots, n$, получим множество $\bar{I}_0^{(n+1)} = \bar{I}_0$ и строку $b_{n+1}[\bar{I}_0]$ - произведение строки $a[\bar{J}_0]$ на матрицу $\bar{D}[\bar{J}_0, \bar{I}_0]$.

Произведение матрицы $\bar{D}[\bar{J}_0, \bar{I}_0]$ на некоторый столбец $\alpha[\bar{I}_0]$ вычисляется симметричным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании. - Докл. АН СССР, 1977, т.205, № 5, с. 993-996.
2. ЗВЯГИНА Р.А. Системы линейных уравнений с иерархической симметричной блочностью матриц. - Оптимизация, 1978, вып. 22(39), с. 69-82.
3. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Преобразование мультипликативного представления матрицы с иерархической блочностью. - Оптимизация, 1978, вып. 22(29), с.53-68.
4. ЗВЯГИНА Р.А. Приведение к блочно-треугольному виду матрицы с симметрично разветвленной блочностью. - Настоящий сб., с. 34-44.
5. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. - М.: Наука, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.06.1980 г.