Выпуск 26 (43) ОПТИМИЗАЦИЯ 1980 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ. ДВУХСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ

А.М.Рубинов

В этой статье рассматривается дискретный вариант двухсекторной модели экономического прогнозирования, определенной Н.Н.Моисеевым в [1]. Статья представляет по сути дела продолжение работы [2], где рассматривалась односекторная модель подобного типа. Так же, как и в [2], переход к дискретному времени позволяет использовать технику моделей неймановского типа, на основе которой удается выдвинуть гипотезу о выборе ставок заработной платы. Попутно показывается, что в стационарной двухсекторной модели определяющую роль играет второе подразделение (производство предметов потребления) в том смысле, что по равновесным параметрам этого подразделения определяются равновесные параметры первого подразделения (производство средств производства), в то время как обратное утверждение не справедливо. Показывается, что соотношения между первым и вторым подразделениями могут быть выражены с помощью одного числового параметра, характеризуемого зависимостью между предельной производительностью труда и ставками заработной платы в обоих подразделениях.

1. Описание модели. Рассматривается экономика, состоящая из двух подразделений. Первое из них производит средства производства, второе - предметы потребления. Величины, относящиеся к i-му подразделению, помечаются верхним индексом i. Символы p^i, k^i, y^i, w^i, L^i (фазовые переменные модели) обозначают соответственно выпуск конечного продукта, основные фонды, инвестиции, потребление и количество рабочей силы в i-м подразделении

$(i=1,2)$. Временная переменная t пробегает значения 0,1,2...

Для каждой точки $x=(K,L)$ и момента времени t определена производственная функция $F^i_{x,t}$, имеющая вид

$$F^i_{x,t}(\tilde{K},\tilde{L})=\gamma^i(K,L,t)F^i(\tilde{K},\tilde{L}), \qquad (1)$$

где $F^i(K,L)$ - некоторая заданная производственная функция, определенная при всех $K,L\geq 0$, $\gamma^i(K,L,t)$ - функция, указывающая эффективность использования фондов в i-м подразделении в состоянии (K,L) и момент времени t. Кроме того, известен коэффициент выбытия фондов μ^i_t. Полагаем $\nu^i_t=1-\mu^i_t$, $i=1,2$. Если в каждый момент времени известны нормативные фондовооруженности и ставки заработной платы ω^i_t, то модель замыкается. Один из основных вопросов, рассматриваемых в этой работе, заключается в выдвижении гипотезы о выборе ставок заработной платы в каждом подразделении.

Выпишем систему уравнений и неравенств, определяющих модель. Пусть $\tilde{P}^i, \tilde{K}^i, \tilde{L}^i, \tilde{w}^i, \tilde{y}^i$ - количества продукта, основных фондов, рабочей силы, предметов потребления и инвестиций в i-м подразделении в момент $t+1$, возможные при наличии фондов K^i и рабочей силы L^i в момент t. Величины $\tilde{P}^i, \tilde{K}^i, \tilde{L}^i, \tilde{w}^i, \tilde{y}^i$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{array}{ll} \tilde{P}^1\leq F^1_{x^1,t}(K^1,L^1); & \tilde{P}^2\leq F^2_{x^2,t}(K^2,L^2);\\ \tilde{P}^1=\tilde{y}^1+\tilde{y}^2; & \tilde{P}^2=\tilde{w}^1+\tilde{w}^2;\\ \tilde{K}\leq \nu^1_t K^1+\tilde{y}^1; & \tilde{K}^2\leq \nu^2_t K^2+\tilde{y}^2;\\ \tilde{w}^1\geq \omega^1_{t+1}\tilde{L}^1; & \tilde{w}^2\geq \omega^2_{t+1}\tilde{L}^2;\\ \tilde{L}^i,\tilde{K}^i,\tilde{y}^i,\tilde{w}^i\geq 0; & x^i=(K^i,L^i),\quad i=1,2. \end{array} \qquad (2)$$

Соотношение (1) вместе с гипотезой о выборе ставок заработной платы ω^i_{t+1} и задают рассматриваемую модель[ж)], которая в дальнейшем обозначается через $\mathcal{M}_2$.

Подобно тому, как это было сделано в [2] для однопродуктовой модели $\mathcal{M}_1$, определим суперлинейные многозначные отобра-

ж) Точнее говоря, предполагается, что нормативные фондовооруженности, ставки заработной платы и коэффициенты выбытия фондов в момент $t+1$ определяются состоянием модели в момент t. Как уже отмечалось, основное внимание в этой работе уделено гипотезе о выборе ставок заработной платы.

жения, порождающие траектории модели $\mathcal{M}_2$. С этой целью введем в рассмотрение множества

$$\xi=\{(u,v)\in R^2_+ : u+v\leq 1\},$$
$$\bar{\xi}_t=\{(u,v)\in R^2_+ : \omega^1_t u+\omega^2_t v\leq 1\}.$$

Для вектора $x=(K^1,K^2,L^1,L^2)$ и момента времени t определим суперлинейное отображение $a_{x,t}$, положив

$$a_{x,t}(\bar{K}^1,\bar{K}^2,\bar{L}^1,\bar{L}^2)=\{(\tilde{K}^1,\tilde{K}^2,\tilde{L}^1,\tilde{L}_2):(\tilde{K}^1,\tilde{K}^2)\in(K^1_0,K^2_0)+$$
$$+F^1_{x^1,t}(\bar{K}^1,\bar{L}^1)\xi,\ 0\leq(K^1_0,K^2_0)\leq(\nu^1_t\bar{K}^1,\nu^2_t\bar{K}^2),\ x^1=(K^1,L^1);$$
$$(\tilde{L}^1,\tilde{L}^2)\in F^2_{x^2,t}(\bar{K}^2,\bar{L}^2)\bar{\xi}_{t+1};\ x^2=(K^2,L^2)\}. \quad (3)$$

Легко проверить, исключая из системы (I) переменные $\tilde{P}^i,\tilde{y}^i$, $\tilde{\omega}^i$, что вектор $(\tilde{K}^1,\tilde{K}^2,\tilde{L}^1,\tilde{L}^2)$ удовлетворяет этой системе тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{K}^1,\tilde{K}^2,\tilde{L}^1,\tilde{L}^2)\in a_{x,t}(K^1,K^2,L^1,L^2).$$

Таким образом, траектории модели $\mathcal{M}_2$ можно изучать с помощью суперлинейных отображений $a_{x,t}$.

Сформулируем требования, предъявляемые ниже к производственным функциям $F^i(K,L)$. Предполагается, что эти функции заданы на конусе R^2_+ и неотрицательны там, дважды непрерывно дифференцируемы, строго суперлинейны (т.е. положительно однородны первой степени, вогнуты и $F^i(K+K',L+L')>F^i(K,L)+F^i(K',L')$, если $(K,L)\neq\lambda(K',L')$, $\lambda>0$, и хотя бы одна из точек (K,L), (K',L') не имеет нулевых координат). Кроме того,

$$F^i(0,L)=F^i(K,0)=0.$$

Всюду ниже используется обозначение $f^i(\eta)=F^i(\eta,1)$.

Сделаем некоторые предположения о параметрах модели. Всюду ниже (кроме приложения) предполагается, что выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) $\lim\limits_{K\to+\infty}F^i(K,1)=\lim\limits_{L\to+\infty}F^i(1,L)=+\infty,\ i=1,2;$

2) $\mu^1_t=\mu^2_t,\ t=0,1,\ldots$

Результаты, приведенные ниже, остаются справедливыми и при существенно более слабых предположениях. Подробно этот вопрос обсуждается в приложении.

2. **Стационарный случай.** Так же, как и при исследовании

однопродуктовой модели $\mathfrak{M}_1$ (см. [2]), рассмотрим сначала стационарный случай: функции γ^i в (I) равны единице, $\omega^i_{t+1}=\omega^i$, $\mu^i_t=\mu^i$ при всех $t=0,1,\ldots,\ i=1,2$. В этом случае модель $\mathfrak{M}_2$ обращается в модель Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$, определяемую производственным отображением a:

$$a(K^1,K^2,L^1,L^2)=\{(\tilde K^1,\tilde K^2,\tilde L^1,\tilde L^2):(\tilde K^1,\tilde K^2)\in(K^1_0,K^2_0)+$$

$$+F^1(K^1,L^1)\tilde{\xi},\ 0\leqslant(K^1_0,K^2_0)\leqslant(\nu^1K^1,\nu^2K^2);$$

$$(\tilde L^1,\tilde L^2)\in F^2(K^2,L^2)\tilde{\xi}\},$$

где положено $\nu^i=1-\mu^i,\ \tilde{\xi}=\{(u,v)\in R^2_+:\omega^1u+\omega^2v\leqslant 1\}$.

Предполагается также, что либо

$$\lim_{K\to+\infty}F^i(K,1)=\lim_{L\to\infty}F^i(1,L)=+\infty,\ i=1,2, \qquad (4)$$

либо

$$\mu^1=\mu^2. \qquad (5)$$

Так же, как и в случае модели $\mathfrak{M}_1$, нам понадобится вычислить неймановский темп роста и неймановский равновесный вектор модели $\mathcal{Z}$. С этой целью рассмотрим для каждого $\beta>0$ функции, определенные при $\eta>0$ равенствами

$$g^1_\beta(\eta)=\frac{\nu^1\eta+f^1(\eta)}{\eta+\beta\omega^1};\quad g^2_\beta(\eta)=\frac{\nu^2\eta+\beta f^2(\eta)}{\eta+\beta\omega^2}. \qquad (6)$$

Как следует из лемм 3 и 4 (см. приложение), функция g^1_β достигает максимума на $(0,+\infty)$, если $\beta<x^1/\nu^1\omega^1$, где $x^1=\lim\limits_{\eta\to+\infty}f^1(\eta)$; функция g^2_β достигает максимума на $(0,+\infty)$, если $\omega^2<x^2/\nu^2$, где $x^2=\lim\limits_{\eta\to+\infty}f^2(\eta)$. При этом максимум каждой из этих функций достигается в единственной точке.

Положим

$$\varphi^i(\beta)=\max_{\eta>0}g^i_\beta(\eta)\qquad(0<\beta<x^1/\nu^1\omega^1).$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА I. Пусть $\omega^2<x^2/\nu^2$ и выполнено хотя бы одно из предположений (4) и (5). Тогда существует и единственно число $\beta\in(0,x^1/\nu^1\omega^1)$, при котором $\varphi^1(\beta)=\varphi^2(\beta)$. При этом

$\varphi^1(\beta) > \nu^1,\ \varphi^2(\beta) > \nu^2.$

Доказательство этой леммы (в более общей ситуации) содержится в приложении (см. лемму 6 и замечание 2 к ней).

ТЕОРЕМА I. Пусть $\omega^2 < \varkappa^2/\nu^2$ и выполнено хотя бы одно из предположений (4) и (5). Пусть число β определено так, как в лемме I. Тогда число $\alpha = \varphi^1(\beta) = \varphi^2(\beta)$ является неймановским темпом роста модели $\mathfrak{Z}$; функционал $\bar{p} = (1, 1, \beta\omega^1, \beta\omega^2)$ является неймановскими равновесными ценами; неймановский равновесный вектор $\bar{x} = (\bar{K}^1, \bar{K}^2, \bar{L}^1, \bar{L}^2)$ определяется соотношениями $\bar{K}^1/\bar{L}^1 = \bar{\xi}^1$, $\bar{K}^2/\bar{L}^2 = \bar{\xi}^2$, $\bar{L}^1/\bar{L}^2 = (\alpha - \nu^2)\bar{\xi}^2/\alpha\beta\omega^1$, где $\bar{\xi}^i$ - точка, в которой достигает максимума функция g^i_β, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что тройка $(\alpha, \bar{x}, \bar{p})$ является состоянием равновесия, т.е.

$$\bar{p}(y) \leqslant \alpha \bar{p}(x), \quad y \in a(x), \tag{6}$$

$$\alpha \bar{x} \in a(\bar{x}). \tag{7}$$

Так как функционал $\bar{p}$ и вектор $\bar{x}$ строго положительны, то из справедливости (6) и (7) следует, что это состояние равновесия является неймановским.

Обратимся к доказательству неравенства (6). Пусть $x = (K^1, K^2, L^1, L^2)$, $y = (\tilde{K}^1, \tilde{K}^2, \tilde{L}^1, \tilde{L}^2)$ и $y \in a(x)$. Тогда при некоторых $(u, v) \in \xi$ и $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \xi$ выполняются неравенства

$$\tilde{K}^1 \leqslant \nu^1 K^1 + F^1(K^1, L^1)u; \quad \tilde{L}^1 \leqslant F^2(K^2, L^2)\tilde{u};$$

$$\tilde{K}^2 \leqslant \nu^2 K^2 + F^1(K^1, L^1)v; \quad \tilde{L}^2 \leqslant F^2(K^2, L^2)\tilde{v}.$$

Поэтому

$$\bar{p}(y) = \tilde{K}^1 + \tilde{K}^2 + \beta\omega^1\tilde{L}^1 + \beta\omega^2\tilde{L}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \nu^1 K^1 + \nu^2 K^2 + F^1(K^1, L^1) + \beta F^2(K^2, L^2). \tag{8}$$

Из определения α следует, что при всех (K, L)

$$\alpha = \varphi^1(\beta) \geqslant \frac{\nu^1 K + F^1(K, L)}{K + \beta\omega^1 L}, \tag{9}$$

$$\alpha = \varphi^2(\beta) \geqslant \frac{\nu^2 K + \beta F^2(K, L)}{K + \beta\omega^2 L}. \tag{10}$$

Подставив в (9) вместо (K,L) вектор (K^1,L^1), а в (I0) вектор (K^2,L^2), легко проверить, что

$$\alpha(K^1+K^2)+\alpha\beta(\omega^1L^1+\omega^2L^2)\geq$$
$$\geq \nu^1K^1+\nu^2K^2+F^1(K^1,L^1)+\beta F^2(K^2,L^2).$$

Поэтому, привлекая (8), получим

$$\alpha\bar{p}(x)=\alpha((K^1+K^2)+\beta\omega^1L^1+\beta\omega^2L^2)\geq\bar{p}(y).$$

Тем самым неравенство (6) доказано.

Перейдем к соотношению (7). Положим

$$\delta=\frac{(\alpha-\nu^2)\bar{\eta}^2}{\alpha\beta\omega^1}. \tag{I1}$$

Пусть

$$u=\frac{(\alpha-\nu^1)\bar{\eta}^1}{(\alpha-\nu^1)\bar{\eta}^1+\alpha\beta\omega^1};\quad v=\frac{(\alpha-\nu^2)\bar{\eta}^2\cdot\frac{1}{\delta}}{(\alpha-\nu^1)\bar{\eta}^1+\alpha\beta\omega^1}; \tag{I2}$$

$$\tilde{u}=\frac{\alpha\beta\delta}{(\alpha-\nu^2)\bar{\eta}^2+\alpha\beta\omega^2};\quad \tilde{v}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\nu^2)\bar{\eta}^2+\alpha\beta\omega^2}. \tag{I3}$$

Тогда $u,v>0$, $u+v=1$, $\tilde{u},\tilde{v}>0$, $\omega^1\tilde{u}+\omega^2\tilde{v}=1$.

Из (I2) и (I3) следует, что

$$\alpha\bar{\eta}^1=\nu^1\bar{\eta}^1+((\alpha-\nu^1)\bar{\eta}^1+\alpha\beta\omega^1)u; \tag{I4}$$

$$\alpha\bar{\eta}^2=\nu^2\bar{\eta}^2+((\alpha-\nu^1)\bar{\eta}^1+\alpha\beta\omega^1)\delta v; \tag{I5}$$

$$\alpha\delta=\left(\frac{\alpha-\nu^2}{\beta}\bar{\eta}^2+\alpha\omega^2\right)\tilde{u}; \tag{I6}$$

$$\alpha=\left(\frac{\alpha-\nu^2}{\beta}\bar{\eta}^2+\alpha\omega^2\right)\tilde{v}. \tag{I7}$$

Воспользовавшись равенством $\alpha=\dfrac{\nu^1\bar{\eta}^1+f^1(\bar{\eta}^1)}{\bar{\eta}^1+\beta\omega^1}$, получим из (I4) и (I5)

$$\alpha\bar{\eta}^1=\nu^1\bar{\eta}^1+f^1(\bar{\eta}^1)u;\quad \alpha\bar{\eta}^2/\delta=\nu^2\bar{\eta}^2/\delta+f^1(\bar{\eta}^1)v. \tag{I8}$$

Воспользовавшись равенством $\alpha=\dfrac{\nu^2\bar{\eta}^2+\beta f^2(\bar{\eta}^2)}{\bar{\eta}^2+\beta\omega^2}$, получим из (I6) и (I7)

$$\alpha\delta=f^2(\bar{\eta}^2)\tilde{u},\quad \alpha=f^2(\bar{\eta}^2)\tilde{v}. \tag{I9}$$

Полагая в (I8) и (I9) $\bar{K}^1/\bar{L}^1=\bar{\eta}^1$, $\bar{K}^2/\bar{L}^2=\bar{\eta}^2$, $\bar{L}^1/\bar{L}^2=\delta$, убедимся в том, что $\alpha(\bar{K}^1,\bar{K}^2,\bar{L}^1,\bar{L}^2)\in a(\bar{K}^1,\bar{K}^2,\bar{L}^1,\bar{L}^2)$. Теорема доказана.

Всюду ниже, не оговаривая этого особо, считаем, что по крайней мере одно из предположений (4) или (5) выполнено, и $\omega^2 < \varkappa^2/y^2$.

Свяжем с рассматриваемой моделью $\mathcal{Z}$ две модели Неймана - Гейла $\mathcal{Z}^1$ и $\mathcal{Z}^2$, определяемые производственными отображениями a^1 и a^2 соответственно, где

$$a^1(K,L)=\{(\tilde{K},\tilde{L}): 0\le \tilde{K}\le y^1K+K_0;$$
$$K_0\ge 0,\ 0\le \tilde{L}\le L_0; K_0+\beta\omega^1 L_0\le F^1(K,L)\},$$
$$a^2(K,L)=\{(\tilde{K},\tilde{L}): 0\le \tilde{K}\le y^2K+K_0;$$
$$K_0\ge 0,\ 0\le \tilde{L}\le L_0; K_0+\beta\omega^2 L_0\le \beta F^2(K,L)\}.$$

Здесь β - число, фигурирующее в теореме I. Модель $\mathcal{Z}_i$, $i=1,2$, описывает i-е подразделение; $\mathcal{Z}^i$ можно рассматривать как стационарную модель, отвечающую односекторной модели $\mathcal{M}_1$, описанной в [2]. При этом $\mathcal{Z}^1$ (соответственно $\mathcal{Z}^2$) определяется производственной функцией $F^1(K,L)$ (соответственно $\beta F^2(K,L)$), коэффициентом выбытия фондов μ^1 (соответственно μ^2) и ставкой заработной платы $\beta\omega^1$ (соответственно $\beta\omega^2$). Как следует из результатов [2], темпы роста α^i моделей $\mathcal{Z}^i$ находятся по формулам

$$\alpha_1=\max_{\eta>0}\frac{\nu^1\eta+f^1(\eta)}{\eta+\beta\omega^1};\qquad \alpha_2=\max_{\eta>0}\frac{\nu^2\eta+\beta f^2(\eta)}{\eta+\beta\omega^2},$$

Откуда следует, что $\alpha^1=\alpha^2=\alpha$. Равновесные фондовооруженности моделей $\mathcal{Z}^1$ и $\mathcal{Z}^2$ совпадают с $\bar{\eta}^1$ и $\bar{\eta}^2$ соответственно. Это показывает, что изучение модели $\mathcal{Z}$ сводится к рассмотрению существенно более простых моделей $\mathcal{Z}^1$ и $\mathcal{Z}^2$. Отметим сразу же, что на языке этих моделей различие между первым и вторым подразделением выражается в том, что в модель $\mathcal{Z}^2$ производственная функция входит с множителем β, а в модели $\mathcal{Z}^1$ этого множителя нет. Это различие оказывается весьма существенным. Так (см. ниже) по равновесным параметрам модели $\mathcal{Z}^1$ можно восстановить равновесные параметры модели $\mathcal{Z}^2$ (а стало быть, и $\mathcal{Z}$), а обратное неверно.

Нас будут интересовать связи между равновесными параметрами модели $\mathcal{Z}$: $\alpha, \beta, \bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, \delta$, а также связи указанных величин с ω^1 и ω^2.

Из результатов [2], примененных к моделям $\mathcal{Z}^1$ и $\mathcal{Z}^2$ соответственно, следует, что

$$\alpha=\nu^1+(f^1)'(\bar{\eta}^1); \tag{20}$$

$$\omega^1 = \frac{1}{\beta}\,\frac{f^1(\bar{\varrho}^1) - \bar{\varrho}^1 (f^1)'(\bar{\varrho}^1)}{\nu^1 + (f^1)'(\bar{\varrho}^1)}; \tag{21}$$

$$\alpha = \nu^2 + \beta (f^2)'(\bar{\varrho}^2); \tag{22}$$

$$\omega^2 = \frac{f^2(\bar{\varrho}^2) - \bar{\varrho}^2 (f^2)'(\bar{\varrho}^2)}{\nu^2 + \beta (f^2)'(\bar{\varrho}^2)}. \tag{23}$$

Предположим, что нам известны темп роста α и равновесная фондовооруженность $\bar{\varrho}^2$ модели $\mathcal{Z}^2$. Тогда из (22) определяется β, из (32) - ω^2. Зная α и β, из (20) и (21) можно определить $\bar{\varrho}^1$ и ω^1 и тем самым δ. Таким же образом все параметры модели можно выразить через α и ω^2, $\bar{\varrho}^2$ и ω^2.

Перейдем теперь к первому подразделению. Каждая из трех величин $\alpha, \bar{\varrho}^1, \beta\omega^1$ позволяет отыскать две оставшиеся величины. Однако найти по ним β, δ и параметры модели $\mathcal{Z}^2$ нельзя.

Нетрудно проверить, что знание одного из параметров модели $\mathcal{Z}^1$ и одного из параметров модели $\mathcal{Z}^2$ (отличного от α) позволяет найти все остальные параметры модели $\mathcal{Z}$. В частности, если известны равновесные фондовооруженности $\bar{\varrho}^1$ и $\bar{\varrho}^2$, то по ним определяются ω^1 и ω^2 и, стало быть, модель $\mathcal{Z}$. Отметим, что, как легко следует из леммы 3 (см. приложение), при любом выборе $\bar{\varrho}^2$ выполняется неравенство $\omega^2 < \varkappa^2/\nu^2$. Все равновесные параметры модели $\mathcal{Z}$ определяются, если известно число β и одно из чисел $\alpha, \bar{\varrho}^1, \bar{\varrho}^2, \omega^1, \omega^2$, а также по парам чисел δ, α и $\delta, \bar{\varrho}^1$.

Вычислим предельные производительности труда $\frac{\partial F^1}{\partial L}(\bar{K}^1, \bar{L}^1)$ и $\frac{\partial F^2}{\partial L}(\bar{K}^2, \bar{L}^2)$ в состоянии равновесия модели $\mathcal{Z}$. Используя (21) и (23), имеем

$$\frac{\partial F^1}{\partial L}(\bar{K}^1, \bar{L}^1) = \alpha\beta\omega^1; \qquad \frac{\partial F^2}{\partial L}(\bar{K}^2, \bar{L}^2) = \alpha\omega^2.$$

Из этих равенств следует экономический смысл числа β: оно показывает отношение величин $\frac{\partial F^1}{\partial L}/\omega^1$ и $\frac{\partial F^2}{\partial L}/\omega^2$ в состоянии равновесия.

Так же, как и в односекторной ситуации, модель $\mathcal{Z}$ представляет самостоятельный интерес лишь в случае застоя (научно-технический прогресс отсутствует, производственные функции и коэффициенты выбытия фондов постоянны). При этом $\alpha = 1$. В этом случае

$$(f^1)'(\bar{\varrho}^1)=\mu^1; \quad f^2(\bar{\varrho}^2)=\mu^2/\beta .$$

Так как $\alpha = 1$, то
$$f^1(\bar{\varrho}^1)=\beta\omega^1+\bar{\varrho}^1(f^1)'(\bar{\varrho}^1);$$
$$f^2(\bar{\varrho}^2)=\omega^2+\bar{\varrho}^2(f^2)'(\bar{\varrho}^2). \tag{24}$$

Величина $f^i(\bar{\varrho}^i)=F^i(\bar{K}^i,\bar{L}^i)/\bar{L}^i$ представляет собой среднюю производительность труда в i-м подразделении за единичный временной интервал. Второе из равенств (24) показывает, что ставка заработной платы во втором подразделении ниже средней производительности труда в этом подразделении (в состоянии равновесия). При этом
$$f^2(\bar{\varrho}^2)-\omega^2=\bar{\varrho}^2\mu^2/\beta .$$

В первом подразделении можно лишь утверждать, что средняя производительность труда выше величины $\beta\omega^1$. При этом
$$f^1(\bar{\varrho}^1)-\beta\omega^1=\bar{\varrho}^1\mu^1.$$

Отметим, что предельная производительность труда во втором подразделении совпадает со ставкой заработной платы ω^2, а в первом - с величиной $\beta\omega^1$.

Так как α фиксировано $(\alpha=1)$, то каждый из параметров второго подразделения ($\bar{\varrho}^2$ или ω^2) однозначно определяет модель и, стало быть, параметры первого подразделения; первое подразделение этим свойством не обладает.

В силу теорем о магистрали, для каждой бесконечной траектории $(K_t^1, K_t^2, L_t^1, L_t^2)$ модели, исходящей из некоторой точки $(K_0^1, K_0^2, L_0^1, L_0^2)$, выполняется одно из двух: либо
$$K_t^1\longrightarrow 0,\quad K_t^2\longrightarrow 0,\quad L_t^1\longrightarrow 0,\quad L_t^2\longrightarrow 0,$$
либо
$$\frac{K_t^1}{L_t^1}\longrightarrow\bar{\varrho}^1;\quad \frac{K_t^2}{L_t^2}\longrightarrow\bar{\varrho}^2;\quad \frac{L_t^1}{L_t^2}\longrightarrow\delta .$$

3. Гипотеза о выборе ставок заработной платы. Перейдем к рассмотрению общей модели $\mathfrak{M}_2$, описанной в п.I.

Предположим, что в момент t известно состояние экономики $x_t=(K_t^1,K_t^2,L_t^1,L_t^2)$, причем $L_t^i=(L_t^i)^*(K_t^i)$, $i=1,2$, где $(L_t^i)^*(K^i)=K^i/(\varrho_t^i)^*(K^i)$ - нормативная численность рабочей силы в i-м подразделении, отвечающая фондам K^i в момент t, $(\bar{\varrho}_t^i)^*$ - нормативная фондовооруженность в i-м подразделении в момент t. Требуется определить параметры экономики в момент $t+1$. Основное внимание , как и в односекторном

случае, уделим выбору ставок заработной платы. Предполагая на время, что эти ставки ω^1_{t+1} и ω^2_{t+1} известны, построим с помощью формулы (3) отображение $a_{x_t,t}$ и порождаемую им модель Неймана – Гейла $\mathcal{Z}_{x_t,t}$. Все одношаговые траектории, исходящие из точки x_t, в моделях $\mathcal{Z}_{x_t,t}$ и $\mathcal{M}_t$ совпадают. Это позволяет предположить, что и нормативные фондовооруженности (в момент t) в этих моделях совпадают. Рассуждая так же, как для односекторной модели [2], нетрудно понять, что под нормативными фондовооруженностями в модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$ естественно считать равновесные фондовооруженности. Эти рассуждения оправдывают следующую гипотезу: ставки заработной платы ω^1_{t+1} и ω^2_{t+1} должны быть выбраны так, чтобы вектор x_t являлся неймановским в модели $\mathcal{Z}_{x_t,t}$. Как следует из результатов предыдущего пункта, такой выбор ставок ω^i_{t+1} всегда возможен и притом единственным образом. Эти ставки определяются выражениями вида (2I) и (23), где число β находится так, как указано в лемме I.

После того, как ставки выбраны, встает вопрос о выборе нормативных фондовооруженностей $(\varrho^i_{t+1})^*(K^i)$ в момент $t+1$ (т.е. вопрос о выборе структуры фондов). Если величины ω^i_{t+1} и функции $(\varrho^i_{t+1})^*$ известны, то отыскание состояния x_{t+1} модели в момент $t+1$ по заданному в момент t состоянию x_t сводится к решению системы двух уравнений относительно K^1_{t+1} и K^2_{t+1}. (Здесь предполагается, что все неравенства в (2) заменены на точные равенства.) При естественных предположениях на функции $(\varrho^i_{t+1})^*$ эта система имеет единственное решение.

Определяя ставки заработной платы согласно принятой выше гипотезе, мы фиксируем по сути дела соотношения между первым и вторым подразделением. Эта фиксация определяется с помощью параметра β_t, равного отношению β^1_t к β^2_t, где β^i_t – отношение мгновенной производительности труда в момент t к ставке заработной платы в момент $t+1$ в i-м подразделении.

Приложение

Здесь выясняются некоторые свойства функций g^i_β и φ^i, введенных в п.2, и доказывается лемма I.

Пусть f – строго вогнутая возрастающая функция, определенная на $[0,+\infty]$, причем $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x=0$. Считаем, что f дважды непрерывно дифференцируема. Положим $\varkappa=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Если f удовлетворяет сформулированным выше условиям, то функция $u(x)=f(x)-xf'(x)$ возрастает и

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-xf'(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\varkappa.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u'(x)=-xf''(x)$, то функция u возрастает. Положим $\lim_{x\to+\infty}u(x)=\tilde{\varkappa}$. Предположим, что $\tilde{\varkappa}<+\infty$. Тогда $u(x)=\tilde{\varkappa}-\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – убывающая непрерывная функция, $\alpha(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Полагая $f(x)=xC(x)$ и решая дифференциальное уравнение $f(x)-xf'(x)=\tilde{\varkappa}-\alpha(x)$, получим при некотором $a>0$ и $x>0$

$$C(x)=C(a)+\tilde{\varkappa}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)+\int_a^x\frac{\alpha(t)}{t^2}dt.$$

Так как $\frac{f(x)}{x}=C(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, то

$$C(a)=\frac{\tilde{\varkappa}}{a}-\int_a^{+\infty}\frac{\alpha(t)}{t^2}dt,\ a>0.$$

Поэтому

$$f(x)=xC(x)=\tilde{\varkappa}-x\int_x^{+\infty}\frac{\alpha(t)}{t^2}dt.$$

Так как $x\int_x^{+\infty}\frac{\alpha(t)}{t^2}dt\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, то $\tilde{\varkappa}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\varkappa$. Если $\tilde{\varkappa}=+\infty$, то и $\varkappa=+\infty$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть F – производственная функция, обладающая свойствами, указанными в п.I, и $f(z)=F(z,1)$. Тогда, как следует из теоремы Эйлера об однородных функциях,

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)=f(z)-zf'(z),\quad z=K/L.$$

Таким образом, как следует из леммы 2,

$$\lim_{K/L\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)=\lim_{z\to+\infty}F(z,1).$$

ЛЕММА 3. Пусть

$$g(z)=\frac{\nu z+f(z)}{z+\omega},\ z>0,$$

где ν,ω – некоторые константы. Тогда, если $\omega<\frac{\varkappa}{\nu}$, то функция g достигает максимума на интервале $(0,+\infty)$, причем уравнение $g'(z)=0$ имеет единственное решение. Если же $\omega\geq\varkappa/\nu$, то функция g строго возрастает на этом интервале.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться в том, что равенство $g'(z)=0$ эквивалентно соотношению $\omega=\varphi(z)$, где

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-zf'(z)}{\nu+f'(z)}. \qquad (25)$$

Функция φ возрастает (ибо $\varphi'(z)>0$). Из леммы 2 следует, что

$$\lim_{z\to+\infty}\varphi(z)=\varkappa/\nu .$$

Это и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\omega<\varkappa/\nu$ и $\bar z$ - точка, в которой функция $g(z)$ достигает максимума на $(0,+\infty)$. Тогда

$$\max_{z>0} g(z)=g(\bar z)=\nu+f'(\varphi^{-1}(\omega)). \qquad (26)$$

Для доказательства следует в выражение для $g(\bar z)$ подставить вместо ω величину $\varphi(\bar z)$.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\psi(\beta)=\max_{z>0}\frac{\nu z+f(z)}{z+\beta\omega},\ \beta\in(0,\varkappa/\nu\omega).$$

Тогда ψ - непрерывная убывающая функция и

$$\lim_{\beta\to+0}\psi(\beta)=\nu+f'(0);\ \lim_{\beta\to\varkappa/\nu\omega}\psi(\beta)=\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что, как следует из предыдущей леммы, определение функции ψ корректно. Из (26) вытекает, что

$$\psi(\beta)=\nu+f'(\varphi^{-1}(\beta\omega)), \qquad (27)$$

где функция φ определена формулой (25). Отсюда следует, что функция ψ непрерывна и убывает.

Вычислим $\lim_{\beta\to+0}\psi(\beta)$. С этой целью найдем $\lim_{z\to+0}[f(z)-nf'(z)]$. Положим $\theta(p)=pf(1/p)$. Нетрудно проверить, что $\theta''(p)<0$, т.е. функция θ вогнута. Кроме того, $\lim_{p\to+\infty}\theta(p)/p=\lim_{z\to+0}f(z)=0$. Отсюда следует, что $\lim_{p\to+\infty}\theta'(p)=0$, а поэтому и $\lim_{z\to+0}(f(z)-zf'(z))=\lim_{p\to+\infty}\theta'(p)=0$. Из полученного равенства вытекает соотношение

$$\lim_{z\to+0}\varphi(z)=0,$$

из которого в свою очередь следует, что $\lim_{\omega\to+0}\varphi^{-1}(\omega)=0$. Используя непрерывность производной f' в нуле и привлекая равенство (27), получим

$$\lim_{\beta\to+0}\psi(\beta)=\nu+f'(0).$$

Та же формула (27) и соотношение $f'(\eta)\xrightarrow[\eta\to+\infty]{}0$ показывают, что

$$\lim_{\beta\to\varkappa/\nu\omega}\psi(\beta)=\nu.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\omega<\varkappa/\nu$ и

$$\chi(\beta)=\max_{\eta>0}\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega},\quad\beta\geqslant 0.$$

Тогда функция χ непрерывна, возрастает, $\chi(0)=\nu$, $\lim_{\beta\to+\infty}\chi(\beta)=\varkappa/\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 определение функции $\chi(\beta)$ корректно. Из (26) следует, что

$$\chi(\beta)=\nu+\beta f'(\varphi^{-1}(\beta\omega)),$$

где φ определена формулой (25). Отсюда вытекает непрерывность χ. Покажем, что χ возрастает на $(0,+\infty)$. Положим $\Lambda=\{\eta: f(\eta)>\nu\omega\}$. Из определения $\varkappa$ и неравенства $\nu\omega<\varkappa$ следует, что Λ непусто. Нетрудно проверить, что точка η, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega}\right)'=0,$$

входит в Λ при любом $\beta>0$. Непосредственным подсчетом проверяется, что неравенство $\beta_1>\beta_2>0$ влечет

$$\frac{\nu\eta+\beta_1 f(\eta)}{\eta+\beta_1\omega}>\frac{\nu\eta+\beta_2 f(\eta)}{\eta+\beta_2\omega},\quad\eta\in\Lambda.$$

Отсюда и следует, что функция χ возрастает. Равенство $\chi(0)=\nu$ очевидно. Вычислим $\lim_{\beta\to+\infty}\chi(\beta)$. Имеем

$$\lim_{\beta\to+\infty}\chi(\beta)=\sup_{\beta>0}\sup_{\eta\in\Lambda}\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega}=$$

$$=\sup_{\eta\in\Lambda}\sup_{\beta>0}\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega}.$$

Функция $\beta\to\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega}$ возрастает при $\eta\in\Lambda$ (ее производная положительна), поэтому

$$\sup_{\beta>0}\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega}=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{\nu\eta+\beta f(\eta)}{\eta+\beta\omega}=\frac{f(\eta)}{\omega}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \chi(\beta)=\sup_{\varrho\in\Lambda}\frac{f(\varrho)}{\omega}=\frac{\varkappa}{\omega}.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к ситуации, рассмотренной в п.2. Пусть F^i - производственные функции, участвующие в определении модели Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$, $f^i(\varrho)=F^i(\varrho,1)$, $\varkappa^i=\lim_{\varrho\to+\infty} f^i(\varrho)$, $i=1,2$. Пусть

$$g_\beta^1(\varrho)=\frac{\nu^1\varrho+f^1(\varrho)}{\varrho+\beta\omega^1}, \quad g_\beta^2(\varrho)=\frac{\nu^2\varrho+\beta f^2(\varrho)}{\varrho+\beta\omega^2}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\varkappa^1=+\infty$. Из леммы 3 следует, что при любом $\beta>0$ функция g_β^1 достигает максимума на $(0,+\infty)$. При этом функция $\varphi^1(\beta)=\max_{\varrho>0} g_\beta^1(\varrho)$ непрерывна, убывает,

$$\lim_{\beta\to+0}\varphi^1(\beta)=\nu^1+(f^1)'(0);\ \lim_{\beta\to+\infty}\varphi^1(\beta)=\nu^1.$$

Последнее вытекает из леммы 4.

Если $\omega^2<\varkappa^2/\nu^2$, то функция g_β^2 достигает максимума на $(0,+\infty)$ при любом β. При этом функция $\varphi^2(\beta)=\max_{\varrho>0} g_\beta^2(\varrho)$, следует из леммы 5, непрерывна, возрастает, $\lim_{\beta\to+0}\varphi^2(\beta)=\nu^2$, $\lim_{\beta\to+\infty}\varphi^2(\beta)=\varkappa^2/\omega^2$. Из сказанного вытекает следующее: если

$$\nu^1+(f^1)'(0)>\nu^2;\ \varkappa^2/\omega^2>\nu^1;\ \varkappa^2/\omega^2>\nu^2, \tag{28}$$

то существует и единственно $\beta>0$, при котором $\varphi^1(\beta)=\varphi^2(\beta)$. Если же по крайней мере одно из неравенств (28) не выполняется, то такого β не существует (либо g_β^2 не достигает своего максимума).

Перейдем к случаю, когда $\varkappa^1<+\infty$. В этом случае функция g_β^1 достигает максимума лишь при $\beta\in(0,\varkappa^1/\nu^1\omega^1)$. Поэтому функции φ^1 и φ^2 имеет смысл рассматривать только при указанных β. Эти функции непрерывны, причем φ^1 убывает, φ^2 возрастает; кроме того,

$$\lim_{\beta\to0}\varphi^1(\beta)=\nu^1+(f^1)'(0);\ \lim_{\beta\to\varkappa^1/\nu^1\omega^1}\varphi^1(\beta)=\nu^1;$$

$$\lim_{\beta\to+0}\varphi^2(\beta)=\nu^2;$$

$$\lim_{\beta \to \varkappa^1/\nu^1\omega^1} \varphi^2(\beta) = \varphi^2(\varkappa^1/\nu^1\omega^1) = \nu^2 + \varkappa^1/\nu^1\omega^1 (f^2)'(\bar{\xi}),$$

где $\bar{\xi} = \Phi^{-1}(\varkappa^1/\nu^1\omega^1, \omega^2)$, функция Φ определена формулой (25) при $f = f^2$. Обозначим $\varphi^2(\varkappa^1/\nu^1\omega^1)$ через $\tilde{\alpha}$. Если

$$\nu^1 + (f^1)'(0) > \nu^2, \quad \tilde{\alpha} > \nu^1, \quad \varkappa^2/\omega^2 > \nu^2, \qquad (29)$$

то существует $\beta > 0$, при котором $\varphi^1(\beta) = \varphi^2(\beta)$. Это число определяется единственным образом. В противном случае (если (29) не выполнено) либо одна из функций g^i_β не достигает своего максимума, либо максимум достигается, но $\varphi^1(\beta) \neq \varphi^2(\beta)$ при всех β.

Фактически доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Для того чтобы существовало число $\beta > 0$, при котором функции $g^1_\beta(\xi)$ и $g^2_\beta(\xi)$ достигают максимума на $(0, +\infty)$ и $\varphi^1(\beta) = \varphi^2(\beta)$, необходимо и достаточно, чтобы*

а) в случае, когда $\varkappa^1 = +\infty$, выполнялись неравенства (28);

б) в случае, когда $\varkappa^1 < +\infty$, выполнялись неравенства (29).

Если число β с нужными свойствами существует, то оно определяется единственным образом. При этом $\varphi^1(\beta) > \nu^1$, $\varphi^2(\beta) > \nu^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Число $\tilde{\alpha}$ имеет весьма простой смысл. Если $\tilde{\mathfrak{X}}$ - модель Неймана - Гейла, соответствующая стационарной однопродуктовой модели $\mathfrak{M}_1$, определяемой производственной функцией $\beta^1 F^2(K,L)$ $(\beta^1 = \varkappa^1/\nu^1\omega^1)$, коэффициентом выбытия фондов μ^2 и ставкой заработной платы $\beta^1\omega^2$, то $\tilde{\alpha}$ - неймановский темп роста этой модели.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 6 непосредственно вытекает, что каждое из условий

1) $\lim\limits_{K \to +\infty} F^i(K,1) = \lim\limits_{L \to +\infty} F^i(1,L) = +\infty, \quad i = 1,2,$

2) $\mu^1 = \mu^2$

влечет существование требуемого числа β. Таким образом, спра-

ведливость леммы I следует из леммы 6.

ЛИТЕРАТУРА

I. МОИСЕЕВ Н.Н. Математические модели экономической науки. - М.: Знание, 1973.

2. РУБИНОВ А.М. Дискретный вариант простейшей модели экономического прогнозирования. Односекторная модель. - Оптимизация, 1980, вып. 25(42), с.139-151.

Поступила в ред.-изд. отдел
25.02.1980 г.