Выпуск 27(44) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

МАГИСТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОДНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В.Н.Воробьева

В работе рассматриваются оптимальные в некоторых смыслах траектории следующей однопродуктовой макромодели экономической динамики. Фазовое пространство модели является конусом $R_+^2=[0,\infty)\times[0,\infty)$. В каждый момент времени t состояние системы описывается вектором $x^t\in R_+^2$. Производственное отображение имеет вид

$$a(x)=\langle 0,Ax\rangle+F(x)\cdot \xi, \qquad (1)$$

где A - диагональная матрица:

$$A=\begin{pmatrix}1-\mu_1 & 0\\ 0 & 1-\mu_2\end{pmatrix},\ 0\le\mu_i\le 1,\ i=1,2;$$

$$\xi=\{\theta\in R_+^2:\theta_1+\theta_2\le 1\};$$

символом $\langle 0,y\rangle$ обозначается конусный отрезок $\{u: 0\le u\le y\}$.

Предполагается, что производственная функция $F: R_+^2\to R_+^1$ обладает следующими свойствами:

$$F\in C^2(R_+^2);\ F(0,x_2)=F(x_1,0)=0,\ x_1,x_2\in[0,\infty);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2)\xrightarrow[x_2\to\infty]{}\infty;\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2)\xrightarrow[x_1\to\infty]{}\infty;$$

F монотонно возрастает, строго вогнута по каждой переменной,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}>0,\ x\in R_+^2. \qquad (2)$$

Вместо условия (2) и строгой вогнутости F по каждой переменной достаточно потребовать выполнения более слабого условия:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)>0,\ i,j=1,2,\ x\in R_+^2. \qquad (2')$$

Однако экономический смысл этого условия менее ясен. Заметим, что из (2$'$) следует вогнутость функции F.

Очевидно, что множество $a(x)$ выпукло для всех $x\in R_+^2$.

Приведем экономическую интерпретацию модели. В начале периода t экономическая система находится в состоянии $x^t=(x_1^t,x_2^t)$, x_i^t - количество ресурсов i-го вида. $F(x^t)$ - количество фондов, произведенных за период t ; эти фонды могут быть инвестированы в виде ресурсов как I-го, так и 2-го видов. Ресурс i-го вида частично переходит в следующий период с коэффициентом выбытия μ_i. Таким образом, к концу периода t ресурсы i-го вида сохраняются в количестве $\nu_i x_i^t$, где $\nu_i=1-\mu_i$, $i=1,2$.

Можно интерпретировать ресурс x_1 как производственные фонды, в том числе и фонды, предназначенные для оплаты рабочей силы, а ресурс x_2 - как фонды, вкладываемые в научно-технический прогресс. Предполагается, что вклад в научно-технический прогресс в периоде t дает эффект в том же периоде.

При фиксированном количестве производственных фондов x_1 производственная функция F является монотонно возрастающей и вогнутой по x_2.

При фиксированном $x_2=x_2^*$ мы имеем дело с обычной производственной функцией $\varphi_{x_2^*}(x_1)=F(x_1,x_2^*)$, т.е. функцией, выражающей зависимость выпуска продукции от различных видов производственных ресурсов. Следовательно, можно считать, что вклад в научно-технический прогресс приводит к выбору производственной функции из семейства $\{\varphi_{x_2^*}\}$, $x_2^*\in[0,\infty)$, в зависимости от значения x_2^*.

Таким образом построенная модель описывает экономическую систему с эндогенным научно-техническим прогрессом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Последовательность $\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ называется траекторией, если

$$x^{t+1}\in a(x^t),\ t=0,1,\ldots \qquad (3)$$

Введем вектор $c=(c_1,c_2)\in R^2$, $\max\limits_{i=1,2} c_i=1$. Компонента c_i интерпретируется как нормированная цена i-го вида ресурса. Отметим, что координаты вектора c не обязательно положительны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Траектория $\{\bar{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ называется локально-оптимальной, если

$$(c, A\bar{x}^t)+F(\bar{x}^t)=\max[(c,Ax)+F(x):x\in a(\bar{x}^{t-1})], t=1,2,\ldots \quad (4)$$

Локальная оптимальность траектории означает следующее: в начале каждого периода t выбирается такое состояние $\bar{x}^t$, что к концу этого периода суммарная стоимость всех ресурсов системы максимальна. Введенный принцип локальной оптимальности позволяет оценивать развитие экономической системы в пределах двух соседних периодов времени без учета того, как будет развиваться система в дальнейшем, а также без учета истории ее развития.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Траектория $\{\tilde{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ называется N-оптимальной, если

$$c_1\tilde{x}_1^N+c_2\tilde{x}_2^N=\max(c_1x_1^N+c_2x_2^N:\{x^t\}_{t=0}^{\infty}\in\mathcal{X}(\tilde{x}^0)), \quad (5)$$

где $\mathcal{X}(\tilde{x}^0)$ - множество траекторий с начальным значением $\tilde{x}^0$.

Поскольку при этом критерии оптимальности нас интересуют только первые N точек траектории, в дальнейшем, говоря об N-оптимальных траекториях, будем отождествлять траектории, у которых первые N членов совпадают.

При фиксированном начальном состоянии N-оптимальная траектория приводит к лучшему (при выбранных ценах c) состоянию на шаге N.

В нашей интерпретации ресурсов x_1 и x_2 в качестве вектора цен естественно взять $c=(1,0)$. Тогда оптимальность в обоих смыслах будет выражать то, что система нацелена на воспроизводство производственных фондов, а вклады в научно-технический прогресс являются лишь средством для достижения этой цели.

В статье А.М.Рубинова [I] рассматривается вариант сформулированной выше модели с фазовым пространством R_+^n для случая, когда $F: R_+^n \longrightarrow R_+^1$ - непрерывный суперлинейный функционал. В этом случае отображение (I) задает модель Неймана - Гейла. В [I] доказано, что эффективные траектории рассматриваемой модели выходят за конечное число шагов на неймановский луч. С точки зрения приведенной выше интерпретации, суперлинейность F неестественна, поэтому это предположение относительно F здесь не делается.

В статье М.И.Зеликина и С.А.Корнева [2] рассматривается близкая модель (с фазовым пространством R_+^n), в которой матрица A является единичной и, кроме того, $C=(1,\dots,1)$. При некоторых дополнительных условиях (в случае $n=2$ из них следует условие (2')) в [2] построен синтез Λ-оптимальной траектории, доказаны ее магистральные свойства и совпадение ее с локально-оптимальной траекторией. В статье Л.Ф.Зеликиной [3] рассмотрен непрерывный вариант модели [2], доказаны аналогичные результаты и в качестве примера (см. пример 6) рассмотрена непрерывная модель при наличии амортизации, дискретным аналогом которой в случае равных цен ресурсов является наша модель.

Таким образом, построенная здесь модель является обобщением указанных выше моделей в различных направлениях. Эти обобщения оказались существенными, так как привели к качественно другим результатам:

1) магистральные свойства траекторий модели справедливы лишь при некоторых дополнительных условиях относительно функции F;

2) несовпадение локально-оптимальной и N-оптимальной траекторий;

3) сход N-оптимальной траектории с магистрали за некоторое число шагов до конца процесса.

Введем следующие обозначения:

$$M^c=\left\{x\in R_+^2:\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x)+c_1\nu_1=\frac{\partial F}{\partial x_2}(x)+c_2\nu_2\right\},$$

$$M_i^c=\left\{x\in R_+^2:\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)+c_i\nu_i>\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)+c_j\nu_j\right\},\ i,j=1,2.$$

Положим $M=M^c$, $M_i=M_i^c$ при $c_1=c_2=1$.

ЛЕММА I. Множество M^c является графиком определенной на $[p,\infty]$, $p\geq 0$, строго возрастающей функции $x_2=\varphi(x_1)$, причем $\varphi(x_1)\underset{x_1\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $x_1^*\in R_+^1$ и рассмотрим уравнение относительно x_2:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2) + c_1\nu_1 = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2) + c_2\nu_2.$$

Если x_1^* достаточно велико, то для $x_2 = 0$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, 0) + c_1\nu_1 < \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, 0) + c_2\nu_2.$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, 0) = 0$ (это следует из того, что $F(x_1, 0) = 0$) и $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, 0) \xrightarrow[]{} \infty$ при $x_1 \to \infty$, то $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2) \to \infty$ при $x_2 \to \infty$, а $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2)$ убывает. Следовательно, для каждого достаточно большого x_1^* найдется ровно одно значение x_2, для которого имеет место (6). Поскольку

$$\varphi'(x_1) = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}} > 0,$$

функция φ возрастает. Предположим, что функция φ ограничена; тогда $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + c_1\nu_1$ ограничена, а

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1)) + c_2\nu_2 \underset{x_1 \to \infty}{\longrightarrow} \infty;$$

это противоречит тому, что функция φ определена при достаточно больших x_1.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\{\bar{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ - локально-оптимальная траектория. Рассмотрим вектор-функцию

$$x^t(\theta_1) = (\nu_1 \bar{x}_1^{t-1} + \theta_1 F(\bar{x}^{t-1}), \nu_2 \bar{x}_2^{t-1} + (1-\theta_1)F(\bar{x}^{t-1})),$$

где $\theta_1 \in [0,1]$. Тогда

а) если $x^t(0), x^t(1) \in \bar{M}_1^c$, то $\bar{\theta}^t = (1, 0)$;

б) если $x^t(0), x^t(1) \in \bar{M}_2^c$, то $\bar{\theta}^t = (0, 1)$,

в) если $x^t(0) \in M_1^c$, $x^t(1) \in M_2^c$, то $\bar{\theta}^t \in [0,1]$ такое, что $\bar{x}^t \in M^c$

(Здесь $\bar{M}_i^c$ означает замыкание множества M_i^c).

ЗАМЕЧАНИЕ. Случаи а)-в) исчерпывают все возможные положения точек $x^t(0)$ и $x^t(1)$, так как оставшийся случай

г) $x^t(0) \in M_2^c$, $x^t(0) \in M_1^c$

невозможен. Действительно,

$$x^t(0) = (\nu_1 \bar{x}_1^{t-1}, \nu_2 \bar{x}_2^{t-1} + F(\bar{x}^{t-1})),$$

$$x^t(1) = (\nu_1 \bar{x}_1^{t-1} + F(\bar{x}^{t-1}), \nu_2 \bar{x}_2^{t-1}),$$

значит, $x_1^t(0) < x_1^t(1)$, $x_2^t(0) > x_2^t(1)$.

Поскольку $x^t(0) \in M_2^c$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x^t(0)) + c_2\nu_2 > \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^t(0)) + c_1\nu_1.$$

Из вогнутости функции F по каждой переменной и (2) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x^t(1)) > \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^t(0)),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^t(1)) < \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^t(0)).$$

Отсюда $x^t(1) \in M_2^c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим случай а). Построим функцию

$$\ell(\theta_1) = A(A\bar{x}^{t-1} + (\theta_1, 1-\theta_1)F(\bar{x}^{t-1})) + F(A\bar{x}^{t-1} + (\theta_1, 1-\theta_1)F(\bar{x}^{t-1})).$$

Тогда

$$\ell'(\theta_1) = (\nu_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^t) - \nu_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^t)) \cdot F(\bar{x}^{t-1}),$$

где $x^t = (A\bar{x}^{t-1} + (\theta_1, 1-\theta_1)F(\bar{x}^{t-1}))$.

Если $x^t(0) \in \bar{M}_1^c$, $x^t(1) \in \bar{M}_1^c$, то из леммы I следует, что $x^t(\theta_1) \in \bar{M}_1^c$, $\theta_1 \in [0,1]$. Значит, $\ell'(\theta_1) > 0$ для всех $\theta_1 \in [0,1]$, отсюда $\max\limits_{\theta_1 \in [0,1]} \ell(\theta_1) = \ell(1)$, т.е. $\bar{\theta}_1 = 1$.

Случай б) рассматривается аналогично. В случае в) имеем $\ell'(0) > 0$, $\ell'(1) < 0$. Функция ℓ строго вогнута, так как

$$\ell''(\theta_1) = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^t) - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x^t) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x^t)\right] \cdot F(\bar{x}^{t-1}) < 0,$$

и поэтому ℓ имеет только одну точку максимума $\bar{\theta}^t \in [0,1]$: $\max\limits_{\theta_1 \in [0,1]} \ell(\theta_1) = \ell(\bar{\theta}_1^t)$ и $\bar{x}^t \in M^c$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция F называется продуктивной в точке x, если $F(x) > \max\limits_{i=1,2} (1-\nu_i)x_i$.

Заметим, что условие продуктивности слабее условия расширенного воспроизводства: $F(x) > \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие (P):

Функция F продуктивна в точке $\bar{x}^0$ и на множестве M', где $M' = M^c \cap \{x : x_1 > \bar{x}_1^0,\ x_2 < \bar{x}_2^0\}$ для $\bar{x}^0 \in \bar{M}_1^c$,

$$M' = M^c \cap \{x : x_1 < \bar{x}_1^\circ, x_2 > \bar{x}_2^\circ\} \text{ для } \bar{x}^\circ \in M_2^c.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\bar{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ – локально-оптимальная траектория. Функция F удовлетворяет условию (Р).

Тогда существует такое t^*, что $\bar{x}^t \in M^c$ для всех $t > t^*$.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы функция F продуктивна в точках $\bar{x}^t, t=0,1,\ldots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}$ – множество точек, в которых F продуктивна. Нетрудно проверить, что $\mathcal{D}$ выпукло.

Пусть $C = co(\bar{x}^\circ \cup M')$ – выпуклая оболочка $\bar{x}^\circ \cup M'$. Докажем, что $\bar{x}^t \in C$, $t = 0,1,\ldots$ Действительно, $\bar{x}^t \in C$ по определению C. Предположим, что $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^t \in C$. Докажем, что $\bar{x}^{t+1} \in C$. Пусть для определенности $\bar{x}^t \in M_1^c$. Если $\bar{x}^{t+1} \in C$, то $\bar{x}_1^{t+1} > \bar{x}_1^t$ ($\bar{x}^t \in \mathcal{D}$, так как $\bar{x}^t \in C$), отсюда следует, что $\bar{x}_1^{t+1} > \bar{x}_1^\circ$. Значит, $\bar{x}^{t+1} \in M'$ и, следовательно, $\bar{x}^{t+1} \in C$.

Если $\bar{x}^{t+1} \bar{\in} M^c$, то $\bar{x}^{t+1} \in M_1^c$ и $\bar{\theta}_1^{t+1} = 1$, причем $\bar{x}_1^{t+1} > \bar{x}_1^t, \bar{x}_2^{t+1} < \bar{x}_2^t$. Очевидно, что множество $\{x \in M_1^c : x_1 > \bar{x}_1^t, x_2 < \bar{x}_2^t\} \subset C$. Следовательно, $\bar{x}^{t+1} \in C$, а значит, $\bar{x}^{t+1} \in \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. I. Пусть $\bar{x}^{t-1} \in M^c$. Докажем, что тогда $\bar{x}^t \in M^c$. Рассмотрим вектор-функцию

$$x^t(\theta_1) = (c, A\bar{x}^{t-1}) + (\theta_1, 1-\theta_1)F(\bar{x}^{t-1}),$$

определенную при $\theta_1 \in [0,1]$. Покажем, что $x^t(0) \in M_1$. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$c_1 \nu_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(\nu_1 \bar{x}_1^{t-1}, \nu_2 \bar{x}_2^{t-1} + F(\bar{x}^{t-1})) -$$
$$- \frac{\partial F}{\partial x_2}(\nu_1 \bar{x}_1^{t-1}, \nu_2 \bar{x}_2^{t-1} + F(\bar{x}^{t-1})) - c_2 \nu_2 >$$
$$> c_1 \nu_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}^{t-1}) - \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}^{t-1}) - c_2 \nu_2 = 0.$$

Аналогично получим, что $x^t(1) \in M_2$. По теореме I $\bar{x}^t \in M$.

2. Пусть $\bar{x}^{t-1} \bar{\in} M^c$. Предположим для определенности, что $\bar{x}^{t-1} \in M_1^c$. Если $\bar{x}^t \in M^c$, то теорема для этого случая доказана, так как в силу первой части доказательства все последующие точки локально-оптимальной траектории будут принадлежать M^c. Если $\bar{x}^t \bar{\in} M^c$, то, очевидно, $\bar{x}^t \in M_1^c$ и $\bar{\theta}_1^t = 1$.

Последовательность $\{x_1^t(1)\}_{t=0}^{\infty}$ возрастает, так как

$$x_1^t(1)=\nu_1 x_1^{t-1}+F(x^{t-1})>\nu_1 x_1^{t-1}+(1-\nu_1)x_1^{t-1},\ t=1,2,\ldots$$

Очевидно, что $x_2^t(1)\to 0$ при $t\to\infty$. Из свойства $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to\infty$ следует, что существует такое t^*, что $x^{t^*}(0)\in M_1^c$ и $x^{t^*}(1)\in M_2^c$. Отсюда $x^{t^*}(\bar\theta^{t^*})\in M^c$.

Случай, когда $\bar x^t\in M_2^c$, рассматривается аналогично.

Изучение N-оптимальных траекторий основывается на принципе максимума для дискретных процессов [4], который в нашем случае дает необходимые условия N-оптимальности траектории.

Исследование N-оптимальных траекторий начнем со случая, когда $C_1=C_2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $C_1=C_2$, функция F удовлетворяет условию (P) и $\{\tilde x^t\}_{t=0}^{\infty}$ – N-оптимальная траектория, исходящая из точки $\bar x^0$. Тогда, если N достаточно велико, найдется такой момент t', что $\tilde x^t\in M$ для всех $t\in t':N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем говорить, что траектория удовлетворяет принципу максимума, если ему удовлетворяют первые N ее членов.

Покажем, что для траектории, удовлетворяющей принципу максимума, справедливо утверждение теоремы. Действительно, пусть $\{\hat x^t\}_{t=0}^{\infty}$ – траектория, удовлетворяющая принципу максимума, $\{\hat\theta^t\}_{t=0}^{\infty}$ – соответствующая последовательность управлений, $\hat x^0=\bar x^0$. Тогда

$$H^t(\hat\theta^t)=\max_{\theta^t\in\mathfrak{F}} H^t(\theta^t),\ t=0,1,\ldots,N, \tag{7}$$

где

$$H^t(\theta^t)=(z^t, A\hat x^{t-1}+F(\hat x^{t-1})\cdot\theta^t),$$

$$z_i^t=\frac{\partial H}{\partial x_i}(\hat x^t),\ z_i^N=c_i,\ i=1,2.$$

Для $t=N$ имеем

$$H^N(\theta^N)=(z^N, A\hat x^{N-1}+F(\hat x^{N-1})\theta^N),$$

где $z^N=c$. Тогда из (7) следует, что $\hat\theta^N$ – любое допустимое управление.

Далее будем обозначать $\frac{\partial}{\partial x_i^t}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat x^t)$. Для $t=N-1$ имеем

$$z_1^{N-1}=\frac{\partial H^N}{\partial x^{N-1}}=c_1\nu_1+c_1\frac{\partial F}{\partial x_1^{N-1}},$$

$$z_2^{N-1} = \frac{\partial H^N}{\partial x_2^{N-1}} = c_2 \nu_2 + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_2^{N-1}},$$

$$H^{N-1}(\theta^{N-1}) = (z^{N-1}, \nu_1 \hat{x}_1^{N-2} + F(\hat{x}^{N-2})\theta^{N-1}).$$

Возможны три случая положения точки $\hat{x}^{N-1}$:

I) $\hat{x}^{N-1} \in M_1$, тогда $z_1^{N-1} > z_2^{N-1}$, отсюда $\hat{\theta}^{N-1} = (1,0)$;

2) $\hat{x}^{N-1} \in M_2$, тогда $z_1^{N-1} < z_2^{N-1}$, отсюда $\hat{\theta}^{N-1} = (0,1)$;

3) $\hat{x}^{N-1} \in M$, тогда $z_1^{N-1} = z_2^{N-1}$, отсюда $\hat{\theta}^{N-1}$ – особое управление, однозначно определяемое из соотношений

$$\hat{x}^{N-1} = A\hat{x}^{N-2} + F(\hat{x}^{N-2}) \cdot \hat{\theta}^{N-1},$$
$$\hat{x}^{N-1} \in M.$$

Таким образом, управление в рассматриваемой траектории на шаге N произвольно, а на шаге $N-1$ определяется положением точки $\hat{x}^{N-1}$ относительно множеств M_1, M_2 и M.

В случае I) мы имеем $\hat{x}^{N-1} \in M_1$, т.е. $\nu_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1^{N-1}} > \nu_2 + \frac{\partial F}{\partial x_2^{N-1}}$. Из условия продуктивности функции F в точке $\hat{x}^{N-2}$ следует

$$\hat{x}_1^{N-1} = \nu_1 \hat{x}_1^{N-2} + F(\hat{x}^{N-2}) > \hat{x}_1^{N-2},$$
$$\hat{x}_2^{N-1} = \nu_2 \hat{x}_2^{N-2} < \hat{x}_2^{N-2}.$$

Из вогнутости F и (2) вытекает включение $\hat{x}^{N-2} \in M_1$. По определению,

$$H^{N-2}(\hat{\theta}^{N-2}) = (z_1^{N-2}, A\hat{x}^{N-3} + \hat{\theta}^{N-2} F(\hat{x}^{N-3})),$$

где

$$z_1^{N-2} = \frac{\partial H^{N-1}}{\partial x_1^{N-2}} = z_1^{N-1}\nu_1 + z_1^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x_1^{N-2}},$$

$$z_2^{N-2} = \frac{\partial H^{N-1}}{\partial x_2^{N-2}} = z_2^{N-1}\nu_2 + z_1^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x_2^{N-2}}.$$

Из того, что $\hat{x}^{N-2} \in M_1$ и $z_1^{N-1} > z_2^{N-1}$, вытекает неравенство $z_1^{N-2} > z_2^{N-2}$, а значит, $\hat{\theta}^{N-2} = (1,0)$. Продолжая рассуждения, получим

$$\hat{\theta}^{N-t} = (1,0);\ \hat{x}^{N-t} \in M_1;\ t = 1, \ldots, N.$$

Таким же образом, если $\hat{x}^{N-1} \in M_2$, то $\hat{\theta}^{N-t} = (0,1)$ и $\hat{x}^{N-t} \in M_2$, $t = 1, \ldots, N$, а в случае, когда $\hat{x}^{N-1} \in M$, управление $\hat{\theta}^{N-t}$ особое, однозначно определяемое соотношениями

$$\hat{x}^{N-t} = A\hat{x}^{N-t-1} + F(\hat{x}^{N-t-1}) \cdot \hat{\theta}^{N-t},$$
$$\hat{x}^{N-t} \in M,\quad t = 1, \ldots, k,$$

где $k \geq 1$, $k \leq N$ и для $t = k+1, \ldots, N$ (если такие существуют) имеем $\hat{x}^{N-t} \in M_1, \hat{\theta}^{N-t} = (1,0)$ или $\hat{x}^{N-t} \in M_2, \hat{\theta}^{N-t} = (0,1)$.

Заметим, что при построении траектории, удовлетворяющей принципу максимума, на каждом шаге мы выбирали управление однозначно.

Построенная траектория имеет следующий вид. Если $\hat{x}^0 \in M_1$, то при помощи управлений (I,0) за конечное число шагов траектория выходит на M и остается там до конца процесса. Если $\hat{x}^0 \in M_2$, то управление (0,I) за конечное число шагов выводит траекторию на M, где она остается до конца процесса. Если же $\hat{x}^0 \in M$, то и $\hat{x}^t \in M$, $t = 0,1,\dots,N$. Таким образом, для траектории $\{\hat{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ справедливо утверждение теоремы, причем $t' = N-k-1$. Получили, что траектория, удовлетворяющая принципу максимума, совпадает с локально-оптимальной траекторией для случая равных цен. Значит, траектория, удовлетворяющая принципу максимума, единственна. Существование N-оптимальной траектории в рассматриваемой задаче очевидно. Поскольку N-оптимальная траектория удовлетворяет принципу максимума, имеем

$$\tilde{x}^t = \hat{x}^t, \tilde{\theta}^t = \hat{\theta}^t, \quad t = 0,1,\dots,N,$$

где $\tilde{\theta}^t, t = 0,1,\dots,N$ - управление, соответствующее N-оптимальной траектории. Следовательно, утверждение теоремы справедливо и для $\{\tilde{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$.

Откажемся теперь от предположения $C_1 = C_2$, пусть для определенности $C_1 > C_2$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функция F удовлетворяет условию (P), $\{\tilde{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ - N-оптимальная траектория, исходящая из точки $\bar{x}^0$. Тогда, если N достаточно велико, найдутся такие моменты t' и $t''(t' \le t'' \le N)$, что*

1) $\tilde{x}^t \in M$ при $t \in t'+1 : t''$;

2) $\tilde{x}^t$ принадлежит некоторой локально-оптимальной траектории (с ценами C) при $t \in t''+1 : N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, мы покажем, что для траектории $\{\hat{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющей принципу максимума, справедливо утверждение теоремы. Совпадение траекторий $\{\hat{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$ следует из единственности траектории $\{\hat{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$.

Поскольку $c_1 > c_2$, из принципа максимума вытекает равенство $\hat{\theta}^N = (1,0)$.

Найдем z_1^{N-1} и z_2^{N-1}:

$$z_1^{N-1} = c_1 \nu_1 + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_1^{N-1}},$$

$$z_2^{N-1} = c_2 \nu_2 + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_2^{N-1}}.$$

Возможны три случая положения точки $\hat{x}^{N-1}$:

I) $\hat{x}^{N-1} \in M_1^c$, тогда $z_1^{N-1} > z_2^{N-1}$, отсюда $\hat{\theta}^{N-1} = (1,0)$;

2) $\hat{x}^{N-1} \in M_2^c$, тогда $z_1^{N-1} < z_2^{N-1}$, отсюда $\hat{\theta}^{N-1} = (0,1)$;

3) $\hat{x}^{N-1} \in M^c$, тогда $z_1^{N-1} = z_2^{N-1}$, в этом случае $\hat{\theta}^{N-1}$ – особое управление.

В случае I) имеем

$$c_1 \nu_1 + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_1^{N-1}} > c_2 \nu_2 + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_2^{N-1}}.$$

Тогда $\hat{x}^{N-2} \in M_1^c$ (см. теорему 2). Если, к тому же, $\hat{x}^{N-2} \in M_1$, то, как и в доказательстве теоремы 3, получим, что $\hat{\theta}^{N-2} = (1,0)$ и $\hat{x}^{N-t} \in M_1$, $\hat{\theta}^{N-t} = (1,0)$, $t = 3,\dots,N$, а значит, утверждение теоремы справедливо для $\{\hat{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$, причем $t' = t''$, $t'' = N-3$. Если $\hat{x}^{N-2} \in M$, то $\hat{\theta}^{N-2}$ – особое, $t'' = N-3$, $\hat{x}^t \in M$, $t = t'+1,\dots,t''$, где t' находится так же, как в теореме 3. Если $\hat{x}^{N-2} \in M_2$, то управление $\hat{\theta}^{N-2}$ зависит от знака величины

$$z_1^{N-2} - z_2^{N-2} = \frac{\partial H^{N-1}}{\partial x_1^{N-2}} - \frac{\partial H^{N-1}}{\partial x_2^{N-2}} = z_1^{N-1}\left(\nu_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1^{N-2}} - \frac{\partial F}{\partial x_2^{N-2}}\right) - z_2^{N-1}\nu_2,$$

а именно:

a) если $z_1^{N-2} - z_2^{N-2} > 0$, то $\hat{\theta}^{N-2} = (1,0)$;

б) если $z_1^{N-2} - z_2^{N-2} > 0$, то $\hat{\theta}^{N-2} = (0,1)$;

c) если $z_1^{N-2} - z_2^{N-2} = 0$, то $\hat{\theta}^{N-2}$ – особое управление.

В случае б) $\hat{x}^{N-3} \in M_2$; аналогично доказательству теоремы 3 получаем $\hat{x}^{N-t} \in M_2$, $\hat{\theta}^{N-t} = (0,1)$, $t = 3,\dots,N$; $t' = N-4$, $t' = t''$.

Случай c) распадается на следующие подслучаи:

c′) $\hat{x}^{N-3} \in M_1$, тогда $\hat{\theta}^{N-t} = (1,0)$, $\hat{x}^{N-t} \in M_1$, $t = 3,\dots,N$; $t'' = N-4$, $t' = t''$;

c″) $\hat{x}^{N-3} \in M_2$, тогда $\hat{\theta}^{N-t} = (0,1)$, $\hat{x}^{N-t} \in M_2$, $t = 3,\dots,N$; $t'' = N-4$, $t' = t''$;

c‴) $\hat{x}^{N-3} \in M$, тогда $\hat{\theta}^{N-t}$ – особое управление, $\hat{x}^{N-t} \in M$ для $t = 3,\dots,k \le N$ и для $t = k+1,\dots,N$ (если такие существуют), $\hat{x}^{N-t} \in M_1$, $\hat{\theta}^{M-t} = (1,0)$, либо $\hat{x}^{N-t} \in M_2$, $\theta^{N-t} = (0,1)$; $t'' = N-4$, $t' = N-k-1$.

В случае $a)$ поведение траектории в моменты $N-t, t=3,\dots,N$, зависит от знаков величин $z_1^{N-t} - z_2^{N-t}$. Нетрудно проверить, что найдется момент времени, когда состояние системы окажется в ситуации, аналогичной описанным в $b)$ и $c)$. Это следует из того, что траектория может находиться в $M_1^c \cap M_2$ лишь конечное число шагов. Последнее вытекает из свойств функции φ и условия (Р) для функции F.

Случаи 2) и 3) рассматриваются аналогично.

Таким образом, в случае $c_1 \neq c_2$ при достаточно большом N N-оптимальная траектория выходит на множество M и за некоторое число шагов до конца процесса сходит с M.

Пусть $t''(N)$ - момент схода траектории с множества M. Докажем, что $t''(N) \to \infty$ при $N \to \infty$. Предположим, что это неверно, т.е. найдется такое K, что

$$t''(N) \leq K \quad \text{для всех } N . \tag{8}$$

Следовательно, $N - t''(N) \to \infty$ при $N \to \infty$. Тогда для случая I) имеет место $\tilde{x}_2^{t''(N)+t} \xrightarrow{} 0$ при $t \to \infty$. Значит, найдется такое t_1, что $\tilde{x}^{t''(N)+t} \in M_2^c$ для всех $t > t_1$. Отсюда $\tilde{x}^{N-1} \in M_2^c$, но мы рассматриваем случай, когда $\tilde{x}^{N-1} \in M_1^c$, значит, (8) неверно. Случаи 2) и 3) рассматриваются аналогично.

Из теорем 2-4 следует, что в рассматриваемой модели локально-оптимальная и N-оптимальная траектории имеют магистрали M^c и M соответственно, которые совпадают в случае равных цен на различные виды ресурсов. В этом случае N-оптимальная траектория совпадает с локально-оптимальной. В случае различных цен N-оптимальная и локально-оптимальная траектории не совпадают.

Условие (Р) для функции F является существенным для выхода оптимальных траекторий на магистраль. Это демонстрирует следующий

ПРИМЕР. Пусть $F(x_1,x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1)$. Тогда $M = \{x \in R_+^2 : a\alpha \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha} + c_1\nu_1 = a(1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} + c_2\nu_2\}_2$.
Из однородности F следует, что M - полупрямая в R_+^2, $(0,0) \in \in M$. Положим $k = \frac{x_2}{x_1}$, если $x = (x_1,x_2) \in M$. Рассмотрим локально-оптимальную траекторию $\{\bar{x}^t\}_{t=0}^{\infty}$. Пусть $\bar{x}^0 \in M_1$, тогда $\frac{\bar{x}_2^0}{\bar{x}_1^0} > k$. Подберем параметры модели так, что условие (Р) не выполняется.

Пусть $\nu_2 > \nu_1$. Предположим, что $c_2\nu_2 - c_1\nu_1 - \alpha(\nu_2 - \nu_1) > 0$.

Это верно, если, например, $c_2 > c_1$ и α достаточно мало. Возьмем достаточно малое $k > 0$, для которого выполняется

$$k < \frac{(\nu_2 - \nu_1)(1-\alpha)}{c_2\nu_2 - c_1\nu_1 - \alpha(\nu_2 - \nu_1)}.$$

Положим

$$a = \frac{(c_2\nu_2 - c_1\nu_1)\,k^{\alpha}}{\alpha k + (1-\alpha)}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, $a < \frac{\nu_2 - \nu_1}{k^{1-\alpha}}$. При таких значениях a условие (P) не имеет места, и из соотношения $\frac{\bar{x}_2^t}{\bar{x}_1^t} > k$ следует $\frac{\bar{x}_2^{t+1}}{\bar{x}_1^{t+1}} > k$. Это означает, что $\bar{x}^t \in M_1, t = 1, 2, \ldots$, т.е. теорема о выходе локально-оптимальной траектории на множество M в этом случае несправедлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНОВ А.М. Об одной макроэкономической модели. - Оптимизация, 1978, вып. 21(38), с. 139-152.
2. ЗЕЛИКИН М.И., КОРНЕЕВ С.А. Синтез оптимальных траекторий для одной n-мерной многошаговой задачи оптимального управления. - Оптимальное управление. Математические вопросы управления производством, 1977, вып.7, с.46-52.
3. ЗЕЛИКИНА Л.Ф. Многомерный синтез и теоремы о магистрали в задачах оптимального управления. - В сб.: Вероятностные проблемы управления в экономике. М.: Наука, 1977, с.33-114.
4. ПРОПОЙ А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. - М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.03.1981 г.