Выпуск 27(44) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

НЕЭФФЕКТИВНОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В ГЛАДКИХ ЭКОНОМИКАХ С ФУНКЦИЯМИ ПОЛЕЗНОСТИ ОБЩЕГО ВИДА

В.М.Маракулин

В данной работе исследуются состояния равновесия экономик из выделенного достаточно общего класса, рассматривается проблема эффективности таких состояний. Полученный результат дает возможность более четко выяснить негативную сторону вальрасовского равновесия: для почти всех экономик состояния равновесия с точностью до некоторого достаточно узкого (в определенном ниже смысле) множества неэффективны.

В обычной модели Эрроу - Дебре, где состояние равновесия всегда эффективно, предпочтения потребителей определены только на собственно потребительском множестве данного участника; полезность, которую получает производитель, - это его доход. Рассматриваемый здесь класс моделей экономики не удовлетворяет этим предположениям в том смысле, что все участники экономики являются одновременно и производителями и потребителями, предпочтения которых (функции полезности) зависят от состояний экономики в целом (т.е. и от того, что потребляют и производят другие агенты).

В процессе получения основного результата, т.е. неэффективности равновесных состояний, естественным образом выясняется, что, как правило, в экономике конечное число состояний равновесия. Эта проблема уже изучалась в работах Дебре [1] и других авторов.

П.Дубей в [2] получил аналогичный результат относительно неэффективности состояний равновесия, рассматривая многообразие игр, где множество стратегий i-го игрока - это многогран-

ник S_i , а соответствующее многообразие игр суть пространство всех дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$u : S \to \mathbb{R}^n, \text{ где } S = \prod_{i=1}^{n} S_i .$$

В работе [3] этот результат распространяется на рыночные игры со специальным механизмом установления цены на рынке.

Доказательство получаемого в данной работе результата имеет много общего с подходом П.Дубея, оно существенно использует теоремы Р.Тома из дифференциальной топологии об открытости и плотности трансверсальных сечений. Отметим, что такая техника применялась для изучения состояний равновесия и другими авторами (см. [5,6]).

§ I. Определения и обозначения

Пусть

$N=\{1,2,\dots,n\}$ – множество участников экономики,

$L=\{1,2,\dots,\ell\}$ – номенклатура продуктов.

Каждый участник $i \in N$ характеризуется его потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^L$ и множеством производственных возможностей $Y_i \subset \mathbb{R}^L$. Состояния экономики описываются множеством

$$\mathcal{Z} = \prod_{i\in N} \mathcal{Z}_i \quad , \text{ где } \mathcal{Z}_i = X_i \times Y_i .$$

Назовем z *сбалансированным* состоянием, если $\sum_{i\in N} x^{(i)} = \sum_{i\in N} y^{(i)}$.

Предпочтения каждого участника экономики $i \in N$ характеризуются функцией полезности (предпочтения) $u_i : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$.

Экономикой называется отображение

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Сбалансированное состояние экономики $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) \in \mathcal{Z}$ называется состоянием равновесия (по Нэшу), если существует $\bar{p} \in \mathbb{R}^L, \bar{p} \neq 0$, такое, что

$$\max_{\{z^{(i)} | x^{(i)}\bar{p} \le y^{(i)}\bar{p}\}} u_i(\bar{z}|z^{(i)}) = u_i(\bar{z}) \quad \forall i \in N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Сбалансированное состояние $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ называется эффективным (паретовским), если не существует сбалансированного $\hat{z} \in \mathcal{Z}$ такого, что для всех $i \in N$ имеем $u_i(\hat{z}) \geq$ $\geq u_i(\bar{z})$; причем хотя бы одно неравенство строгое.

§ 2. Основные предположения

В дальнейшем всюду для любого $i \in N$ считаем X_i, Y_i фиксированными.

1. Для всех $i \in N$ множество Y_i – выпуклый многогранный конус и $\operatorname{int} Y_i \neq \emptyset$.

2. Конус $\sum_{i \in N} Y_i$ заостренный, т.е. если $y \in \sum_{i \in N} Y_i$ и $-y \in \sum_{i \in N} Y_i$, то $y = 0$.

3. Для всех $i \in N$ множество X_i – выпуклый ограниченный многогранник, $\operatorname{int} X_i \neq \emptyset$.

4. Функции полезности участников экономики определены и дважды непрерывно дифференцируемы на некоторой открытой окрестности $\widetilde{Z}$ множества Z. Таким образом, исследуемое в работе пространство экономик $\mathcal{U}$ совпадает с $C^2(\widetilde{Z}, \mathbb{R}^N)$. На $\mathcal{U}$ наводится стандартная топология равномерной сходимости на компактах: если $\{f_t\}_{t=1}^{\infty} \subset C^2(\widetilde{Z}, \mathbb{R}^N)$, то $f_t \to f_0 \in C^2(\widetilde{Z}, \mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда для всякого компакта $K \subset \widetilde{Z}$ имеем $f_t|_K \to f_0|_K$ при $t \to \infty$ в норме $\|\cdot\|_{C^2}$ пространства $C^2(K, \mathbb{R}^N)$. Норма $\|\cdot\|_{C^2(K,\mathbb{R}^N)}$ определяется по формуле

$$\|g\|_{C^2(K,\mathbb{R}^N)} = \max\{\|g_i\|_{C(K,\mathbb{R})}, i \in N,$$

$$\left\|\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right\|_{C(K,\mathbb{R})}, i \in N, j = \overline{1, 2nl},$$

$$\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial z_j \partial z_s}\right\|_{C(K,\mathbb{R})}, i \in N, j, s = \overline{1, 2nl}\},$$

$$\|g\|_{C(K,\mathbb{R})} = \max\{|g(z)| : z \in K\}.$$

§ 3. Формулировка основного результата. Схема доказательства

ТЕОРЕМА 1. Существует открытое всюду плотное множество $G \subset \mathcal{U}$ такое, что для всякого $u \in G$ справедливо утверждение: $\operatorname{int} Z$ покрывает конечное число состояний равновесия экономики u и все они неэффективны.

Пусть A_i и B_i, $i \in N$, - грани X_i, Y_i коразмерности k_i и l_i соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Состояние $z=(z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}) \in \prod_{i \in N} A_i \times B_i$ называется невырожденным, если существует $i_0 \in N$ такое, что $int(A_{i_0}+B_{i_0}) \neq \emptyset$. Обозначим через S совокупность всех невырожденных состояний. Важную роль в дальнейшем будет играть следующее подмножество $\mathcal{Z}$:

$$S'=\{z \in \mathcal{Z} \mid z \in \prod_{i \in N} A_i \times B_i, \sum_{i \in N}(l_i+k_i)+l+n \leq 2nl\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Существует массивное (второй категории, следовательно, всюду плотное) множество $G \subset \mathcal{U}$ такое, что для любого $u \in G$ справедливы утверждения:

(I) в экономике u конечное число невырожденных состояний равновесия;

(2) состояние равновесия из $S \cap S'$ неэффективны.

Суть доказательства состоит в применении теорем дифференциальной топологии об открытости и плотности трансверсальных сечений. Состоянию равновесия (а также понятию эффективности) можно дать дифференциальную характеристику, которая следует из необходимых условий экстремума функций полезности участников экономики. Таким образом, возникает некоторое отображение Ψ из $\mathcal{U} \times \mathcal{Z}$ в R^T такое, что $(\Psi^u)^{-1}(\Delta)$ покрывает некоторые состояния равновесия экономики u (соответсвенно $(\Psi^u)^{-1}(\bar{\Delta})$ - эффективные равновесные состояния). Здесь $\Delta(\bar{\Delta})$ - некоторое специальное подмножество R^T, $\Psi^u=\Psi(u): \mathcal{Z} \to R^T$. Все происходит точно так же, как в случае, если $f: R \to R$ - дифференцируемая функция; тогда $(\frac{d}{dt}f)^{-1}(0)$ покрывает множество всех экстремумов f.

Теоремы, о которых шла речь выше, позволяют формализовать (применительно к рассматриваемому примеру) интуитивное представление о том, что для почти всех дифференцируемых функций $(\frac{d}{dt}f)^{-1}(0)$ состоит из конечного числа точек. (Строго говоря, этот факт справедлив только для класса C^2.) Для изучаемой ситуации эти теоремы позволяют сделать вывод, что существует

массивное (и, следовательно, плотное) подмножество функций в пространстве $C^2(\tilde{Z}, R^N)$ такое, что построенные по ним отображения Ψ^u трансверсальны многообразиям Δ и $\bar{\Delta}$ (точные формулировки см. в § 4). Но такие трансверсальные отображения сохраняют коразмерность при переходе к прообразу. Подсчитав размерность многообразий Δ и $\bar{\Delta}$, обнаруживаем, что $\dim((\Psi^u)^{-1}(\Delta)=0, \dim((\Psi^u)^{-1}(\bar{\Delta}))<0$. Следовательно, по определению нульмерного многообразия, $(\Psi^u)^{-1}(\Delta)$ дискретно, а $(\Psi^u)^{-1}(\bar{\Delta})=\emptyset$. Наконец из того, что $(\Psi^u)^{-1}(\Delta)$ компактно, следует конечность равновесных состояний.

§ 4. Доказательсво основного результата

Предварительно введем некоторые обозначения.

$L_y^x = L \times \{0,1\}$. Тем самым мы различаем продукты потребляемые и производимые, т.е. $X_i \times Y_i \subset R^{L_y^x}$.

$M=L_y^x \times N$. Такая совокупность индексов нумерует координаты, соответствующие участнику, его потреблению или производству, т.е. $\hat{Z} \subset R^M$, $|M|=2nl$.

$\hat{T}=M \times N$. Такое множество возникает из необходимости использовать градиенты функций полезности участников экономики $|\hat{T}|=2n^2l$.

I) Для доказательсва теоремы I построим отображение, которое потребуется для изучения равновесных и "паретовских" состояний экономик из $\mathcal{U}$. Пусть $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, положим $\hat{Z}=\tilde{Z}\times R^L$ и для всякого $i\in N$ определим $\Psi_i^u : \hat{Z} \to R^{M\times\{i\}}$, где

$$\left(\Psi_i^u(\hat{z})\right)_k = \frac{\partial u_i}{\partial z_k}(z),\ k=(\alpha,\beta,\gamma);\alpha\in L, \beta\in\{0,1\}, \gamma\in N.$$

Содержательно $\Psi_i^u(z)$ - градиент i-го участника в состоянии z. Введем балансовое отображение $\Psi_B : \hat{Z} \to R^{L\times\{0\}}$, где

$$\left(\Psi_B(\hat{z})\right)_j = \sum_{i\in N} x_j^{(i)} - \sum_{i\in N} y_j^{(i)},\quad j\in L,$$

и бюджетное отображение $\Psi_0 : \hat{Z} \to R^{N\setminus\{n\}}$, где

$$\left(\Psi_0(z,p)\right)_i = \left(p, x^{(i)}-y^{(i)}\right),\ i\in N\setminus\{n\}.$$

Заметим, что если $\bar{z}$ - состояние равновесия, из $\sum_{i\in N}\bar{x}^{(i)} - \sum_{i\in N}\bar{y}^{(i)}=0$ и того, что $\bar{x}^{(i)}\bar{p}=\bar{y}^{(i)}\bar{p}$, $i\in N\setminus\{j\}$, следует $\bar{x}^{(j)}\bar{p}=\bar{y}^{(j)}\bar{p}$, т.е. система переопределенная. Поэтому

бюджетное ограничение для одного из участников (например, n -го) нужно исключить.

Положим $\Psi_p : \hat{Z} \to R^{L\times\{1\}}$, где $\Psi_p(z,p)=p$. Наконец, полагая $T=\hat{T}\cup L_y^x \cup \{N\setminus\{n\}\}$, введем отображение $\Psi^u : \hat{Z} \to R^T$, заданное по формуле $\Psi^u = \prod_{i\in N} \Psi_i^u \times \Psi_B \times \Psi_p \times \Psi_0$. Отображение $\Psi : U\times\hat{Z} \to R^T$ определяется как $\Psi(u,\hat{z})=\Psi^u(\hat{z})$.

2) Следующий шаг - определение подмногообразий пространства R^T:

$$\Delta_1 \stackrel{df}{=} \{(p_1,p_2,\dots,p_n,p',p'',p''')\in R^T \mid p_i\in R^{M\times\{i\}}, i\in N, p'\in R^{L\times\{0\}},$$

$$p''\in R^{L\times\{1\}}, p'''\in R^{N\setminus\{n\}}; p_i^x=-p_i^y=\lambda_i p'', i\in N; p'=0; \sum_{j\in L}(p_j'')^2=1; p'''=0\}.$$

Если $p_i=(p_i^{(1,0)}, p_i^{(1,1)},\dots,p_i^{(i,0)}, p_i^{(i,1)},\dots,p_{i(i,0)}^{(n,0)}, p_{i(i,1)}^{(n,1)})$, то под p_i^x и p_i^y понимаются векторы $p_i^{(i,0)}$ и $p_i^{(i,1)}$ соответственно. Данное многообразие покрывает образ всех равновесных состояний z экономики u при отображении Ψ^u таких, что $z\in int Z$. Действительно, если $\bar{z}$ - состояние равновесия, то

$$u_i(\bar{z}) = \max_{\{z_i \mid x^{(i)}\bar{p}=y^{(i)}\bar{p}\}} u_i(\bar{z}/z_i) \quad \forall i\in N.$$

Вычисляя функцию Лагранжа, находим необходимые условия экстремума при ограничениях $x_i\bar{p}=y_i\bar{p}$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^{(i)}}(\bar{z}) = \lambda_i \bar{p}_j, \ j\in L,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_j^{(i)}}(\bar{z}) = -\lambda_i \bar{p}_j, \ j\in L.$$

Откуда, учитывая определения состояния равновесия, получаем $\Psi^u(\bar{z})\in\Delta_1$.

Определим многообразие Δ_2. Обозначим через $\hat{e}_j=(e_j,-e_j,\dots,e_j,-e_j)$ n-реплику пар $(e_j,-e_j)$, где e_j - единичный орт пространства R^L. Тогда $\Delta_2 \stackrel{df}{=} \{(p_1,\dots,p_n,p',p'',p''')\in R^T \mid p_i\in R^{M\times\{i\}}, i\in N, p'\in R^{L\times\{0\}}, p''\in R^{L\times\{1\}}, p'''\in R^{N\setminus\{n\}};$ совокупность векторов $\{p_i\}_{i\in N} \cup \{\hat{e}_j\}_{j\in L}$ линейно-зависима$\}$.

Это множество покрывает образ всех "паретовских" состояний таких, что $z\in int Z$. Действительно, пусть z_0 "паретовское". Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (grad\ u_i(z_0), x)=1, & i\in N, \\ (\hat{e}, x)=0, & j\in L. \end{cases}$$

Если $\{\operatorname{grad} u_i(z_0)\}_{i\in N} \cup \{\hat e_j\}_{j\in L}$ – линейно-независимая система векторов, то данная система уравнений имеет решение x_0. Выбирая достаточно малое $\varepsilon > 0$, получаем сбалансированное состояние $z_1 = z_0 + \varepsilon x_0$ экономики $\mathcal{U}$ такое, что $u_i(z_1) > u_i(z_0)$ для любого $i \in N$. Это противоречит "паретовости" z_0.

Строго говоря, Δ_2 не является подмногообразием пространства R^T, тем не менее справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.I. $\Delta_2 = \bigcup_{t=1}^{3} \Delta_2^{(t)}$, где $\Delta_2^{(t)}$ – подмногообразия R^T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразия $\Delta_2^{(t)}$ можно задать через локальные координаты следующим образом. Пусть $R \subset N$, $|R| = r$, $|N| = n$, $|L| = \ell$. Будем считать, что $R = \{1, 2, \dots, r\}$, $N \setminus R = \{r+1, \dots, n\}$; этого всегда можно добиться соответствующей нумерацией элементов множества N. Пусть $\Omega = R \times \{(N\setminus R) \cup L\} \cup M \times \{N \setminus R\}$. Определим $\varphi^R : R^{\Omega} \to R^T$, полагая $\varphi^R = \prod_{k\in N} \varphi_k$, где $\varphi_k : R^{\Omega} \to R^{M\times\{k\}}$, $k \in N$, и

$$\varphi_k(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}, p^{(r+1)}, \dots, p^{(n)}) = \begin{cases} \sum_{i\in N\setminus R} \lambda_i^{(k)} p_i + \sum_{j\in L} \lambda_j^{(k)} e_j, & k \in R, \\ p^{(k)}, & k \in N \setminus R. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{L} = \{(p^{(r+1)}, \dots, p^{(n)}) \in R^{M\times\{N\setminus R\}} \mid \{p^{(k)}\}_{k\in N\setminus R} \cup \{\hat e_j\}_{j\in L}$ – линейно-независимая в R^M система векторов$\}$. Понятно, что $\mathcal{L}$ – открытое множество в $R^{M\times\{N\setminus R\}}$. Обозначая через I тождественное отображение R^L, получаем $\bar\varphi^R = \varphi^R \times I : R^{R\times\{(N\setminus R)\cup L\}} \times \mathcal{L} \times R^L \to R^T$ – локальную параметризацию многообразия Δ_2. Поскольку $\Delta_2 = \bigcup_{R\subset N, R\neq\emptyset, N} \Delta^{(R)}$, доказательство завершено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \bigcup_{t=1}^{3} \Delta^{(t)}$, где $\Delta^{(t)}$ – подмногообразия R^T.

Принцип доказательсва аналогичен проведенному в утверждении 4.I.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Существует такое $a \in R^L_+$, что если $y^{(i)} \in Y_i$, $x_i \in X_i$, $i \in N$; $\sum_{i\in N} x^{(i)} = \sum_{i\in N} y^{(i)}$, то для любого $i \in N$ имеем $-a \le y^{(i)} \le a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположения 2, $\sum_{i\in N} Y_i$ – заостренный конус. Из теорем отделимости следует, что существует $\bar p \neq 0$ такой, что $\bar p z > 0$ для любого $z \in \sum_{i\in N} Y_i$, $z \neq 0$. Предположим противное. Тогда не существует $a \geq 0$ такого, что $-a \le y^{(i)} \le a$ для любого $i \in N$.

Далее, не ограничивая общности, можно считать, что существует последовательность $\{y_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n^{(i)} \in Y_i$, $i \in N$, такая, что $z_n = \sum_{i \in N} y_n^{(i)} \in \sum_{i \in N} X_i$ и $\|y_n^{(i)}\| \geq n$ для любого $n \geq 0$. Положим $\varepsilon = \min\{(y^{(1)}, \bar{p}) \mid y^{(1)} \in Y_1, \|y^{(1)}\| = 1\}$. Так как минимум реализуется, то по выбору $\bar{p}$ имеем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\sum_{i \in N} X_i$ - ограниченное множество, то $\{\bar{p} z_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность, но $\bar{p} z_n \geq \bar{p} y_n^{(1)} \geq n\varepsilon$. Противоречие. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (трансверсальность). Пусть X, Y - C^1-многообразия, $f: X \to Y$ - C^1-отображение и $W \subset Y$ - подмногообразие. Отображение f трансверсально W в точке $x \in X$ (обозначение $f \pitchfork_x W$), если $f(x) = y \notin W$ или если $y \in W$ и выполняются условия:

(I) $T_x f(T_x X)$ содержит замкнутое алгебраическое дополнение к $T_y W$ в $T_y Y$, т.е. существует замкнутое подпространство $W' \subset T_x f(T_x X)$ такое, что $W' \oplus T_y W = T_y Y$.

(2) $(T_x f)^{-1}(T_y W) = V$ таково, что существует замкнутое алгебраическое дополнение до пространства $T_x X$, т.е. существует замкнутое подпространство $V' \subset T_x X$ такое, что $V' \cap V = \{0\}$ и $V' \oplus V = T_x X$.

Отображение f трансверсально W (обозначение $f \pitchfork W$), если $f \pitchfork_x W$ для любого $x \in X$.

ЛЕММА I. Если ψ^u трансверсально Δ_1 и $\{\Delta^{(t)}\}_{t=1}^{t=r}$, то число состояний равновесия экономики u, принадлежащих $\operatorname{int} \mathcal{Z}$, конечно, и все они неэффективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\operatorname{codim} \Delta_1 = n(2l-1)+l+n-1+1 = 2nl+l$, кроме того, $\operatorname{codim} \Delta^{(t)} > \operatorname{codim} \Delta_1 = 2nl+l$, $t=\overline{1,r}$. В силу трансверсальности ψ^u имеем

$$\operatorname{codim} (\psi^u)^{-1}(\Delta_1) = \operatorname{codim}(\Delta_1) = 2nl+l,$$

$$\operatorname{codim} (\psi^u)^{-1}(\Delta^{(t)}) = \operatorname{codim}(\Delta^{(t)}) > 2nl+l, t=\overline{1,r}.$$

Таким образом, множество всех состояний равновесия дискретно, поскольку покрывается многообразием размерности 0. Кроме того, все они неэффективны, так как $(\psi^u)^{-1}(\bigcup_{t=1}^{r} \Delta^{(t)}) = \emptyset$. Но ψ^u - непрерывное отображение, следовательно, $(\psi^u)^{-1}(\Delta_1)$ относительно замкнуто в $\tilde{\mathcal{Z}} \times \mathbb{R}^L$. Можно также считать, что $\tilde{\mathcal{Z}}$ такова,

что $(\psi^u)^{-1}(\Delta_1)$ ограничено. (Для сбалансированных состояний в $\mathcal{Z}$ ограниченность вытекает из 4.3) Но тогда $(\psi^u)^{-1}(\Delta_1)\cap$ $\cap\, \mathcal{Z}\times\mathbb{R}^L$ – дискретный компакт, покрывающий все равновесные состояния из $int\,\mathcal{Z}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2 (о трансверсальности). Отображение $\psi: \mathcal{U}\times\hat{\mathcal{Z}}\to\mathbb{R}^T$ трансверсально любому подмногообразию $\mathbb{R}^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u_0,z_0)\in\mathcal{U}\times\hat{\mathcal{Z}}$. Докажем, что

$$T_{(u_0,z_0)}\psi(T_{(u_0,z_0)}\mathcal{U}\times\hat{\mathcal{Z}})=\mathbb{R}^T. \qquad (1)$$

Пусть $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n,\vartheta',\vartheta'',\vartheta''')\in\mathbb{R}^T$. Достаточно найти траекторию $(u_t,z_t)_{t\in[0,1]}$ такую, что

$$u_t|_{t=0}=u_0,\quad z_t|_{t=0}=z_0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(u_t,z_t)|_{t=0}=\vartheta.$$

Положим $z(t)=z_0+\bar{z}\cdot t$, тогда $\bar{z}$ находится из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases}(x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t),\,p(t))'|_{t=0}=\vartheta_i''',\ i=\overline{1,n-1},\\ \left(\sum_{i\in N}x^{(i)}(t)-\sum_{i\in N}y^{(i)}(t)\right)'|_{t=0}=\vartheta',\\ p'(t)|_{t=0}=\vartheta''.\end{cases}$$

Преобразуя систему, имеем

$$\begin{cases}(\bar{x}^{(i)}-\bar{y}^{(i)},p_0)=\vartheta_i'''-(x_0^{(i)}-y_0^{(i)},\bar{p}),\ i=\overline{1,n-1},\\ \sum_{i\in N}\bar{x}^{(i)}-\sum_{i\in N}\bar{y}^{(i)}=\vartheta',\\ \bar{p}=\vartheta''.\end{cases} \qquad (2)$$

Данная система всегда имеет решение относительно $\bar{z}$. Заметим, что если добавить уравнение $(\bar{x}^{(n)}-\bar{y}^{(n)},p_0)=\vartheta_n'''-$ $-(x_0^{(n)}-y_0^{(n)},p_0)$, то получится, вообще говоря, несовместная система, что не может гарантировать трансверсальности отображения ψ. В качестве $\bar{z}$ примем любое решение системы.

Положим $u_t(z)=u_0(z)+H\cdot z\cdot t$, где H – фиксированная матрица. Вычислим ее коэффициенты:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial z_j}(z_t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial z_j}(z_t)\right)+h_{ij}=\sum_{k\in M}\frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial z_k\cdot\partial z_j}(z_t)\cdot\bar{z}_k+h_{ij}.$$

Откуда, полагая $t=0$, имеем

$$h_{ij}=v_{ij}-\sum \frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial z_k \partial z_j}(z_0)\cdot \bar{z}_k .$$

Таким образом, (I) доказано.

Обозначим $T_{(u_0,z_0)}\Psi=f$, $\Psi(u_0,z_0)=y$, $T_{(u_0,z_0)}U\times\hat{Z}=W$, $T_yM=V$, где M – некоторое подмногообразие R^T. Используя сюръективность и линейность отображения f, алгебраическое дополнение $f^{-1}(V)$ до W будем строить следующим образом. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_t$ – базис V и $\beta_1,\dots,\beta_s$ – дополнение до базиса R^T, тогда $f^{-1}(\beta_1),\dots,f^{-1}(\beta_s)$ все непусты. Выберем $w_i\in f^{-1}(\beta_i)$, $w_i\neq 0$, $i=1,\dots,s$. Положим $W'=\mathcal{L}\{w_1,\dots,w_s\}$, где $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку. Если $w\in W$, тогда $f(w)=\sum_{j=1}^{t}a_j\alpha_j+\sum_{i=1}^{s}b_i\beta_i$. Положим $w'=\sum_{i=1}^{s}b_iw_i$, $w''=w-w'$. Так как f линейно, то $f(w'')\in V$, т.е. $w''\in f^{-1}(V)$, и тем самым $W'\oplus f^{-1}(V)=W$, так как по построению $W'\cap f^{-1}(V)=\{0\}$. Замкнутость W' следует из конечной размерности. Лемма доказана.

В дальнейшем потребуются некоторые теоремы из дифференциальной топологии (см. [4]), которые играют решающую роль для получения конечного результата.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A}, X, Y$ – C^r-многообразия и $\rho:\mathcal{A}\to C^r(X,Y)$. Положим $\rho_a=\rho(a)$. Отображение ρ есть C^r-представление, если $ev_\rho:\mathcal{A}\times X\to Y$, заданное как $ev_\rho(a,x)=\rho_a(x)$ для $a\in\mathcal{A}$, $x\in X$, есть C^r-отображение из $\mathcal{A}\times X$ в Y.

ТЕОРЕМА (о плотности). Пусть $\mathcal{A}, X, Y$ – C^r-многообразия, $\rho:\mathcal{A}\to C^r(X,Y)$ – C^r-представление, $W\subset Y$ – подмногообразие и при этом

(1) X конечной размерности и W конечной коразмерности q;

(2) $\mathcal{A}$ и X второй категории;

(3) $r>\max(0,p-q)$;

(4) $ev_\rho \pitchfork W$.

Тогда $\mathcal{A}_W=\{a\in\mathcal{A}\,|\,\rho_a\pitchfork W\}$ массивно в $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА (об открытости). Пусть $\mathcal{A}, X, Y$ – C^r-многообразия, $\rho:\mathcal{A}\to C^1(X,Y)$ – C^1-псевдопредставление, $W\subset Y$ – подмногообразие, $K\subset X$ – компакт и при

этом

(1) X конечной размерности;

(2) W замкнуто.

Тогда $\mathcal{A}_{KW}=\{a\in\mathcal{A}\,|\,\rho_a \pitchfork_x W, x\in K\}$ открыто в $\mathcal{A}$.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы I из § 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Если $\mathfrak{z}$ - равновесное состояние, то $\sum_{i\in N} x^{(i)} = \sum_{i\in N} y^{(i)}$. Применяя утверждение 4.3, получаем, что существует $a\in R^L_+$, $-a\leq y^{(i)}\leq a$, для любого $i\in N$. Положим $\bar{Y}_i=\{y^{(i)}\in Y_i\,|-a\leq y^{(i)}\leq a\}$, $\bar{Z}_i=X_i\times \bar{Y}_i$. Выберем для любого $i\in N$ компакт $K_i\subset R^{l_i}$ такой, что $int\,K_i\supset \bar{Z}_i$ и $\prod_{i\in N} K_i\subset \tilde{Z}$. Положим $K=\prod_{i\in N} K_i\times P$, где P - сфера единичного радиуса из R^L. Используем теоремы об открытости и плотности трансверсальных сечений применительно к случаю: $\mathcal{A}=\mathcal{U}$, $X=\tilde{Z}$, $Y=R^T$, $ev_\rho=\Psi$, $\rho_a=\Psi^u$, $W^{(t)}=\Delta^{(t)}$, $t=1,\ r$ $(\bigcup_{t=1}^{r}\Delta^{(t)}=\Delta_1\cap\Delta_2)$, $W^{(r+1)}=\Delta_1$. Поскольку из леммы 2 следует, что $ev_\rho \pitchfork w^{(t)}$, $t=1,\dots,r+1$, а прочие условия теорем соблюдены по построению (отметим, что теорема об открытости также верна, если ρ - представление), имеем: для $t=1,\dots,r+1$ множества $\mathcal{A}^{(t)}_{KW}=\{a\in\mathcal{A}\,|\,\rho_a\pitchfork_x W^{(t)}, x\in K\}$ открыты в $\mathcal{A}$. Из того, что множества $\mathcal{A}^{(t)}_{W}=\{a\in\mathcal{A}\,|\,\rho_a\pitchfork W^{(t)}\}$ всюду плотны в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{(t)}_{W}\subset\mathcal{A}^{(t)}_{KW_{r+1}}$, следует плотность $\mathcal{A}^{(t)}_{KW}$ в $\mathcal{A}$ для $t=1,\dots,r+1$. Отсюда $G=\bigcap_{t=1}\mathcal{A}^{(t)}_{KW}$ также открыто и всюду плотно в $\mathcal{A}$. Таким образом, если $u\in G$, то $\Psi^u\pitchfork_{\mathfrak{z}}\Delta^{(t)}$, $t=1,\dots,r+1$, где $\mathfrak{z}\in K$.

С другой стороны, понятно, что можно выбрать такую открытую окрестность $\mathfrak{z}\times R^L$, что любое состояние $\mathfrak{z}$ из этой окрестности либо содержится в K, либо $\Psi^u(\mathfrak{z})\notin\Delta^{(t)}$, $t=1,\dots,r+1$, для $u\in G$. Применяя лемму I, заканчиваем доказательство.

Прежде чем перейдем к доказательству теоремы 2 из § 3, нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $A\neq\prod_{i\in N} A_i\times B_i$ - невырожденная грань $\mathfrak{Z}$, здесь A_i, B_i - грани X_i, Y_i соответственно. Наша цель - исследовать эффективные равновесия из A. Изменения в определении отображения Ψ^u будут касаться той части, которая отвечает балансу и бюджетным ограничениям: $\Psi_B\times\Psi_0:\tilde{\mathfrak{Z}}\longrightarrow R^{L\times\{0\}\cup\{N\setminus\{n\}\}}$

Это отображение представляется в виде

$$\psi_B \times \psi_0(\hat{z}) = A_p(z), \quad \hat{z} = (z, p),$$

где

$$A_p = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc}
E & -E & E & -E & \dots & E & -E & E & -E \\
\hline
P & -P & & & & & & & \\
& & P & -P & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & P & -P & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Здесь E – единичная матрица размерности $\ell \times \ell$, $p \in R^L$ – вектор цен. Пусть грань A_i (B_i) задается системой уравнений $a_k^{(i)} x^{(i)} = \check{x}_k$, $k = 1, \dots, k(i)$ (соответственно $b_\ell^i y^{(i)} = 0$, $\ell = 1, \dots, \ell(i)$). Предполагая, что все ограничения существенны, имеем для любого $i \in N$ линейно-независимые по строкам матрицы

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_{k(i)}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad B^{(i)} = \begin{bmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ \vdots \\ b_{\ell(i)}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Положим $\psi_i : R^{L_y^x} \to R^{K_i \cup L_i}$, $i \in N$, $K_i = \{1, \dots, k(i)\}$, $L_i = \{1, \dots, \ell(i)\}$, где $\psi_i(z_i) = (A^{(i)} x^{(i)}, B^{(i)} y^{(i)})$. Условимся обозначать через $\mathcal{L}_i^A$ $(\mathcal{L}_i^B)$ линейную оболочку совокупности $\{a_k^{(i)}\}_{k \in K_i}$ $(\{b_\ell^{(i)}\}_{\ell \in L_i})$.

Рассмотрим отображение $\varphi = \psi_B \times \prod_{i \in N} \psi_i : R^M \to R^{L \cup \Omega}$, где $\Omega = \bigcup_{i \in N} \{K_i \cup L_i\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. φ – н е в ы р о ж д е н н о е о т о б р а ж е н и е .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный линейный оператор представляется в виде $\varphi(z) = C \cdot z$, где матрица C имеет вид:

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc}
E & -E & E & -E & \dots & E & -E \\
\hline
A^{(1)} & & & & & & \\
& B^{(1)} & & & & & \\
& & A^{(2)} & & & & \\
& & & B^{(2)} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
& & & & & A^{(n)} & \\
& & & & & & B^{(n)}
\end{array}\right]$$

Достаточно показать линейную независимость строк данной матрицы. В силу того что A - невырожденная грань, существует $i_0 \in N$ такое, что $\operatorname{int}(A_{i_0} + B_{i_0}) \neq \emptyset$. Нетрудно видеть, что это условие эквивалентно тому, что $\mathcal{B} = \mathcal{L}^A_{i_0} \cap \mathcal{L}^B_{i_0} = \{0\}$.

Пусть $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^L$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^{L_i \cup K_i}$, $\lambda_i = (\lambda_i^x, \lambda_i^y)$, $i \in N$, где $\lambda_i^x \in \mathbb{R}^{K_i}$, $\lambda_i^y \in \mathbb{R}^{L_i}$. Если $\lambda C = 0$, то по построению C имеем: $\lambda_0 E = -\lambda_i^x A^{(i)} = \lambda_i^y B^{(i)}$, $i \in N$. Поскольку $\lambda_{i_0}^x A^{(i_0)} = \lambda_{i_0}^y B^{(i_0)} \in \mathcal{B} = \{0\}$, тогда $\lambda_0 = 0$, и так как $A^{(i)}, B^{(i)}$ невырождены, то $\lambda_i^x, \lambda_i^y = 0$ для любого $i \in N$. Тем самым, $\lambda = 0$ Утверждение доказано.

В дальнейшем нас будет интересовать отображение φ_p , определяемое матрицей C_p (рис. I):

$$\varphi_p = \varphi \times \psi_0 : \mathbb{R}^{M \cup L} \longrightarrow R^{L \cup \Omega \cup \{N \setminus \{i_0\}\}},$$

где $(\psi_0)_j(z) = px^{(j)} - py^{(j)}$, $j \in N \setminus \{i_0\}$; $\varphi_p z = C_p z$.

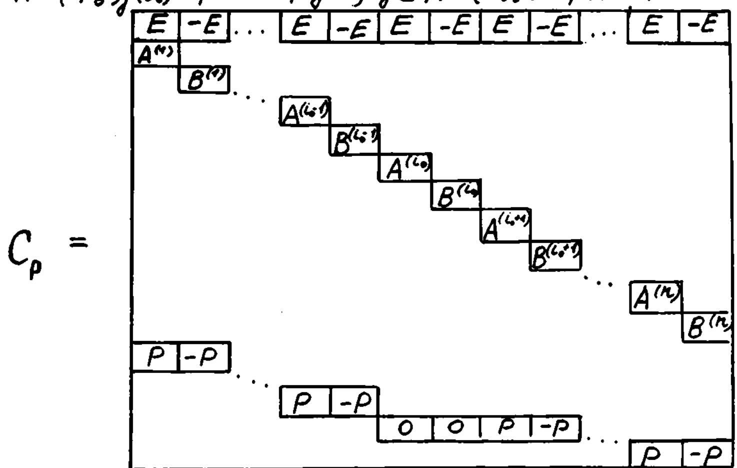

Рис. I.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. Строки матрицы C_p линейно-зависимы тогда и только тогда, когда существует $j \in N \setminus \{i_0\}$ такой, что $p \in \mathcal{L}^A_j \cap \mathcal{L}^B_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу невырожденности грани A так же, как в утверждении 4.4, видим, что линейная независимость строк сводится к тому, что строки матрицы

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A^{(j)} & \\ \hline & B^{(j)} \\ \hline p & -p \\ \hline \end{array}$$

линейно-независимы для всех $j \in N \setminus \{i\}$, откуда и следует данное утверждение.

Пусть $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i^A \cap \mathcal{L}_i^B$. Для $R \subset N$ положим $P_R = (\bigcap_{i \in R} \mathcal{L}_i) \setminus \setminus (\bigcup_{j \in N \setminus R} \mathcal{L}_j) \subset \mathbb{R}^L$. Если $R = \varnothing$, тогда $P_R = \mathbb{R}^L \setminus \{\bigcup_{i \in N} \mathcal{L}_i\}$, $R \setminus N$, $P_R = \bigcap_{i \in N} \mathcal{L}_i$. Отметим некоторые свойства множеств P_R :

(I) $R_1 \neq R_2 \Rightarrow P_{R_1} \cap P_{R_2} = \varnothing$;

(2) $\bigcup_{i \in N} \mathcal{L}_i = \bigcup_{R \neq \varnothing} P_R$;

(3) $i_0 \in R \Rightarrow P_R = \varnothing$;

(4) P_R относительно открыто в $\bigcap_{i \in R} \mathcal{L}_i$.

Таким образом, $\{P_R\}_{R \subset N}$ – разбиение пространства $\mathbb{R}^L$. Положим $\widetilde{P}_R = \mathcal{L}(P_R)$; если $P_R \neq \varnothing$, тогда из свойства (4) $\widetilde{P}_R = \bigcap_{i \in R} \mathcal{L}_i$. Пусть $\check{Z} = \tilde{Z} \times P_R$, тогда отображение $\Psi_R : \check{Z} \to R^{N \setminus \{R \cup \{i_0\}\}}$, где $(\Psi_R(z, p))_j = x^{(j)} p - y^{(j)} p$, $j \in N \setminus \{R \cup \{i_0\}\}$ – аналог бюджетного отображения Ψ_0.

Отображение $\Psi_R^{(p)} : \check{Z} \to \widetilde{P}_R$ определяется по формуле $\Psi_R^{(p)}(z, p) = p$. Принимая $\check{T} = \hat{T} \cup \{L \times \{0\}\} \cup \{\bigcup_{i \in N} \{K_i \cup L_i\}\} \cup \cup \{N \setminus \{R \cup \{i_0\}\}\}$, получаем отображение $\Psi_R^u = \prod_{i \in N} \Psi_i^u \times \Psi_B \times \times \prod_{i \in N} \Psi_i \times \Psi_R \times \Psi_R^{(p)} : \check{Z} \to R^{\check{T}} \times \widetilde{P}_R$. Здесь Ψ_B и Ψ_i^u, $i \in N$, прежние. Наконец, $\Psi^R : \mathcal{U} \times \check{Z} \to \mathbb{R}^{\check{T}} \times \widetilde{P}_R$ задается в виде $\Psi^R(u, \check{z}) = = \Psi_R^u(\check{z})$. Необходимо определить также подмножества $\bar{\Delta}_1^R$ и $\bar{\Delta}_2^R$ пространства $\mathbb{R}^{\check{T}} \times \widetilde{P}_R$:

$$\bar{\Delta}_1^R = \{(p_1, \dots, p_n, p^{(1)}, \dots, p^{(n)}, p', p'', p''') \mid p_i \in \mathbb{R}^{M \times \{i\}}, i \in N, p^{(i)} \in \mathbb{R}^{L_i \cup K_i}, i \in N;$$

$$p' \in \mathbb{R}^{L \times \{0\}}, p'' \in \mathbb{R}^{N \setminus \{R \cup \{i_0\}\}}, p''' \in \widetilde{P}_R; p_i^x = \lambda_i p''' + \sum_{k \in K_i} \alpha_k a_k^{(i)}, i \in N;$$

$$p_i^y = -\lambda_i p''' + \sum_{l \in L_i} \beta_l b_l^{(i)}, i \in N; p^{(i)} = (\check{x}^{(i)}, 0), i \in N; p' = 0, p'' = 0, \|p'''\| = 1\}.$$

Здесь $(\check{x}^{(i)}, 0)$ – вектор правых частей линейных ограничений, i_0 – номер участника, выбранного в соответствии с определением 3.I, для которого ограничение $p x^{(i_0)} = p y^{(i_0)}$ исключается, $\|\cdot\|$ – стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^L$, p_i^x, p_i^y, $i \in N$ определяются как и при построении Δ_1. (Это подмногообразие строится с той же целью и по тем же принципам, что и Δ_1.)

Для $k\in K_i, e\in L_i, i\in N$ положим

$$(\hat{a}_k^{(i)})_\xi = \begin{cases} (a_k^{(i)})_s, & \text{если } \xi\in M, \xi=(s,0,i), s\in L, k\in K_i; \\ 0 & \text{для прочих } \xi\in M; \end{cases}$$

$$(\hat{b}_\ell^{(i)})_\xi = \begin{cases} (b_\ell^{(i)})_t, & \text{если } \xi\in M, \xi=(t,1,i), t\in L, \ell\in L_i; \\ 0 & \text{для прочих } \xi\in M. \end{cases}$$

Пусть $\bar{A}=\bigcup_{i\in N}\{\hat{a}_k^{(i)}\}_{k\in K_i}$, $\bar{B}=\bigcup_{i\in N_\mp}\{\hat{b}_\ell^{(i)}\}_{\ell\in L_i}$. Тогда определим следующее подмножество $\mathbb{R}^{\mp}\times\tilde{P}_R$ по формуле

$$\bar{\Delta}_2^R=\{(P_1,\dots,P_n,P^{(1)},\dots,P^{(n)},p',p'',p''')\mid P_i\in\mathbb{R}^{M\times\{i\}}, i\in N, P^{(i)}\in \mathbb{R}^{K_i\cup L_i}, i\in N, p'\in\mathbb{R}^{L\times\{0\}}, p''\in\mathbb{R}^{N\setminus(R\cup\{n\})}, \tilde{p}\in\tilde{P}_R, \text{совокупность векторов } \{P_i\}_{i\in N}\cup\{\hat{e}_j\}_{j\in L}\cup\bar{A}\cup\bar{B} \text{ линейно-зависима}\}.$$

Здесь $\hat{e}_j$, $j\in L$, определяются как и при построении Δ_2. Это множество – аналог Δ_2, так как оно покрывает образ всех "паретовских" состояний экономики $\mathcal{U}$, находящихся на грани A, при отображении $\psi_R^{\mathcal{U}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. Если $P_R\neq\emptyset$, тогда $\bar{\Delta}_1^R\cap\bar{\Delta}_2^R=\bigcup_{t=3}^{S}\bar{\Delta}_t^R$, где $\bar{\Delta}_t^R$, $t=3,\dots,S$, – подмногообразия пространства $\mathbb{R}^{\mp}\times\tilde{P}_R$, причем если грань $A\subset S'$, тогда $\operatorname{codim}\bar{\Delta}_t^R>\operatorname{codim}\bar{\Delta}_1^R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основном проводится так же, как в утверждении 4.I. Дополнительно отметим, что условие $A\subset S'$ существенно для $\operatorname{codim}\bar{\Delta}_t^R>\operatorname{codim}\bar{\Delta}_1^R$, $t=3,\dots,S$, так как оно гарантирует нетривиальность множества $\bar{\Delta}_2^R$.

ЛЕММА I'. Пусть экономика $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_n)$ такова, что для любого $R\subset N$ и для всех $z\in\tilde{Z}$, $p\in P_R$ отображение $\psi_R^{\mathcal{U}}$ трансверсально $\bar{\Delta}_1^R$ в точке (z,p). Тогда она имеет конечное число состояний равновесия из A. Если, кроме того, $A\subset S'$ и $\psi_R^{\mathcal{U}}\pitchfork_{(z,p)}\bar{\Delta}_t^R$, $z\in\tilde{Z}$, $p\in P_R$, $t\subset 3,\dots,S$, то все эти состояния неэффективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подобно тому, как это делалось в лемме I, подсчитаем $\operatorname{codim}\bar{\Delta}_1^R=\sum_{i\in N\setminus R}(2\ell-k(i)-\ell(i)-1)+\sum_{i\in R}(2\ell-k(i)-\ell(i))+\sum_{i\in N}(k(i)-\ell(i))+n-r-1+1=2n\ell-n+r+\ell+n-r+1-1=2n\ell+\ell$.

Из утверждения 4.6 также следует, что $\operatorname{codim}\bar{\Delta}_t^R>\operatorname{codim}\bar{\Delta}_1^R$, $t=3,\dots,S$.

В силу трансверсальности Ψ^u_R и того, что P_R относительно открыто в $\bar{P}_R$, можно заключить, что $codim\,(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^R_1) = codim\,\bar{\Delta}^R_1 = 2nl+l \geq dim\,\check{Z} = 2nl + dim P_R$. Следовательно,

$$dim(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^R_1) = \begin{cases} <0, \text{ если } dim\,P_R \neq l; \\ =0, \text{ если } dim\,P_R = l; \end{cases}$$

$$dim(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^R_t) < 0,\ t=3,\dots,S.$$

Таким образом, $\bigcup\limits_{t=3}^{S}(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^R_t) = \emptyset$, а $(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^R_1)$ пусто или дискретно, если $dim\,P_R = l$.

Нетрудно видеть, что существует единственный $\bar{R} \subset N$ такой, что $dim\,P_{\bar{R}} = l$. Рассмотрим отображение $\Psi^u_A = \prod\limits_{i\in N}\Psi^u_i \times \Psi_B \times \prod\limits_{i\in N}\Psi_i \times \Psi_A \times \Psi_\rho$, где $\Psi^u_A : \tilde{Z} \times \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^{\check{T}\cup\bar{R}\cup(i,\hat{A})}$, $(\Psi_A)_j = x^{(j)}p - y^{(j)}p,\ j\in N$, $\Psi_\rho(Z,\rho) = \rho$, а $\Psi^u_i, \Psi_i (i\in \check{N}), \Psi_B$ определены выше.

Другими словами, мы будем рассматривать все бюджетные ограничения. Построим аналог множества Δ_1:

$$\Delta_A = \{(P_1,P_2,\dots,P_n,\rho^{(1)},\dots,\rho^{(n)},\rho',\rho'',\rho''') \,|\, P_i \in \mathbb{R}^{M\times\{i\}},\ i\in N,\ \rho^{(i)}\in\mathbb{R}^{K_i\cup L_i},$$
$$i\in N,\ \rho'\in\mathbb{R}^{L\times\{0\}},\ \rho''\in\mathbb{R}^N,\ \rho'''\in\mathbb{R}^L;\ \rho^x_i = \lambda_i\rho''' + \sum_{k\in K_i} d_k a^{(i)}_k,\ \rho^y_i = -\lambda_i\rho''' +$$
$$+ \sum_{l\in L_i}\beta_l b^{(i)}_l,\ i\in N;\ \rho^{(i)} = (\check{x}^{(i)},0),\ i\in N;\ \rho' = 0;\ \rho'' = 0;\ \|\rho'''\| = 1\}.$$

Поскольку Δ_A замкнуто, в силу 4.3 $(\Psi^u_A)^{-1}(\Delta_A)$ – компакт. Ясно, что Δ_A покрывает все равновесные состояния из A. Справедливо включение

$$(\Psi^u_A)^{-1}(\Delta_A) \subset \bigcup_{R\subset N,\,R\neq\emptyset}(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^R_1) = (\Psi^u_{\bar{R}})^{-1}(\bar{\Delta}^{\bar{R}}_1).$$

Но $(\Psi^u_R)^{-1}(\bar{\Delta}^{\bar{R}}_1)$ дискретно в $\mathbb{R}^{L\cup M}$. Следовательно, $(\Psi^u_R)^{-1}(\Delta_A)$ – дискретный компакт, откуда вытекает конечность равновесных состояний из A.

ЛЕММА $2'$. Отображение $\Psi^R : \mathcal{U} \times \check{Z} \to \mathbb{R}^{\check{T}} \times \tilde{P}_R$ трансверсально любому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^{\check{T}} \times \tilde{P}_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принципиально ход рассуждений совпадает с доказательством леммы 2. Но есть одно существенное отличие, которое во многом предопределило подготовку: сюръективность касательного к Ψ^R отображения. Действительно, если $(\mathcal{U}_0,\check{Z}_0) \in \mathcal{U} \times \check{Z}$ и $\vartheta = (\vartheta_1,\dots,\vartheta_n,\vartheta^{(1)},\dots,\vartheta^{(n)},\vartheta',\vartheta'',\vartheta''') \in \mathbb{R}^{\check{T}} \times \tilde{P}_R$, тогда необходимо определить $(\mathcal{U}_t,\check{Z}_t)_{t\in[0,1]}$ такую, что

$$u_t|_{t=0}=u_0, \check{z}_t|_{t=0}=\check{z}_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t}\Psi^R(u_t, \check{z}_t)|_{t=0}=\vartheta.$$

Положим $\check{z}_t=\check{z}_0+\bar{z}\cdot t, \check{z}=(z,p)$. Тогда $\bar{z}$ находится из системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i\in N}\bar{x}^{(i)}-\sum_{i\in N}\bar{y}^{(i)}=\vartheta, \\ A^{(i)}x^{(i)}=V^{(i)}_{K_i}, \qquad i\in N, \\ B^{(i)}\bar{y}^{(i)}=V^{(i)}_{L_i}, \qquad i\in N, \\ (\bar{x}^{(i)}-y^{(i)},p_0)=\vartheta''_i-(\bar{x}^{(i)}_0-y^{(i)}_0,\bar{p}), i\in N\setminus\{RU\{i_0\}\}, \\ \bar{p}=V''' \end{cases}$$

где $\vartheta^{(i)}\in\mathbb{R}^{L_i\cup K_i}$, $\vartheta^{(i)}=(V^{(i)}_{K_i}, V^{(i)}_{L_i})$.

В силу утверждений 4.5, 4.6, условия 3.I на грань A и того, что $p_0\in P_R$, гарантируется совместность данной системы уравнений при любых $\vartheta\in\mathbb{R}^{\mp}\times\tilde{P}_R$. В качестве $\bar{z}$ возьмем какое-либо из этих решений. Остальные рассуждения полностью совпадают с изложенными в лемме 2. Это завершает доказательство леммы.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в утверждении 4.3, множество сбалансированных состояний из $\mathcal{Z}$ ограничено.

Пусть $\bar{Y}_i=\{y^{(i)}\in Y_i|-a\le y^{(i)}\le a\}_{L^x_y}$, где a выбрано по 4.3. Выберем для $i\in N$ компакт $K_i\in\mathbb{R}^{L_y^x\times\{i\}}$ такой, что

$$\operatorname{int} K_i\supset\bar{\mathcal{Z}}_i=X_i\times\bar{Y}_i, \prod_{i\in N}K_i\subset\mathcal{Z}.$$

Пусть A – грань $\mathcal{Z}$, причем $A\subset S, R\subset N$ такое, что $P_R\ne\emptyset$. Если $P\subset\mathbb{R}^L$ – сфера цен, тогда существует последовательность компактов из P, $\{P^R_m\}^\infty_{m=1}$ такая, что

1) $P^R_m\subset P\cap P_R, m=1,2,\ldots,$

2) $\bigcup^\infty_{m=1}P^R_m=P\cap P_R$.

Построим последовательность компактов $K^R_m=\prod_{i\in N}K_i\times P^R_m\subset\tilde{\mathcal{Z}}\times\tilde{P}_R$, $m=1,2,\ldots$ Применим теоремы о плотности и открытости трансверсальных сечений в случае $\mathcal{A}=\mathcal{U}, X=\tilde{\mathcal{Z}}\times P_R, Y=\mathbb{R}^{\mp}\times\tilde{P}_R, \rho_a=\Psi^u_R$, $ev_p=\Psi^R, W^{(t)}=\bar{\Delta}^R_t, t=1,\ldots,s, w^{(s+1)}=\bar{\Delta}^R_1$. Поскольку из леммы 2 следует, что $ev_p \pitchfork w^{(t)}$, $t=s,\ldots,s+1$, а прочие условия теорем по построению соблюдены, получаем, что $\mathcal{A}^{(t,m)}_{K,R}=\{a\in\mathcal{A}|\rho_a \pitchfork_z W^{(t)}, z\in K^R_m\}$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{A}$. Сле-

довательно, $G_A^{(R,m)} = \bigcap_{t=3}^{s+1} \mathcal{A}_{K,R}^{(t,m)}$ также открыто и плотно в $\mathcal{A}$. Положим $\bar{G} = \bigcap \{G_A^{(R,m)} \mid A$ - грань $\mathcal{Z}$ и $A \subset S$, $R \subset N$, $P_R \neq \emptyset$, $m = 1, 2, \ldots\}$. Если положить $\tilde{\mathcal{Z}} = \prod_{i \in N} int\, K_i$, тогда по построению для любого $u \in \bar{G}$, для каждой невырожденной грани $A \subset \mathcal{Z}$, для любого $R \subset N$ такого, что $P_R \neq \emptyset$, ψ_R^u трансверсально $\bar{\Delta}_t^R$, $t = 3, \ldots, s+1$, в точке $(z, p) \in \tilde{\mathcal{Z}} \times \{P \cap P_R\}$. В силу того, что $\bar{G}$ представляет собой счетное пересечение открытых всюду плотных в $\mathcal{U}$ множеств, оно массивно. Чтобы закончить доказательство, достаточно применить лемму I$'$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Предположение, что $int\, Y_i \neq \emptyset, int\, X_i \neq \emptyset$ для любого $i \in N$, можно заменить на более слабое: $int(Y_i + X_i) \neq \emptyset$ для любого $i \in N$. Причем теорема I по-прежнему справедлива. Это следует из того, что матрица C_p невырождена при всех $p = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если предположить, что цены в рассмотренной модели не произвольны, как это было выше, а берутся только из выпуклого замкнутого конуса $Q \subset R^L$, причем для любой невырожденной грани A и любой $R \subset N$ множество $Q \cap P_R$ состоит из нуля или пусто, тогда в теореме 2 можно утверждать, что найдется открытое всюду плотное $\bar{G} \subset \mathcal{U}$. Это следует из утверждения 4.5, которое в данном случае гарантирует невырожденность матрицы C_p для $p \in Q$, $p \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выше предполагалось, что функции полезности участников экономики все заданы на некоторой окрестности $\mathcal{Z}$. Можно, вообще говоря, считать, что они определены и дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathcal{Z}$ в обычном смысле. Теоремы по-прежнему будут справедливы. Это следует из того факта, что отображение снижения $I : C^2(\tilde{\mathcal{Z}}, \mathbb{R}^N) \to C^2(\mathcal{Z}, \mathbb{R}^N)$ (где $I(f) = f|_{\mathcal{Z}}$) сюръективно.

§ 5. Пример

Проюллистрируем метод, применяемый в работе, рассматривая следующее многообразие экономик.

Пусть в экономике есть два агента (I-й и 2-й), два типа продуктов (x_1 и x_2). Потребительские множества первого и второго участников $X_1 = X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, а первоначальные запасы продуктов $\omega_1 = (0, 1)$, $\omega_2 = (1, 0)$. Хотя это будет и не строго, можно сказать, что если участники обладают некоторыми функциями полезности u_1 и u_2, соотношение

$\max\limits_{\{pz_i \le pw_i\}} u_i(z/z_i), \quad i=1,2$ (если считать $z_j=(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}), j \ne i$, зафиксированным), определяет кривую на X_i, которая параметризуется ценами на сфере (см. рис. 2,3).

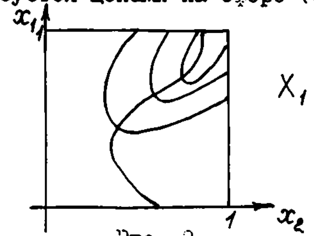

Рис. 2

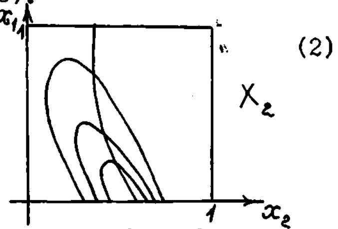

Рис. 3

Все это изображается на едином рисунке (рис. 4), где каждая точка квадрата может рассматриваться как потребление I-го участника (x_1, x_2), 2-го участника $(1-x_1, 1-x_2)$ и, наконец, как сбалансированное состояние экономики $(x_1, x_2, 1-x_1, 1-x_2)$. (Здесь кривая, соответствующая 2-му участнику, симметрично отображается относительно $(1/2, 1/2)$.) Пересечение возникающих кривых состоит (как правило) из конечного числа точек (на рисунке их две). Если исходное состояние $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1-\bar{x}_1, 1-\bar{x}_2)$ входит в это множество, тогда это равновесие.

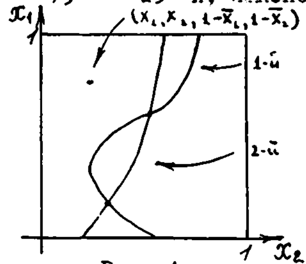

Рис. 4

Другими словами, по предпочтениям, определяемым по $u_1(\cdot, \cdot, 1-\bar{x}_1, 1-\bar{x}_2)$ и $u_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdot, \cdot)$ находится множество сбалансированных состояний; неподвижные точки такого точечно-множественного отображения есть равновесия экономики (u_1, u_2). В теореме I утверждается, что таких состояний, которые лежат во внутренности изображенного квадрата, как правило, конечное число и все они неэффективны. Если бы предпочтения не зависели от потребления соседа, тогда пересечение кривых дало бы нам сразу состояние равновесия. В данной ситуации многообразия Δ_1 и Δ_2, множества S и S' таковы:

$$\Delta_1 = \{(\alpha p_1, \alpha p_2, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \beta p_1, \beta p_2, 0, 0, 0, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{13} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}, p_1^2 + p_2^2 = 1\},$$

откуда

$$\dim \Delta_1 = 7, \ \operatorname{codim} \Delta_1 = 6;$$

$$\Delta_2^{(1)} = \{(\alpha p_1 + \beta, \alpha p_2 + \gamma, \alpha p_3 + \beta, \alpha p_4 + \gamma, p_1, p_2, p_3, p_4, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^{13} /$$

$$\alpha,\beta,\gamma\in R;\ p_i\in R,\ i=\overline{1,4}\};$$

$$\Delta_2^{(2)}=\{(p_1,p_2,p_3,p_4,\alpha p_1+\beta,\alpha p_2+\gamma,\alpha p_3+\beta,\alpha p_4+\gamma,.,.,.,.,.)\in R^{13}/$$
$$\alpha,\beta,\gamma\in R;\ p_i\in R,\ i=\overline{1,4}\};$$

$$\Delta_2=\Delta_2^{(1)}\cap\Delta_2^{(2)},\ \dim(\Delta_1\cap\Delta_2)<7;$$

$$S=\{(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})\in X_1\times X_2 \mid (x_1^{(1)},x_2^{(1)})\in \mathrm{int}\,X_1,\ (x_1^{(2)},x_2^{(2)})\in \mathrm{int}\,X_2\};$$

$$S'=\mathrm{int}\,X_1\times \mathrm{int}\,X_2.$$

В данном случае условия на грани следующие: $\sum_{i\in N} l_i+l+n\leq nl$, где l_i - коразмерность грани i-го участника. Таким образом, $l_1+l_2+2+2\leq 4$, откуда $l_1=l_2=0$. Наконец, $S'\cap S=\mathrm{int}\,X_1\times\mathrm{int}\,X_2$. То, что мы ограничиваемся только таким множеством состояний экономики (хотя, возможно, и не максимально большим даже в общем случае), заключено в существе дела. Действительно, рассмотрим предыдущий пример в случае полезностей следующего вида:

$$u_1=R-(x_1^{(1)}-5)^2-(x_2^{(1)}-2)^2,$$
$$u_2=R-(x_1^{(2)}+4)^2-(x_2^{(2)}-3),\quad R\geq 6.$$

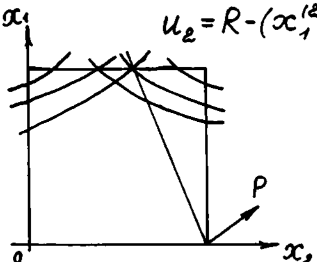

Рис. 5

Нетрудно видеть, что верхняя грань состоит из состояний равновесия, т.е. что состояния вида $(1,t,0,1-t),\ t\in[0,1]$ равновесные. Действительно, если $P_2\geq P_1$, тогда $\mathrm{argmax}\{u_1(z/z_1)\mid x_1^{(1)}P_1+x_2^{(1)}P_2\leq P_2,\ 0\leq x_1^{(1)}\leq 1,\ 0\leq x_2^{(1)}\leq 1\}=$

$$=\{(1,\frac{P_2-P_1}{P_2},x_1^{(2)},x_2^{(2)})\},\ \mathrm{argmax}\{u_2(z/z_2)\mid x_1^{(2)}P_1+x_2^{(2)}P_2\leq$$
$$\leq P_1,\ 0\leq x_1^{(2)}\leq 1,\ 0\leq x_2^{(2)}\leq 1\}=\{(x_1^{(1)},x_2^{(1)},0,P_1/P_2)\}.$$

Но все такие точки находятся на "границе Парето" (как, впрочем, и наоборот), более того, это справедливо не только для данной экономики (u_1,u_2), но и для всех экономик из достаточно малой окрестности u в топологии C^2, поскольку близость определяется не только близостью значений, но и близостью производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. DEBREU G. Economies with a finite set of equilibria. - Econometrica, 1970, No 38, p.387-392.
2. DUBEY P. Finitness and inefficiency of Nash equilibria.- Cowles Foundation Discussion Paper, No 508 R, 1970.
3. GUBEY P. Nash equilibria of market games: finitness and inefficiency. - J. Economic Theory, 1980, No 2, p. 363-376.
4. ABRAHAM P., ROBBIN J. Transversal mappings and flows.- Benjamin, N.Y., 1967.
5. BALASKO Y. Equilibrium analysis and envelope theory. - J. Math. Economy, 1978,No 5, p.153-172.
6. YIEH-HEI WAN. On the structure and stability of local Pareto optima in a pure exchange economy.- J. Math. Economy, 1978, No5, p. 255-274.

Поступила в ред.изд. отдел
18.03.1981 г.