Модели динамики и равновесия

УДК 517.5:519.85

О ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В R^n

В.И.Шмырев

В настоящей работе рассматривается класс кусочно-постоянных монотонных многозначных отображений из R^n в R^n. Показывается, что этот класс отображений исчерпывается субдифференциальными отображениями, порождаемыми полиэдральными выпуклыми функциями.

По аналогии с кусочно-постоянными функциями многозначное отображение $F: R^n \to R^n$ естественно было бы называть кусочно-постоянным, если область его задания разбивается на телесные множества Ω_i, $i \in I$, внутри каждого из которых рассматриваемое отображение постоянно. Однако если ограничиться рассмотрением монотонных отображений, т.е. удовлетворяющих условию

$$(x-y, v-w) \geqslant 0 \quad \forall v \in F(x), \forall w \in F(y), \tag{1}$$

то ясно, что образом внутренности Ω_i° каждого из множеств Ω_i может быть лишь одноточечное множество, а сами множества Ω_i должны быть полиэдральными выпуклыми множествами.

Пусть в R^n задана конечная совокупность полиэдральных выпуклых множеств Ω_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, удовлетворяющих условиям:

1°) $\Omega_i^\circ \cap \Omega_j^\circ = \emptyset$, $i \neq j$,

2°) любые два из множеств Ω_i либо не пересекаются, либо их пересечение является гранью для каждого из них;

3°) $\bigcup_i \Omega_i = R^n$.

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться терминологией комбинаторной топологии, рассматривая множества Ω_i как n-

мерные клетки полиэдрального комплекса ω , образованного совокупностью множеств Ω_i и их всевозможных замкнутых граней.

Пусть вместе с полиэдральным комплексом ω задана совокупность точек $x^i \in R^n$, $i \in I$, порождающая многозначное отображение $F: R^n \longrightarrow R^n$ в соответствии с формулой

$$F(x) = conv\{x^i \mid i \in I(x)\}, \qquad (2)$$

где $I(x) = \{i \in I \mid x \in \Omega_i\}$. Пару (ω, F) будем называть кусочно-постоянным отображением из R^n в R^n.

Два множества Ω_i и Ω_j, $i,j \in I$, будем называть соседними, если их пересечение $(n-1)$-мерно. Через $\Theta \subset I \times I$ обозначим множество пар (i,j), соответствующих парам соседних множеств Ω_i и Ω_j. Кусочно-постоянное отображение (ω, F) будем называть монотонным, если монотонно многозначное отображение F , и локально-монотонным, если для многозначного отображения F условие монотонности (I) выполняется при любых x и y , лежащих внутри любых двух соседних множеств: $x \in \mathring{\Omega}_i$, $y \in \mathring{\Omega}_j$, $(i,j) \in \Theta$.

Основным утверждением, доказываемым в настоящей заметке является

ТЕОРЕМА. *Всякое кусочно-постоянное локально-монотонное отображение (ω, F) потенциально: существует полиэдральная выпуклая функция f такая, что многозначное отображение F совпадает с порождаемым функцией f субдифференциальным отображением $\partial f: x \longrightarrow \partial f(x)$.*

Доказательство этой теоремы мы приведем в конце работы, предпослав ему необходимые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА I. *Локально-монотонное кусочно-постоянное отображение монотонно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что условие монотонности выполняется для любых x и y , лежащих внутри произвольных двух (не обязательно соседних) множеств Ω_i и Ω_j . Пусть $x \in \mathring{\Omega}_i$, $y \in \mathring{\Omega}_j$. В сколь угодно малой окрестности точек x и y найдутся такие точки $\tilde{x} \in \mathring{\Omega}_i$ и $\tilde{y} \in \mathring{\Omega}_j$, что отрезок $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ не пересекается ни с одной из граней множеств Ω_s, $s \in I$, размерности меньше, чем $(n-1)$, т.е. выполняется

условие: если $[\tilde{x},\tilde{y}]\cap\Omega_s\neq\phi$, то $[\tilde{x},\tilde{y}]\cap\Omega_s^{\circ}\neq\phi$. При этом условии однозначно определяется очередность, в которой точка $x(t)=(1-t)\tilde{x}+t\tilde{y}$ при изменении параметра t от 0 до I, зачерчивая отрезок $[\tilde{x},\tilde{y}]$, пересекает множества Ω_s:

$$\Omega_i=\Omega_{s_1},\Omega_{s_2},\ldots,\Omega_{s_p}=\Omega_j.$$

В этой последовательности любые два рядом стоящие члена являются соседними множествами, т.е. $(s_\tau, s_{\tau+1})\in\Theta$, что, ввиду локальной монотонности F, влечет

$$(x^{s_{\tau+1}}-x^{s_\tau},\tilde{y}-\tilde{x})\geqslant 0,\ \tau=1,2,\ldots,p-1.$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$(x^j-x^i,\tilde{y}-\tilde{x})\geqslant 0.$$

По непрерывности отсюда следует требуемое неравенство:

$$(x^j-x^i,y-x)\geqslant 0. \qquad (3)$$

Пусть теперь x и y - произвольные точки R^n. Им соответствуют клетки $Q_x, Q_y\in\omega$ такие, что x и y лежат в относительной внутренности соответствующих клеток: $x\in Q_x^{\circ}, y\in Q_y^{\circ}$. Тогда, по определению отображения F,

$$F(x)=conv\{x^i\,|\,i\in I(Q_x^{\circ})\},$$

$$F(y)=conv\{x^j\,|\,j\in I(Q_y^{\circ})\},$$

где под $I(Q^{\circ})$ понимается множество $I(z)$ при $z\in Q^{\circ}$.

Возьмем произвольные точки $v\in F(x)$ и $w\in F(y)$. Точка v является некоторой выпуклой комбинацией точек x^i, $i\in I(Q_x^{\circ})$. Пусть коэффициенты этой выпуклой комбинации суть λ_i, $i\in I(Q_x^{\circ})$. Аналогично, для точки w можно указать коэффициенты соответствующей выпуклой комбинации μ_j, $j\in I(Q_y^{\circ})$. Для любой пары (i,j) при $i\in I(Q_x^{\circ})$ и $j\in I(Q_y^{\circ})$, по доказанному выше, выполняется соответствующее неравенство (3). Умножая каждое из таких неравенств на отвечающий ему множитель $\lambda_i\mu_j$ и складывая, получим требуемое неравенство (I). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно показать, что при $x\neq y$ равенство в (I) достигается лишь в случае $v, w\in F(x)\cap F(y)$.

Произвольное монотонное многозначное отображение из R^n в R^n будем называть локально-потенциальным, если в достаточно малой окрестности любой внутренней точки из области задания этого отображения оно совпадает с субдифференциальным отображением ∂g, порождаемым некоторой выпуклой функцией g.

ЛЕММА 2. Если (ω, F) – монотонное кусочно-постоянное отображение, то F – локально-потенциально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $z \in R^n$. Для простоты, без ограничения общности, можно считать $z=0$. Рассмотрим функцию g, задаваемую формулой

$$g(x) = \max_{i \in I(0)} (x, x^i). \tag{4}$$

Для доказательства того, что F совпадает в окрестности нуля с субдифференциальным отображением ∂g, достаточно показать, что при $x \in \Omega_i$ будет $g(x) = (x, x^i)$, т.е. для любого $j \neq i$, $j \in I(0)$, выполняется $(x^i - x^j, x) \geq 0$. Это следует из монотонности F. Действительно, взяв $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i$ и $y \in \overset{\circ}{\Omega}_j$, будем иметь

$$(x-y, x^i - x^j) \geq 0,$$

т.е.

$$(x, x^i - x^j) \geq (y, x^i - x^j).$$

Но так как y можно взять достаточно близким к точке 0, не нарушая условия $y \in \overset{\circ}{\Omega}_j$, то отсюда следует требуемое неравенство $(x, x^i - x^j) \geq 0$. Поскольку оно верно при всех $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, то, значит, и при всех $x \in \Omega_i$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если (ω, F) – монотонное кусочно-постоянное отображение, то F – максимально монотонно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что график отображения F в пространстве R^{2n} не является собственной частью графика ни для какого другого монотонного отображения из R^n в R^n. Предположим противное: нашлось монотонное отображение $\Phi: R^n \to R^n$ такое, что при любом x имеет место включение $F(x) \subset \Phi(x)$, и хотя бы для одной точки x это включение строгое, т.е. $F(x) \neq \Phi(x)$. Не ограничивая общности, можно считать, что такой точкой x является точка 0.

Пусть $x^* \in \Phi(0) \setminus F(0)$. По лемме 2 отображение F в достаточно малой окрестности V точки 0 совпадает с отображением ∂g, порождаемым функцией (4). Таким образом, для $x \in V$ имеем $\Phi(x) \supset \partial g(x)$. Но отображение ∂g – максимально монотонно, а потому по $x^* \notin \partial g(0)$ найдутся точка $y \in R^n$ и точка $y^* \in \partial g(y)$ такие, что

$$(0 - y, x^* - y^*) < 0. \tag{5}$$

Учитывая, что функция g – положительно однородная первой степени, можно считать точку y принадлежащей окрестности $\mathcal{U}$. Но тогда $\partial g(y) \subset \Phi(y), y^* \in \Phi(y)$, а значит, неравенство (5) противоречит монотонности отображения Φ. Лемма доказана.

Легко видеть, что всякая возрастающая кусочно-постоянная функция $\varphi : R \to R$ порождает естественным образом некоторое кусочно-постоянное монотонное отображение: множества (отрезки) Ω_i являются замыканиями интервалов постоянства функции φ. При этом образы внутренних точек двух различных отрезков Ω_i будут различными.

Будем называть кусочно-постоянное монотонное отображение (ω, F) строго монотонным, если для любых двух различных n-мерных клеток $G_1, G_2 \in \omega$ образы их внутренностей при отображении F различны:

$$F(G_1^\circ) \neq F(G_2^\circ). \tag{6}$$

ЛЕММА 4. Для заданного кусочно-постоянного монотонного отображения (ω, F) существует полиэдральный комплекс ω_F такой, что определено кусочно-постоянное отображение (ω_F, F) и оно является строго монотонным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 отображение F – максимально монотонно. Но тогда максимально монотонно и обратное отображение $F^{-1}: F(R^n) \to R^n$, определяемое формулой

$$F^{-1}(x) = \{z \in R^n \mid x \in F(z)\}.$$

Но любое максимально монотонное отображение выпуклозначно. Следовательно, множество $F^{-1}(x)$ выпукло при любом $x \in F(R^n)$. Очевидно, что $F^{-1}(x)$ является объединением конечного числа полиэдральных множеств и, ввиду выпуклости, также является полиэдральным.

Пусть P_k, $k \in K$, – совокупность множеств $F^{-1}(x)$ при $x \in \{x^i \mid i \in I\}$. Множества P_k телесны и внутренности двух различных множеств P_k и P_j не пересекаются. Покажем, что если $P_k \cap P_j \neq \emptyset$ при $k \neq j$, то $P_k \cap P_j$ является замкнутой гранью как для P_k, так и для P_j. Для этого достаточно показать, что для любой точки $z \in R^{dn}$ у всех множеств P_k, $k \in K(z) = \{k \in K \mid z \in P_k\}$, размерность минимальной замк-

нутой грани, содержащей z, одна и та же.

Для простоты, без ограничения общности, возьмем $z = 0$. По лемме 2 отображение F в окрестности точки 0 совпадает с отображением ∂g для функции g, задаваемой формулой (4), которую в данном случае можно переписать в виде:

$$g(x) = \max_{k \in K(0)} (x, y^k),$$

где $y^k = F(P_k^\circ)$. Из свойств субдифференциалов полиэдральных функций следует, что точки y^k, $k \in K(0)$, являются крайними точками многогранника $\partial g(0) = F(0)$. Для $k \in K(0)$ через Q_k обозначим конус с вершиной в нуле такой, что конус $y^k + Q_k$ является касательным к многограннику $\partial g(0)$ в его вершине y^k. Все конусы Q_k, $k \in K(0)$, имеют одинаковую размерность $\rho = \dim \partial g(0)$. Но конус Q_k является полярой касательного конуса к множеству P_k в точке 0. Тем самым, размерность минимальной замкнутой грани множества P_k, содержащей точку 0, равна $n - \rho$ и одинакова для всех $k \in K(0)$.

Таким образом, можно рассматривать полиэдральный комплекс, состоящий из множеств P_k, $k \in K$, и их всевозможных замкнутых граней. Легко видеть, что это комплекс $\omega_F = \{F^{-1}(x) | x \in F(R^n)\}$. Ясно также, что отображение F порождается точками y^k, $k \in K$, в соответствии с формулой

$$F(x) = conv\{y^k | k \in K(x)\}.$$

Тем самым, определено кусочно-постоянное отображение (ω_F, F), которое очевидным образом строго монотонно. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что в случае строго монотонного кусочно-постоянного отображения (ω, F) комплекс ω совпадает с комплексом ω_F, и можно отождествить кусочно-постоянное отображение (ω, F) с многозначным отображением F, говоря в этом случае о монотонном кусочно-постоянном отображении F.

Из условия 2^0, накладываемого на множества Ω_i, следует, что аффинные носители граней минимальной размерности у всех множеств являются сдвигами одного и того же подпространства H. Ввиду монотонности отображения F, все точки x^i, $i \in I$, расположены в аффинном многообразии, которое является сдвигом подпространства $H^\perp$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что H тривиально. В противном случае можно провести соответствующую факторизацию пространства R^n.

ЛЕММА 5. Пусть $H=\{0\}$ и $\{a^j\in R^n \mid j\in J\}$ – множество всех 0-мерных клеток (вершин) комплекса ω. Если $\omega=\omega_F$, то все многогранники $\Xi_j=F(a^j), j\in J$, телесны и удовлетворяют условиям:

1^0) $\overset{\circ}{\Xi}_j \cap \overset{\circ}{\Xi}_k=\emptyset, j=k$;

2^0) любые два из множеств Ξ_j либо не пересекаются, либо их пересечение является гранью для каждого из них;

3^0) точки $x^i=F(\Omega_i^\circ), i\in I(a^j)$, являются крайними точками множества Ξ_j.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем телесность множеств Ξ_j. Пусть a^j – произвольная вершина комплекса ω. Не ограничивая общности, для простоты изложения считаем $a^j=0$. Из леммы 2 следует, что многогранник Ξ_j совпадает с множеством $\partial g(0)$ для функции g, задаваемой формулой (4). Легко видеть, что $\partial g(0)=dom\, g^*$, где g^* – функция, сопряженная к функции g. Ввиду строгой монотонности рассматриваемого кусочно-постоянного отображения (ω, F), функция g не будет аффинной ни на какой прямой, а это необходимое и достаточное условие телесности множества $dom\, g^*$. Таким образом, Ξ_j телесно.

Условие 3^0 следует из того, что $\Xi_j=\partial g(0)$.

Условие I^0 следует из монотонности отображения F.

Условие 2^0 следует из монотонности отображения F и условия 3^0. Лемма доказана.

В предположениях леммы 5 рассмотрим полиэдральный комплекс ξ, состоящий из многогранников $\Xi_j, j\in J$, и их всевозможных замкнутых граней. Через $|\xi|$ обозначим объединение всех многогранников $\Xi_j, j\in J$.

ЛЕММА 6. Множество $|\xi|$ является выпуклым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что множество $|\xi|$ имеет внутренние точки, ибо многогранники Ξ_j телесны. Покажем, что в любой граничной точке этого множества существует опорная плоскость. При наличии внутренних точек этого достаточно, чтобы множество было выпуклым.

Ясно, что достаточно доказать существование опорной плос-

кости для граничных точек, лежащих в относительной внутренности $(n-1)$-мерных клеток комплекса ξ, ибо множество этих точек плотно в множестве всех граничных точек. Пусть w – какая-либо из таких точек и $Q \subset \Xi_{j_1}$ – соответствующая $(n-1)$-мерная клетка комплекса ξ. Ясно, что Q является образом при отображении F для относительно внутренних точек некоторой неограниченной одномерной клетки $P \in \omega$. Клетка P имеет вид

$$P = \{z \in R^n \mid z = a^{j_1} + th, t \geq 0\}.$$

Возьмем произвольную точку v из $|\xi|$. Пусть $v \in \Xi_{j_2}$. Тогда $v \in F(a^{j_2}), w \in F(a^{j_1} + th)$ и по монотонности отображения F имеем

$$(w - v, a^{j_1} + th - a^{j_2}) \geq 0 \qquad \forall t \geq 0,$$

что влечет

$$(w - v, h) \geq 0 \qquad \forall v \in |\xi|. \tag{7}$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основного утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Прежде всего заметим, что из лемм I и 4 следует, что достаточно рассмотреть лишь случай строго монотонного кусочно-постоянного отображения. Не ограничивая общности, будем предполагать также выполненными условия леммы 5.

Требуемую полиэдральную функцию f, как следует из леммы 2, естественно искать в виде:

$$f(x) = \max_{i \in I} [(x, x^i) - \delta_i], \tag{8}$$

где δ_i – некоторые константы. Введем функции f_i:

$$f_i(x) = (x, x^i) - \delta_i.$$

Покажем, что константы δ_i можно выбрать согласованными, а именно так, чтобы для любой n-мерной клетки $\Xi_j \in \xi$ функции f_i, соответствующие вершинам x^i этой клетки, принимали в точке $a^j = F^{-1}(\Xi_j^{\circ})$ одно и то же значение, т.е.

$$f_{i_1}(a^j) = f_{i_2}(a^j), \quad i_1, i_2 \in I_j, \tag{9}$$

где $I_j = \{i \in I \mid x^i \in \Xi_j\}$. При выполнении этого условия функция (8), как будет показано ниже, в окрестности любой точки с точностью до постоянного слагаемого совпадает с соответ-

ствующей локальной потенциальной функцией g, которая рассматривалась в лемме 2.

Введем на каждой клетке комплекса ξ произвольным образом ориентацию, превращая тем самым комплекс ξ в ориентированный полиэдральный комплекс X^+. Через X обозначим соответствующее клеточное пространство ([3], с. 200), т.е. множество $X^+ \cup \{-Q \mid Q \in X^+\}$. Элементы комплекса ξ отождествим с соответствующими элементами из X^+, считая X расширением множества ξ. Принимая это соглашение, сохраним для вершин комплекса X^+ обозначение x^i, $i \in I$.

Множество вершин комплекса X^+ и множество его одномерных клеток U задают некоторый ориентированный граф Γ. Через $u_{ik} = (x^i, x^k)$ будем обозначать дуги этого графа. Множество вершин многогранника Ξ_j выделяет в графе Γ связный подграф Γ_j. Пусть U_j – множество дуг этого подграфа. Ввиду связности подграфа Γ_j, система условий (9) эквивалентна такой своей подсистеме:

$$f_i(a^j) = f_k(a^j), \quad u_{ik} \in U_j. \tag{10}$$

Таким образом, величины δ_i, $i \in I$, должны удовлетворять системе линейных уравнений:

$$-\delta_i + \delta_k = (a^j, x^k - x^i), \quad j \in J, \; u_{ik} \in U_j. \tag{11}$$

Заметим, что если многогранники Ξ_{j_1} и Ξ_{j_2} имеют общее ребро $[x^i, x^k]$, то дуга u_{ik} принадлежит как U_{j_1}, так и U_{j_2}, и соответствующие из уравнений системы (11) имеют вид:

$$-\delta_i + \delta_k = (a^{j_1}, x^k - x^i),$$

$$-\delta_i + \delta_k = (a^{j_2}, x^k - x^i).$$

Легко видеть, что правые части этих уравнений также совпадают, ибо $(a^{j_1} - a^{j_2}, x^k - x^i) = 0$ при $k, i \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$ ввиду монотонности рассматриваемого отображения F. Оставляя для каждой дуги $u_{ik} \in U$ лишь одно из уравнений системы (11), можно переписать эту систему в виде:

$$-\delta_i + \delta_k = (a^{ik}, x^k - x^i), \quad u_{ik} \in U, \tag{12}$$

где в качестве a^{ik} может быть взята любая из точек a^j при $j \in J_{ik} = \{j \in J \mid x^i, x^k \in \Xi_j\}$.

Для существования решений системы (12) необходимо и достаточно, чтобы любая целочисленная линейная комбинация урав-

нений этой системы, обращающая в тождественный ноль левую часть результирующего уравнения, обращала в ноль и его правую часть. Так как каждое уравнение системы (I2) соответствует некоторой одномерной клетке ориентированного полиэдрального комплекса X^+, то целочисленная линейная комбинация уравнений этой системы соответствует некоторой целочисленной одномерной цепи клеточного пространства X. Пусть Δ - операция образования границы цепей пространства X. Так как коэффициенты уравнения системы (I2), соответствующего одномерной клетке $u_{ik} \in X^+$, совпадают с коэффициентами границы этой клетки ($\Delta u_{ik} = -x^i + x^k$), то, как легко видеть, целочисленная линейная комбинация уравнений системы (I2), обращающая в тождественный ноль левую часть результирующего уравнения, соответствует некоторому одномерному циклу клеточного пространства X.

Из леммы 6 следует, что множество $|\xi|$ гомеоморфно шару в R^n, а значит, одномерная группа Бетти полиэдрального комплекса ξ тривиальна, т.е. любой одномерный цикл пространства X гомологичен нулю. Возьмем произвольный одномерный цикл, и пусть h - двумерная цепь, границей которой он является:

$$h = \sum_s h_s X_s^2$$

(X_s^2 - двумерные клетки комплекса X^+, h_s - целые числа). Ввиду того, что $\Delta h = \sum_s h_s \Delta X_s^2$, достаточно доказать, что любая цепь ΔX_s^2 обладает требуемым свойством: сумма правых частей системы (I2), умноженных на коэффициенты цепи ΔX_s^2 при соответствующих клетках u_{ik}, равна нулю.

Пусть X_s^2 - произвольная двумерная клетка из X^+ и $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_p}$ - ее вершины, взятые в порядке их следования при обходе границы этой клетки в соответствии с ее ориентацией. Не ограничивая общности, можно считать, что $u_{i_1 i_2}, \ldots, u_{i_{p-1} i_p}, u_{i_p i_1} \in U$ (если какая-либо из этих дуг не входит в U, то изменим ее ориентацию на обратную). Тогда

$$\Delta X_s^2 = u_{i_1 i_2} + u_{i_2 i_3} + \cdots + u_{i_{p-1} i_p} + u_{i_p i_1},$$

и сумма правых частей уравнений системы (I2), соответствующая цепи ΔX_s^2, будет

$$(a^{i_1 i_2}, x^{i_2} - x^{i_1}) + (a^{i_2 i_3}, x^{i_3} - x^{i_2}) + \ldots + (a^{i_{p-1} i_p}, x^{i_p} - x^{i_{p-1}}) + (a^{i_p i_1}, x^{i_1} - x^{i_p}).$$

Клетка X_s^2 является двумерной гранью некоторого множества

$\Xi_j \in \xi$. Так как $j \in J_{i_1 i_2} \cap J_{i_2 i_3} \cap \ldots \cap J_{i_{p-1} i_p} \cap J_{i_p, i_1}$, то в качестве $a^{i_1 i_2}, \ldots, a^{i_{p-1} i_p}, a^{i_p i_1}$ можно взять одну и ту же точку a^j, в результате чего приведенная выше сумма преобразуется в такую:

$$(a^j, x^{i_2} - x^{i_1}) + (a^j, x^{i_3} - x^{i_2}) + \ldots + (a^j, x^{i_p} - x^{i_{p-1}}) + (a^j, x^{i_1} - x^{i_p}),$$

которая очевидным образом равна нулю.

Таким образом, доказано существование совокупности констант δ_i, $i \in I$, при которой функции f_i удовлетворяют условиям (9). Для завершения доказательства теоремы остается показать, что для любой n-мерной клетки $\Omega_i \in \omega$ при $x \in \Omega_i^\circ$ будет

$$f_i(x) > f_s(x), \quad s \neq i. \qquad (13)$$

Покажем это.

Так как $x \in \Omega_i^\circ$ и $s \neq i$, то $x \notin \Omega_s$ и среди $(n-1)$-мерных граней полиэдрального множества Ω_s найдется такая, несущая плоскость которой строго отделяет точку x от множества Ω_s. Пусть это общая грань множеств Ω_s и Ω_{s_1}. Согласно выбору констант δ_s и δ_{s_1} аффинные функции f_s и f_{s_1} совпадают во всех вершинах выбранной грани, а значит, и на всей гиперплоскости, являющейся ее аффинным носителем. Уравнение этой гиперплоскости имеет вид:

$$f_{s_1}(z) = f_s(z),$$

или в иной форме

$$(x^{s_1} - x^s, z) = d. \qquad (14)$$

Для точек z из полупространства $(x^{s_1} - x^s, z) > d$ выполняется неравенство $f_{s_1}(z) > f_s(z)$. В этом полупространстве находится и точка x, ибо для $v \in \Omega_s$, ввиду монотонности отображения F, выполняется неравенство

$$(v, x^{s_1} - x^s) \leq d,$$

а рассматриваемая гиперплоскость с уравнением (14) строго отделяет точку x от множества Ω.

Таким образом, $f_{s_1}(x) > f_s(x)$. Если $s_1 \neq i$, то описанную процедуру можно повторить для множества Ω_{s_1}. В результате получаем строго возрастающую последовательность

$$f_s(x) < f_{s_1}(x) < f_{s_2}(x) < \ldots$$

Так как ни один из членов этой последовательности повториться не может, то через конечное число шагов получим $s_k = i$, а вместе с этим и требуемое неравенство (13). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
2. ПОНТРЯГИН Л.С. Основы комбинаторной топологии. - М.: Наука, 1976.
3. АЛЕКСАНДРОВ П.С. Общая теория гомологий. - М.: Наука, 1979.

Поступила в ред.-изд. отдел
17.09.1980 г.