Выпуск 27(44) ОПТИМИЗАЦИЯ 1981 г.
Численные методы

УДК 519.8

О РАСКРОЕ ЛИСТА НА РАВНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЗАГОТОВКИ

С.Ю.Дремин, В.А.Залгаллер

1. Раскрой на гильотине позволяет осуществлять прямые сквозные резы, параллельные сторонам прямоугольного листа. Между выполнением отдельных резов лист можно повернуть на 90°. Это позволяет выполнять разнообразные раскрои. Как на этом пути получать из листа возможно большее число равных прямоугольных заготовок заданного размера?

Ответ на этот известный [1,2] вопрос легко получать с помощью ЭВМ. Достаточно пользоваться специальным алгоритмом типа динамического программирования, включенным в пакет [3].

2. Быстрота счета по упомянутому алгоритму основывается на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1 (Кобзев А.В. [2]). *Пусть лист размером $C \times \mathcal{D}$ $(C \geq \mathcal{D})$ раскроен гильотинным способом на заготовки размером $c \times d$ $(c \geq d)$. Тогда, каков бы ни был этот раскрой P, существует дающий то же число заготовок c-раскрой, при котором сначала выполняются только резы на полосы ширины c, а затем эти полосы режутся на заготовки ширины d.*

(Аналогично существует дающий столько же заготовок d-раскрой, в котором сначала выполняются только резы на полосы ширины d, а затем эти полосы разрезаются на заготовки длины c.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу получаемых при раскрое P заготовок. При получении всего одной заготовки теорема очевидно верна. Пусть для всех раскроев P, дающих меньше n заготовок, утверждение теоремы справедливо. Докажем ее для раскроя P, дающего n заготовок. Первый рез ℓ в раскрое P делит лист на две части (листы A и B). В каждом из листов A, B получается меньше n заготовок. Для них теорема верна. Поэтому дальнейший раскрой частей A и B можно начать с отрезания полос ширины c. Если хоть одна из первых c-полос в частях A и B параллельна резу ℓ, то раскрой всего листа можно начать с отрезания этой c-полосы, и теорема верна. Если же и в A, и в B их раскрой на c-полосы начинается с резов, перпендикулярных ℓ, то из первых c-полос листов A и B можно (если надо - перевернув одну из частей A и B) составить одну c-полосу, отрезаемую сразу от исходного листа. Теорема доказана. Ее вторая часть проверяется так же, с заменой c на d.

3. В алгоритме [3] вырабатывается наилучший по числу заготовок c-раскрой. В случае $c > d$ нахождение лучшего c-раскроя быстрее, чем нахождение соответствующего d-раскроя. Поэтому (а также по технологическим соображениям) в [3] отдано предпочтение c-раскроям.

Отрезание полос ширины c осуществляется последовательно. Мы вправе считать, что всегда горизонтальные полосы отрезаются именно от верхнего края, а вертикальные - от правого края. Это окончательно канонизирует лучший c-раскрой (аналогично для d-раскроя).

4. Гильотинные станки имеют следующую особенность. При отрезании в размер по заданному упору перед ножом гильотины должна оставаться полоса материала шире, чем некоторая норма Δ. Норма эта выбирается такой, чтобы передние прижимы могли зафиксировать материал и чтобы он выступал за решетку, предохраняющую руки рабочего. (На гильотинах для раскроя тонколистового материала $\Delta \approx 140$ мм, а при отсутствии решетки $\Delta \approx 60$ мм.)

Если эта норма не соблюдена, но неотрезаемый размер больше, чем Δ, то выполнить рез все же можно. Надо оставшийся кусок листа расположить так, чтобы отрезаемая в размер часть была перед ножом гильотины, а отход - за ними. Поэтому при

$\Delta < d \leq c$ лучший раскрой можно планировать, как указывалось выше. При $d \leq c < \Delta$ раскрой тоже можно планировать, как указывалось выше, считая размерами листа $(C-\Delta)\times(\mathcal{D}-\Delta)$.

5. ТЕОРЕМА 2. Пусть лист $C\times\mathcal{D}$ некоторым способом P можно раскроить на заготовки $c\times d$, причем $d<\Delta<c$ и раскрой P с его очередностью резов технологически реализуем на гильотине с учетом потерь на зажим. Тогда существует также технологически реализуемый d-раскрой, дающий то же число заготовок.

Подобного c-раскроя может не существовать, поскольку c-полосы нельзя без потерь на зажим резать на заготовки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу заготовок, получаемых из листа при раскрое P. При получении всего одной заготовки теорема очевидно верна. Пусть она справедлива для всех раскроев, дающих менее n заготовок. Докажем ее для раскроя P, дающего n заготовок. Первый рез ℓ в раскрое P делит лист на части A и B. В каждой из них дальнейшие раскрои P_A, P_B реализуемы. По индуктивному предположению их можно заменить так же реализуемыми P_{Ad}- и P_{Bd}-раскроями. Как при доказательстве теоремы I, это позволяет изменить P, начав с отрезания одной d-полосы. Оставшаяся часть имеет реализуемый раскрой, ведь можно восстановить на ней рез ℓ. По индуктивному предположению у этой части есть реализуемый d-раскрой. Теорема 2 доказана.

6. Таким образом, наилучший раскрой в случае $d<\Delta<c$ достаточно искать только среди реализуемых канонических d-раскроев.

Первый алгоритм поиска этого лучшего раскроя легко построить аналогично алгоритму поиска лучшего c-раскроя (см.[3]), добавив на соответствующих шагах алгоритма проверку реализуемости очередного d-реза.

7. В этом пункте мы укажем вид лучшего из технологически реализуемых (с учетом потерь на зажим) канонических d-раскроев. Это дает второй, более короткий алгоритм нахождения такого раскроя.

Если не соблюдено хоть одно из условий $c \le C$, $d \le \mathcal{D}$, то из листа вообще нельзя получать требуемые заготовки. Если $c > \mathcal{D}$, то расположение заготовок единственно. Отбросим эти простые случаи. Считаем, что $c \le \mathcal{D}$

Выделим на листе $C \times \mathcal{D}$ (длину C листа считаем горизонтальной) две полосы шириной c вдоль нижней и вдоль левой сторон листа (рис. I). Для правого верхнего прямоугольника S размером $(C-c) \times (\mathcal{D}-c)$ составим лучший канонический d-раскрой на заготовки $c \times d$, не учитывая при этом потерь на зажим. (Мы не исключаем, что в S может не поместиться ни одной заготовки.)

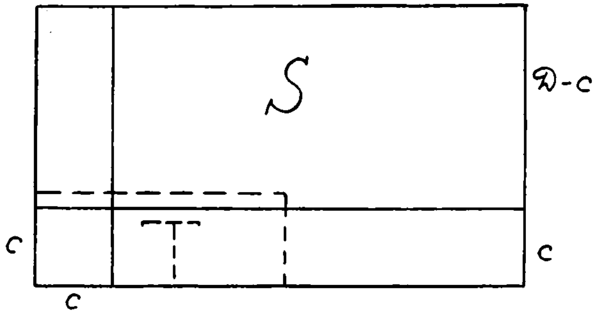

Рис. I

Выполняя найденный d-раскрой прямоугольника S на d-полосы, будем продолжать каждый рез через весь исходный лист. Когда мы таким образом закончим раскрой прямоугольника S, от всего листа останется прямоугольный остаток T. Хотя бы одна из его сторон будет лишь незначительно превышать c или равняться ей. Прямоугольник T резами, параллельными его меньшей стороне, разрезаем на d-полосы в максимально возможном (учитывая одну потерю на зажим) количестве.

ТЕОРЕМА 3. Полученный таким образом раскрой дает при $d < \Delta < C$ максимально возможное число заготовок.

Теорема 3 содержит второй алгоритм. Он короче алгоритма, упомянутого в предыдущем пункте, поскольку найти лучший канонический d-раскрой для S можно заметно быстрее, чем для всего листа.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Ввиду теоремы 2, лучший раскрой достаточно искать среди канонических d-раскроев. Пусть P - такой наилучший раскрой. Будем дополнительно считать, что внутри d-полос, расположенных в листе вертикально, заготовки $c \times d$ сдвинуты до упора в нижний край листа, а в d-полосах, расположенных горизонтально, - до упора в левый край листа.

Обратимся к d-полосе, отрезаемой в раскрое P последней. Пусть, для определенности, она расположена вертикально. (Случай горизонтального положения рассматривается аналогично.) Пусть a - нижняя заготовка в этой полосе (рис. 2). Поскольку раскрой P канонический, то вправо от заготовки a до конца листа идет ряд R заготовок, параллельных a (см. рис. 2). Рассмотрим три случая.

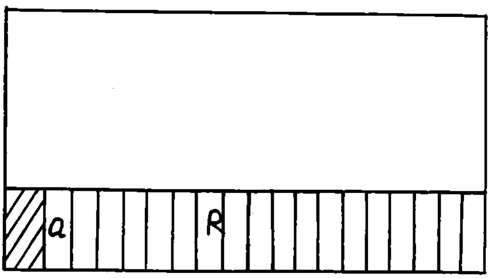

Рис. 2

СЛУЧАЙ I. Последняя из отрезаемых в P d-полос содержит только одну заготовку a, и рядом R исчерпываются все получаемые из листа заготовки. (Это будет при $0 \le \mathcal{D} - c < d$.) В этом случае раскрой P удовлетворяет теореме 3 (здесь область S не вмещает ни одной заготовки).

СЛУЧАЙ 2. Последняя из отрезаемых в P d-полос содержит только одну заготовку a , а над рядом R есть еще заготовки. В этом случае к левому краю листа обязательно прилегает ряд Q горизонтальных заготовок (рис. 3). Область же S, ввиду неулучшаемости P, обязана быть заполнена наилучшим образом, что снова дает раскрой, удовлетворяющий теореме 3.

СЛУЧАЙ 3. Последняя из отрезаемых в P d-полос содержит две или более заготовок; a - нижняя из них, за каждой из них следует свой ряд R (рис. 4). Обратимся к верхнему

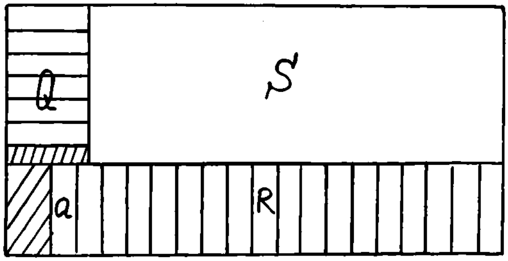

Рис. 3

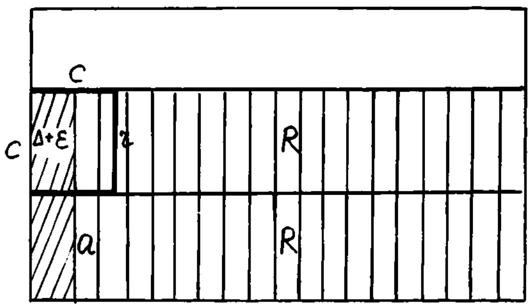

Рис. 4

из этих рядов R. Там, где он примыкает по отрезку длины c к левому краю листа, расположим квадрат $c \times c$. Этот квадрат уместится в листе, так как $c \leq \mathcal{D}$. Рассмотрим все заготовки R, задетые этим квадратом. Сдвинем набор этих заготовок влево. Набор уместится в квадрате $c \times c$, так как при понятных из рис. 4 обозначениях $\Delta + \varepsilon > d > \tau$. Затем повернем этот набор в квадрате $c \times c$ на 90°. Мы получили не худший, также выполнимый d-раскрой, в котором число рядов R на единицу меньше. Это позволяет переходить от случая 3 к случаю 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. - Новосибирск: Наука, 1971.

2. КОБЗЕВ А.В. Задача гильотинного раскроя листов на однотипные заготовки. - Дипломная работа, Новосибирский госуниверситет, 1966 г.
3. МУХАЧЕВА Э.А. Методы генерации столбцов (раскроев) в пакете "Прямоугольный раскрой". - В кн.: Использование методов оптимизации в текущем планировании и управлении производством. М.: Изд. ВНИИ системных исследований, 1980, с.234-239.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.03.1981 г.