УДК 513.8

ПОЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ОПТИМУМ ПО ПАРЕТО - СМЕЙЛУ

А.М.Вершик, А.Г.Черняков

Теория экстремальных задач всегда была тесно связана с анализом и геометрией. В 30–40-х годах эта связь проявилась в фундаментальных работах Л.В.Канторовича, где идеи двойственности, разработанные в функциональном анализе тех лет, были с успехом использованы в теории неклассических экстремальных задач.

Важная область анализа, которая в настоящее время должна активно взаимодействовать с современной теорией экстремальных задач, теорией игр, математической экономикой, - глобальный анализ и, в частности, теория особенностей. (Отметим, что реальные модели, изучаемые в этих областях, стали источником новых проблем глобального анализа, теории многозначных отображений и др.) Как ни странно, до сих пор в обширной литературе, относящейся к указанным областям математики, имеется лишь сравнительно небольшое число работ на эту тему. Среди них особо следует отметить постановочную работу С.Смейла [I] и ряд дальнейших работ того же автора и его последователей (см. список литературы), в которых впервые сделана попытка систематически использовать идеи современного глобального анализа для исследования теоретико-игровых динамических проблем математической экономики. Отметим также работы школы В.И.Арнольда на близкие темы (особенности выпуклых оболочек, локальная структура функций максимума и др., см. [2, 3]).

Между тем, глобальная и инвариантная постановка задач оптимального управления и экономической динамики и привлечение соображений общего положения диктуется характером и сложностью задач, а также необходимостью сблизить эту теорию с классическим вариационным исчислением и динамикой. Естественность такого подхода обусловлена еще и тем, что при определенных предположениях гладкости рассматриваемые в теории игр и математической экономике оптимумы (в том числе и такие понятия, как оптимальность по Парето и Нэшу) естественно интерпретировать как критические (в том или ином смысле) точки "многозначных сечений" векторных расслоений, значениями которых служат многогранники, конусы или близкие объекты. Возможно, одним из узловых глобальных понятий в этой связи является понятие общего гладкого поля многогранников или конусов. На желательность разработки его для нужд теории экстремальных задач обращалось внимание в [4].

В настоящей статье мы даем определение и начинаем изучение таких полей. В качестве основного приложения в работе доказывается гипотеза Смейла [1] о том, что для типичной гладкой вектор-функции множество критических по Парето точек есть многообразие с углами (см. также [5,6]).

К той или иной форме понятия поля многогранников приводят почти все известные нам постановки задач в упомянутых ранее разделах математики: Парето-оптимум (поле субдифференциалов), оптимальное управление на многообразиях (в постановке задачи в контингенциях), параметрическое выпуклое программирование, исследование функции максимума, неголономная механика с нелинейными ограничениями. Наконец, для гладкой экономической динамики и собственно теории выпуклых многогранников это понятие является исходным.

Перейдем к более подробному описанию содержания статьи. Мы говорим, что в векторном расслоении E на многообразии X задано поле многогранников, если каждой точке $x \in X$ поставлен в соответствии многогранник $V_x \subset E_x$, и завимость V_x от x в том или ином смысле гладкая (см. определения в §I и приложении). В качестве начальных примеров полей многогранников приведем здесь лишь два.

I. Пусть на многообразии X задано m гладких функций; рассмотрим в кокасательном расслоении T^*X поле, у которого

в слое над точкой $x \in X$ задан многогранник $co(d_x \varphi_1, \ldots, d_x \varphi_m)$. Это поле - поле субдифференциалов функции $max(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ - необходимо для изучения оптимальности по Парето.

2. Пусть $G(n,m)$ - многообразие Грассмана и $E(n,m)$ - каноническое (или тавтологическое) расслоение над ним (т.е. векторное расслоение, слой которого над точкой $x \in G(n,m)$ есть x как векторное пространство в R^n). В качестве V_x возьмем проекцию на плоскость x стандартного симплекса в R^n. Этот пример рассматривался ранее первым автором для нужд теории выпуклых многогранников как вариант пространства многогранников.

При изучении таких полей встает ряд проблем аналитического и топологического характера. К числу первых можно отнести задачу изучения особых точек полей многогранников. Понятие "особой точки" в различных задачах различно. Более точно, возникающая здесь проблема состоит в выяснении структуры множества тех точек многообразия, в которых значение поля - многогранник - обладает тем или иным заданным свойством или претерпевает перестройку комбинаторного типа. Приведем типичный для подобных задач пример, относящийся к доказательству гипотезы Смейла. Исходным пунктом доказательства является переход от задачи в формулировке Смейла (поле многогранных конусов) к двойственному (в определенном смысле) объекту - полю субдифференциалов функции максимума. Точки Парето-оптимума есть точки, в которых ноль принадлежит субдифференциалу. Их мы и будем называть особыми или критическими для поля субдифференциалов. Задача сводится к двум пунктам: I) изучению подмножества многогранников, содержащих ноль в каноническом расслоении (т.е. модели); 2) применению общей теоремы о "спуске" стратификации или структуры многообразия с углами из расслоения струй в базу.

Изучение модели ("локальная" теория) сводится к исследованию канонического поля на многообразии Грассмана (см. выше) и его особых точек, т.е. тех, для которых соответствующий многогранник содержит ноль. Это изучение проводится в §2. Второй из упомянутых пунктов - глобализация обосновывается в §3 с помощью теоремы, являющейся обобщением теоремы Тома о трансверсальности. Основной технический аппарат связан с понятием стратификации и его частным случаем - понятием многообразия с углами. (Многообразие с углами, по Мезеру, локально

устроено как $R^m_+ \times R^n$.) Доказательство того факта, что множество особых точек поля субдифференциалов есть многообразие с углами, проходит по схеме Тома – Мезера: особые точки составляют прообраз некоторого стандартного для данной задачи подмножества в расслоении струй. Мы не определяем здесь понятий, связанных со стратификацией, однако везде выделяем наглядный и основной для нас случай многообразия с углами.

По той же схеме, что и доказательство гипотезы Смейла, можно проводить и исследование других, обсуждавшихся ранее во введении вопросов; в §4 мы используем ее для изучения задачи параметрического линейного программирования.

Вернемся к общему понятию поля многогранников. Всюду в работе рассматриваются два параллельных определения (см. §I): проективного и индуктивного полей. Они более или менее соответствуют реализации выпуклого многогранника в виде сечения (индуктивные поля) или проекции (проективные поля) симплекса. Для таких полей универсальными объектами будут служить поля на многообразии Грассмана.

Теория полей многогранников может строиться по образцу теории векторных расслоений (и здесь возникает ряд топологических задач). В приложении намечается такой путь. Для этого вводятся универсальные объекты, а затем определяется понятие индуцированного поля многогранников. Этот подход открывает путь для введения в теорию понятий, аналогичных принятым в классической теории векторных расслоений, вплоть до характеристических классов и K-функтора. Существование в касательном расслоении на многообразии X поля многогранников заданного комбинаторного типа налагает некоторые условия на само многообразие X, поскольку оно равносильно существованию глобального сечения некоторого специального "ассоциированного" расслоения, слой которого над точкой $x \in X$ есть пространство многогранников данного типа в $T_x X$. Хотя в выпуклой геометрии изучались различные комбинаторные типы многогранников и конусов (см., например, [7]), нет сведений о топологии (гомотопических группах и т.д.) пространств многогранников данного типа. В приложении приводится несколько простейших примеров, здесь же даны и точные постановки возникающих в этой связи задач.

Настоящая работа является первой из предполагаемой серии

работ о полях выпуклых многогранников, их особенностях и применениях.

§I. Проективные и индуктивные поля многогранников

I.0. Все встречающиеся в работе многообразия, расслоения, отображения многообразий, морфизмы и сечения расслоений имеют класс гладкости C^∞.

Пусть E – вещественное векторное расслоение с базой X, $V \subset E$, и для любого $x \in X$ множество $V_x = V \cap E_x$ многогранное. Упорядоченная пара (E, V) называется полиэдральным семейством над X (или с базой X). Будем говорить также, что V – полиэдральное семейство в расслоении E. Ниже мы рассмотрим два важных класса полиэдральных семейств. Эти классы находятся в двойственности, и каждый из них выделяется некоторым дополнительным условием, имеющим смысл гладкой зависимости многогранного множества V_x от точки x.

I.I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть W – многогранное подмножество в R^m, F^m_X (или просто F^m) – тривиальное векторное расслоение $X \times R^m$. Подмножество $W_X = X \times W$ пространства F^m_X называется тривиальным полиэдральным семейством со слоем W. Иногда, если это не приводит к недоразумениям, мы пишем W вместо W_X.

I.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полиэдральное семейство (E, V) с базой X называется проективным полиэдральным полем, если существует такое тривиальное полиэдральное семейство (F^m_X, W_X) и такой морфизм $f: F^m \to E$ векторных расслоений, что $V = f(W_X)$. В этом случае мы говорим, что проективное поле V порождено многогранным подмножеством W, а также что W является моделью поля V. Если моделью поля служит многогранник, конус, аффинное подпространство, то поле называется соответственно полем многогранников, конусов, аффинных подпространств... Совокупность всех проективных полей над X, порожденных множеством W, обозначается через $\mathcal{P}_X(W)$ (или $\mathcal{P}_{X,E}(W)$, если объемлющее расслоение E фиксировано). Если модель – стандартный $(m-1)$-мерный симплекс T^{m-1} в R^m, то для $\mathcal{P}_X(T^{m-1})$ мы используем также обозначение $\mathcal{P}_X(m)$. Положим $\mathcal{K}_X(m) = \mathcal{P}_X(R^m_+)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку любой многогранник представим в виде проекции симплекса, любое проективное поле многогранников является элементом множества $\mathcal{P}(1) \cup \mathcal{P}(2) \cup \ldots$ Аналогично, поля

конусов - это элементы множества $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}(m)$. Кроме того, $\mathcal{P}(1) \subset \mathcal{P}(2) \subset \cdots$, $\mathcal{K}(1) \subset \mathcal{K}(2) \subset \cdots$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^{\infty}(X, E)$ - глобальные сечения расслоения E. Полиэдральное семейство V, для которого $V_x = co_{E_x}(s_1(x), \ldots, s_m(x))$, называется выпуклой оболочкой сечений $s_1, \ldots, s_m$ и обозначается через $co_E(s_1, \ldots, s_m)$. Аналогично определяется коническая оболочка $cone_E(s_1, \ldots, s_m)$ сечений.

1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Полиэдральное семейство является проективным полем многогранников из $\mathcal{P}(m)$ (конусов из $\mathcal{K}(m)$) в том и только в том случае, когда оно представимо в виде выпуклой (конической) оболочки m глобальных сечений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если (E, V) - образ тривиального полиэдрального семейства (F_X^m, W_X) относительно морфизма f, а $t_1, \ldots, t_m$ - сечения расслоения F^m, соответствующие вершинам многогранника W, то $V = co_E(ft_1, \ldots, ft_m)$.

Обратно, пусть $V = co_E(s_1, \ldots, s_m)$. Рассмотрим тривиальное семейство (F_X^m, T^{m-1}). Построим морфизм $f: F^m \to E$, который i-му элементу стандартного базиса слоя F_x^m ставит в соответствие вектор $s_i(x) \in E_x$. Ясно, что $V = f(T^{m-1})$.

Проективные поля многогранников выдерживают аффинные преобразования и операцию прямого произведения.

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полиэдральное семейство (E, V) с базой X называется индуктивным полиэдральным полем, если существуют тривиальное полиэдральное семейство (F_X^m, W_X) (причем $0 \in W$) и морфизм $f: E \to F^m$, для которых $V = f^{-1}(W_X)$.

1.6. Двойственность проективных и индуктивных полей. Для любого полиэдрального семейства (E, V) определено полярное семейство (или поляра) (E^*, V°). По определению, $(V^\circ)_x = (V_x)^\circ$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Поляра к проективному (соответственно индуктивному) полиэдральному полю с моделью W является индуктивным (соответственно проективным) полем с моделью W°. Любое индуктивное поле есть поляра некоторого проективного поля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение немедленно вытекает из следующего утверждения. Пусть $A: E \to F$ - линейное отображение конечномерных вещественных векторных пространств, V, W - многогранные подмножества в E и F соответственно, причем $0 \in W$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(A(V))^{\circ} = A^{*-1}(V^{\circ}),$$

$$(A^{-1}(W))^{\circ} = A^{*}(W^{\circ}).$$

Проверка этих равенств проводится при помощи стандартных рассуждений теории двойственности.

Обозначим через $\mathcal{P}^{u}_{X}(W)$ множество всех индуктивных полей с моделью W (напомним, что $0 \in W$). Если W - многогранник, конус, то мы говорим соответственно об индуктивных полях многогранников или конусов. Предложение I.6 показывает, что $\mathcal{P}^{u}_{X}(W) = (\mathcal{P}_{X}(W^{\circ}))^{\circ}$. Для любого многогранного множества W, не обязательно содержащего ноль, во всяком случае имеет место включение $(\mathcal{P}(W))^{\circ} \subset \mathcal{P}^{u}(W^{\circ})$.

I.7. Введем следующие определения. Пусть $(E,V), (E',V')$ - полиэдральные семейства над X и $f: E \to E'$ - такой эпиморфизм расслоений, что $W = f(V)$. В этом случае мы говорим, что f - эпиморфизм полиэдральных семейств или что (E',V') является эпиморфным образом семейства (E,V). Если f - мономорфизм расслоенийи $V = f^{-1}(V')$, то f называется мономорфизмом или вложением полиэдрального семейства (E,V) в семейство (E',V').

Пусть m, n - натуральные числа, $m \leqslant n$ и $T^{m-1,n}$ - $(m-1)$-мерный симплекс, натянутый на m первых базисных векторов в R^{n} $(T^{m-1} = T^{m-1,m})$, $K^{m,n}$ - коническая оболочка $T^{m-1,n}$.

Следующие предложения являются аналогом известного утверждения о том, что любое векторное расслоение можно дополнить прямым слагаемым до тривиального.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. I) Любое проективное поле многогранников $(E,V) \in \mathcal{P}_{X}(m)$ является

эпиморфным образом некоторого тривиального полиэдрального семейства $(F^n_X, T^{m-1,n}_X)$.

2) Любое проективное поле конусов из $\mathcal{K}_X(m)$ является эпиморфным образом поля $(F^n_X, K^{m,n}_X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению проективного поля найдется такой морфизм $f: F^m_X \to E$, что $V = f(T^{m-1})$. Построим эпиморфизм $\rho: F^K \to E$ (который всегда существует, см., например, [8], гл.4, теорема 3.3). Очевидно, что V является образом тривиального поля $T^{m-1,m+K}$ относительно эпиморфизма $f+\rho: F^m \oplus F^K \to E$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любое индуктивное поле многогранников (соответственно конусов) вкладывается в тривиальное поле $(F^n, (T^{m-1,n})^o)$ (соответственно $(F^n, (K^{m,n})^*)$).

I.8. ЗАМЕЧАНИЯ. а) Классы проективных и индуктивных полей находятся в общем положении, т.е. ни один из них не включает другой.

б) Все утверждения, относящиеся к полям многогранников, имеют аналоги для полей конусов. Мы не останавливаемся на подобных переформулировках, хотя в определенном смысле "коническая" теория более симметрична, чем "многогранная".

Перейдем к описанию фундаментальных примеров.

I.9. Пример. Проективное грассманово поле многогранников. На грассмановом многообразии $G(n,m)$ всех m-мерных плоскостей в R^n рассмотрим каноническое расслоение $E(n,m)$. (Слой над точкой $x \in G(n,m)$ есть подпространство $x \subset R^n$; по поводу определений см., например, [9].) Пусть F^n - тривиальное расслоение с базой X и слоем R^n, $\pi_{n,m}: F^n \to E(n,m)$ - каноническая проекция, T^{n-1} - стандартный симплекс в R^n. Проективное поле многогранников $\pi_{n,m}(T^{n-1})$ над $G(n,m)$ назовем каноническим и обозначим через $T(n,m)$. Если $x \in G(n,m)$, то $T(n,m)_x$ - это проекция T^{n-1} на m-мерную плоскость x. Аналогично определяется каноническое проективное поле конусов над $G(n,m)$: $K(n,m) \overset{def}{=} \pi_{n,m}(R^n_+)$.

I.10. ПРИМЕР. Индуктивное грассманово поле конусов. Пусть $i_{n,m}: E(n,m) \to F^n$ - каноническое вложение. Каноническим индуктивным полем конусов назовем поле $K^u(n,m) \overset{def}{=} i^{-1}_{n,m}(R^n_+)$.

Иными словами, для $x \in G(n,m)$ имеем $K^n(x) = R^n_+ \cap x$. Пусть $\varphi: F^n \to F^{n*}$ - канонический изоморфизм. Композиция $\varphi^{-1} \circ \pi^*$ изоморфно отображает двойственное к $E(n,m)$ расслоение $E^*(n,m)$ на $E(n,m)$. При этом изоморфизме $K^*(n,m)$ переходит в $K^n(n,m)$.

I.II. ПРИМЕР. Более общим образом с каждым многогранным подмножеством $W \subset R^n$ можно связать проективное поле $\pi_{n,m}(W)$ и индуктивное поле $i^{-1}_{n,m}(W)$ (если $0 \in W$) над $G(n,m)$. Эти поля естественно называть соответственно полем проекций и полем сечений множества W над грассмановым многообразием $G(n,m)$. В частности, полезным объектом для геометрии Минковского является поле $i^{-1}_{n,m}(I^n)$ сечений куба.

I.I2. ПРИМЕР. Рассмотрим теперь тривиальные расслоения F^n_X и F^m_X (см. п.II) над пространством $m \times n$ -матриц $X = Hom(n,m)$ и построим морфизм $g: F^n \to F^m$, который в слое над оператором A совпадает с A. Определим семейства многогранников $P = P(n,m)$ и $P^T = P^T(n,m)$ в F^n и F^m соответственно. По определению, P_A, где $A \in Hom(n,m)$, есть выпуклая оболочка строк матрицы A, а P^T_A - выпуклая оболочка ее столбцов. Ясно, что $P = g^*(T^{m-1})$, $P^T = g(T^{n-1})$ и, следовательно, $P \in \mathcal{P}(m)$, $P^T \in \mathcal{P}(n)$. Рассмотрев коническую оболочку вместо выпуклой, мы получим проективные поля конусов $C(n,m) = g^*(R^m_+)$ и $C^T(n,m) = g(R^n_+)$. Поле $P(n,m)$ (соответственно $C(n,m)$) называется каноническим проективным полем многогранников (конусов) над $Hom(n,m)$. Заметим, что $C^*(n,m) = g^{-1}(R^m_+)$ (F^n отождествляется с примерами пп.I.8 и I.9).

Перечисленные поля играют основную роль в общей теории выпуклых многогранников и связанных с нею вопросах теории особенностей. В частности, мы вернемся к ним в связи с доказательством гипотезы Смейла.

I.I3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\varphi: X \to Y$ - гладкое отображение, E - векторное расслоение над Y, V - полиэдральное семейство в E. Обозначим через $\bar\varphi E$ индуцированное расслоение над X (см., например, [8]), $\Phi_\varphi: \bar\varphi E \to E$ - канонический морфизм над φ. Положим $\bar\varphi V = \Phi^{-1}_\varphi(V)$. Полиэдральное семейство $(\bar\varphi E, \bar\varphi V)$ будем называть индуцированным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Полиэдральное семейство, индуцированное проективным (индуктивным) полем, само являет-*

ся проективным (индуктивным) полем.

I.I4. Здесь мы докажем, что поля многогранников и конусов могут быть индуцированы каноническими полями проекций или сечений на грассмановых многообразиях. Обозначим через $T^{m-1}(n,k)$ поле проекций множества $T^{m-1,n}$ (определенного в п.I.7) над грассмановым многообразием $G(n,k)$ (см. пример п.I.II), а через $T^{m-1}(n,k)^{\circ}$ - поле сечений поляры $(T^{m-1,n})^{\circ}$. Как и в примере п. I.I0, индуктивное поле $T^{m-1}(n,k)^{\circ}$ канонически изоморфно поляре поля $T^{m-1}(n,k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любое проективное поле многогранников из $\mathcal{P}(m)$ индуцировано полем $(E(n,k), T^{m-1}(n,k))$ для некоторого k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения п.I.7 существует эпиморфизм $f: (F^n T^{m-1,n}) \to (E,V)$. Пусть $E' = \ker f$ и $g: E \to F$ - расщепляющее отображение в точной последовательности расслоений

$$0 \to E' \to F^n \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E \to 0$$

(g_x изоморфно отображает E_x на $(\ker f_x)^{\perp}$). По вложению g построим классифицирующее (в классическом смысле) отображение $\varphi_g : X \to G(n,k)$, где $k = \dim E_x$. Как легко видеть,

$$(E,V) \cong (\bar{\varphi}_g E(n,k), \bar{\varphi}_g T^{m-1}(n,k))$$

(точнее, $\bar{\varphi}_g T^{m-1}(n,k)$ переходит в V при каноническом изоморфизме $\bar{\varphi}_g E(n,k) \xrightarrow{\sim} E$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любое индуктивное поле многогранников индуцировано некоторым стандартным полем $(E(n,k), T^{m-1}(n,k)^{\circ})$.

§2. Многообразия с углами и особые точки канонических полей

2.0. Пусть X - гладкое n-мерное многообразие, A - подмножество X. Всюду в дальнейшем под стратификацией множества A мы понимаем гладкую престратификацию Уитни в смысле работы [I0]. Особую роль в дальнейшем будут играть стратифицированные подмножества специального вида - так называемые подмногообразия с углами.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $p, q, n \in Z_+$, $p+q \leq n$. Положим
$$C(p,q,n)=\{(x_1,\dots,x_n)\in R^n \mid x_1=\dots=x_p=0,\ x_{p+1}\geq 0,\dots,x_{p+q}\geq 0\}.$$
Множество $C(p,q,n)$ назовем (p,q)-углом в R^n. С каждым (p,q)-углом в R^n связаны два линейных подпространства в R^n:

$L(p,q,n)=\{x\in R^n \mid x_1=\dots=x_p=0\}$ – наименьшее линейное подпространство, содержащее $C(p,q,n)$,

$\ell(p,q,n)=\{x\in R^n \mid x_1=\dots=x_{p+q}=0\}$ – наибольшее линейное подпространство, содержащееся в $C(p,q,n)$.

Пересечение (p,q)-угла с координатными подпространствами в R^n называется его гранями. Каждая грань (с точностью до перенумерации координат) является (p',q')-углом в R^n, причем $p'\geq p$, $q'\leq q$. Наконец, размерностью (p,q)-угла называется размерность пространства $L(p,q,n)$ или, что то же самое, размерность $C(p,q,n)$ как топологического многообразия с краем. Таким образом, $\dim C(p,q,n)=n-p$.

2.2. Подмногообразия с углами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x\in A$. Будем говорить, что точка x является (p,q)-углом множества A в X, если найдется такая карта $\varphi: U\to V$ многообразия X, заданная в некоторой окрестности U точки x, что $\varphi(x)=0$ и $\varphi(U\cap A)=V\cap C(p,q,n)$. Положим $n_\varphi(x)=\dim \ell(p,q,n)=n-p-q$; число $n_\varphi(x)$ не зависит от выбора карты φ (ниже мы пишем $n(x)$ вместо $n_\varphi(x)$). Если каждая точка $x\in A$ является (p,q)-углом для некоторых p и q, то A назовем подмногообразием с углами в X. Любое подмногообразие в X является подмногообразием с углами. Образ подмногообразия с углами при диффеоморфизме есть снова подмногообразие с углами. Наконец, подмногообразия с углами являются многообразиями с углами в смысле Мезера [II].

2.3. Стратификация подмногообразия с углами. Замкнутое подмногообразие с углами можно снабдить стандартной стратификацией. Пусть $A_i=\{x\in A \mid n(x)=i\}$, $i=0,\dots,n$, $\mathcal{S}_i$ – набор связных компонент множества A_i, $\mathcal{S}=\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{S}_i$. Разбиение $\mathcal{S}$ является стратификацией множества A. Условие Уитни (b) выполнено очевидным образом; аксиома границ вытекает из предложения 8.7 работы [I0].

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть U – окрестность нуля в R^n, и $f: U\to R^m$ – гладкое ото-

бражение, $f(0)=0$. Предположим, что отображение f в точке 0 трансверсально подпространству $l(p,q,m)$. Тогда найдется такая окрестность нуля $V\subset U$, что $f^{-1}(C(p,q,m))\cap V$ - подмногообразие с углами в R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $f \pitchfork l(p,q,m)$ и $f \pitchfork L(p,q,m)$ на U. Тогда $f^{-1}(L)$ - подмногообразие в U, и нам достаточно установить, что $f^{-1}(C(p,q,m))$ - подмногообразие с углами в $f^{-1}(L)$. Иными словами, в ходе доказательства можно предполагать, что $p=0$. Если $l(0,q,m)=\{0\}$, т.е. $q=m$, то условия трансверсальности означают просто, что f - субмерсия, и заключение теоремы немедленно вытекает из известного локального описания субмерсий.

Пусть $q\neq m$. Рассмотрим каноническую проекцию

$$\rho: R^m \to R^m/l(0,q,m) \cong R^{m-q}.$$

Если $f \pitchfork l(0,q,m)$, то композиция $\rho\circ f$ является субмерсией в точке 0, и

$$f^{-1}(C(0,q,m)) = (\rho\circ f)^{-1}(R_+^{m-q}).$$

Из этого предложения и описания стандартной стратификации вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть f - гладкое отображение многообразия X в многообразие Y, B - замкнутое подмногообразие с углами в Y, $\mathcal{S}_B$ - его стандартная стратификация. Предположим, что $f \pitchfork B_i$ для любого $B_i \in \mathcal{S}_B$. Тогда $f^{-1}(B)$ - подмногообразие с углами в X и стандартная стратификация на $f^{-1}(B)$ совпадает с $f^*(\mathcal{S}_B)$, где $f^*(\mathcal{S}_B)$ - набор связных компонент многообразий $f^{-1}(B_i)$, $B_i\in\mathcal{S}_B$.

2.5. Особые точки проективных полей. В связи с рассматриваемой задачей Смейла удобно ввести следующее весьма специальное определение особой точки*).

---

*) Несомненно, в понятие особой точки поля можно вкладывать в зависимости от изучаемой задачи и иной смысл (см. §4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V - проективное поле многогранников над многообразием X. Назовем $x \in X$ особой точкой поля V, если $0 \in V_x$. Множество всех особых точек поля V обозначается через $\mathscr{X}_\theta(V)$.

2.6. ЛЕММА. Пусть V - конечномерное векторное пространство, $A \in Hom(V, R^m)$, π_i - ортогональная проекция R^m на i-ю координатную ось. С каждым оператором A свяжем m функционалов $A_1, \ldots, A_m \in V^*$. По определению, $A_i = \pi_i \circ A$. Наконец, через π_A обозначим ортогональную проекцию пространства R^m на $Im A$, T^{m-1} - стандартный симплекс в R^m. Следующие утверждения равносильны:

(1) $0 \in co(A_1, \ldots, A_m)$,

(2) $(Im\ A)^\perp \cap R^m_+ \neq \{0\}$,

(3) $0 \in \pi_A(T^{m-1})$,

(4) $Im\ A \cap Int\ R^m_+ = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A^*: R^m \to V^*$ - сопряженный к A оператор. Условие (1) означает, что $ker\ A^* \cap R^m_+ \neq \{0\}$, но $ker A^* = (Im\ A)^\perp$. Тем самым, эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (2) доказана.

Эквивалентность (2) $\leftrightarrow$ (3) очевидна, как и импликация (1) $\to$ (4).

(4) $\to$ (2). Воспользовавшись теоремой отделимости, найдем такой ненулевой функционал $\lambda \in (R^m_+)^*$, что $Im\ A \subset ker\ \lambda$ (иными словами, $\lambda \in ker A^*$). Существование такого функционала означает, что

$$ker\ A^* \cap (R^m_+)^* \neq \{0\}.$$

Это условие переходит в (2) при каноническом изоморфизме $(R^m)^* \to R^m$. Лемма доказана.

2.7. Особые точки канонических полей.

ЛЕММА. Множество особых точек канонического поля $T(m, m-1)$ на грассмановом многообразии $G(m, m-1)$ является подмногообразием с углами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Канонический диффеоморфизм $\Phi: G(m,m-1)\to G(m,1)\cong RP^{m-1}$ переводит множество $\Theta(T(m,m-1))$ в подмножество пространства RP^{m-1}, образованное прямыми, пересекающими R^m_+ по лучу (лемма 2.6). Пусть $\mathcal{U}_i$ - множество точек RP^{m-1} с ненулевой i-й однородной координатой, и $\varphi_i: \mathcal{U}_i\to R^{m-1}$ - стандартная карта. Ясно, что $\varphi_i(\Phi(T(m,m-1)))= R^{m-1}_+$, и тем самым лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $\Theta(T(4,2))$ особых точек канонического поля $T(4,2)$ уже не является подмногообразием с углами в $G(4,2)$. В этом можно убедиться, рассмотрев окрестность нулевой матрицы в карте, определяемой координатами Плюккера[ж)].

Следующее рассуждение устанавливает связь между каноническими полями на грассмановом многообразии и на многообразии $Hom(n,m)$.

Пусть n,m - натуральные числа, $n\geqslant m$. Обозначим через $L^i=L^i(n,m)$ подмножество в $Hom(n,m)$, состоящее из операторов коранга i. Как известно (см., например, [9]), L^i - подмногообразие в $Hom(n,m)$. Пусть $P^i=P^i(n,m)$ - сужение поля $P(n,m)$ (см. пример п.I.I2) на L^i. Рассмотрим поле многогранников $(\mathcal{J}m\, g^*_i, P^i)$ над L^i (здесь $g^*_i=g^*|_{L^i}$). Очевидно, что g^*_i - эпиморфизм поля (F^m, T^{m-1}) на $(\mathcal{J}m\, g^*_i, P_i)$. Соответствующее классифицирующее отображение $\varphi_i: L^i\to G(m,m-1)$ (см. предложение п.I.I4) ставит в соответствие оператору $A\in L^i$ точку грассманова многообразия $G(m,m-1)$, соответствующую подпространству $(\ker g^*_A)^\perp=(\ker A^*)^\perp=\mathcal{J}m\, A$. Нетрудно проверить, что для любого $i=0,1,\dots,m$ отображение φ_i является субмерсией. Поскольку $P^i=\bar{\varphi}_i\, T(m,m-1)$, имеет место равенство

$$\Theta(P_i)=\varphi_i^{-1}(\Theta(T(m-i))).$$

В частности, справедливо.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $\Theta(P')$ является подмногообразием с углами в $L^1(n,m)$.

ж) Касательный конус к $\Theta(T(4,2))$, как подмногообразию в $G(4,2)$, не является выпуклым.

§3. Теорема о спуске стратификации из расслоения в базу

3.0. Здесь мы докажем основную техническую теорему, которая позволит в дальнейшем получать различные утверждения глобального характера на основании изучения свойств некоторых стандартных объектов - моделей*).

3.1. Определение. Пусть Z - стратифицированное (в смысле Уитни) подмножество многообразия Y, $f \in C^\infty(X, Y)$. Будем говорить, что f трансверсально стратифицированному множеству Z ($f \pitchfork Z$), если f трансверсально всем его стратам.

ЛЕММА. Пусть Z - замкнутое стратифицированное подмножество в многообразии струй $J^k(X, Y)$, тогда $\{f \in C^\infty(X,Y) \mid j^k f \pitchfork Z\}$ открыто в C^∞ - топологии Уитни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображение $j^k : C^\infty(X,Y) \to C^\infty(X, J^k(X,Y))$ непрерывно, достаточно установить, что для любых C^∞-многообразий X, Y и для любого замкнутого стратифицированного подмножества Z в Y семейство $\{f \in C^\infty(X,Y) \mid f \pitchfork Z\}$ открыто (в C^1 -топологии). Пусть α и β - проекции многообразия 1-струй $J^1(X,Y)$ на X и Y соответственно. Для $y \in Z$ через $T_y Z$ обозначим касательное пространство к страту, проходящему через точку y. В пространстве $J^1(X,Y)$ рассмотрим подмножество M, состоящее из всех таких струй σ, что

(1) $\beta(\sigma) \in Z$,

(2) $d\sigma(T_{\alpha(\sigma)} X) + T_{\beta(\sigma)} Z \neq T_{\beta(\sigma)} Y$.

Для доказательства леммы достаточно установить, что M замкнуто. Рассмотрим последовательность точек $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ множества M, сходящуюся к некоторой 1-струе $\sigma \in J^1(X,Y)$, и проверим, что σ обладает свойствами (1) и (2). Включение (1)

*) Этот параграф относится к общей теории стратификации и может показаться специалисту по теории особенностей ненужным, однако, во-первых, теоремы, на которых мы основываемся в §4, в существенных моментах отличаются от имеющихся в литературе, и, во-вторых, мы хотели сделать изложение по возможности замкнутым в себе.

справедливо в замкнутости Z. Поскольку стратификация на Z локально-конечна (это условие входит в определение стратификации), проверка неравенства (2) сводится к доказательству следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\mathcal{U}, V$ — подмногообразия в R^n, удовлетворяющие условию (а) Уитни (см. [10]), $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$ — последовательность точек пространства $J^1(R^m, R^n)$, сходящаяся к σ, $\beta(\sigma_i) \in \mathcal{U}$, $\beta(\sigma) \in V$. Предположим, что для любого i

$$d\sigma_i(R^m) + T_{\beta\sigma_i}\mathcal{U} \neq R^n.$$

Тогда

(3) $d\sigma(R^m) + T_{\beta\sigma} V \neq R^n.$

Действительно, каноническое отождествление $J^1(R^m, R^n) \cong$ $\cong R^m \times R^n \times Hom(R^m, R^n)$ позволяет каждой струе σ_i, σ поставить в соответствие оператор $A_i, A \in Hom(R^m, R^n)$, причем последовательность $\{A_i\}$ сходится к A. Будем считать, что подпространства $T_{\beta\sigma_i}\mathcal{U}$ сходятся к некоторому элементу T грассманова многообразия $G(n, dim\,\mathcal{U})$ (в противном случае можно взять сходящуюся подпоследовательность). В силу условия (а) Уитни, $T_{\beta\sigma} \subset T$. Для доказательства (3) остается проверить неравенство $A(R^m) + T \neq R^n$, которое вытекает из того факта, что в пространстве $Hom(R^m, R^n) \times G(n, dim\,\mathcal{U})$ множество всех пар (A, T), для которых $Im\,A + T \neq R^n$, замкнуто.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве леммы то обстоятельство, что Z обладает стратификацией Уитни, полностью не использовалось: достаточно выполнения условия (а) Уитни (а не более сильного условия (б)).

3.2. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{U}, V$ — подмногообразия в R^n, удовлетворяющие условию (b) Уитни; $p \in V$ и $V = \bar{\mathcal{U}} - \mathcal{U}$ в некоторой окрестности точки p. Предположим, что W — подмногообразие в R^n, транстверсально пересекающее V в точке p (т.е. $p \in W \cap V$ и $T_p V + T_p W = R^n$), тогда росток в точке p множества $W \cap \mathcal{U}$ не пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема I работы [12] позволяет свести доказательство рассматриваемой леммы к проверке следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть V – плоскость в R^n, заданная уравнениями $x_{k+1}=x_{k+2}=\dots=x_n=0$, $0<k<n$, $\mathcal{U}$ – подмногообразие в R^n, пара $\mathcal{U}, V$ удовлетворяет условию Уитни (b) и $V=\bar{\mathcal{U}}-\mathcal{U}$, тогда росток в точке 0 множества $V^{\perp}\cap\mathcal{U}$ не пуст.

Пусть π – ортогональная проекция R^n на V. Проверим, что существует такая окрестность нуля N в R^n, что $\pi|_{N\cap\mathcal{U}}$ – субмерсия. Предположим, что это не так, тогда найдется такая последовательность $\{x_i\}$ точек многообразия $\mathcal{U}$, что $x_i\to 0$ и $d_{x_i}\pi|_{\mathcal{U}}=\pi|_{T_{x_i}\mathcal{U}}: T_{x_i}\mathcal{U}\to V$ не является эпиморфизмом. Можно считать, что последовательность $T_{x_i}\mathcal{U}$ сходится в $G(n,\dim\mathcal{U})$ к некоторой плоскости T. Тогда $\pi|_T$ не является эпиморфизмом, т.е. $\dim(T\cap V^{\perp})>\dim T-\dim V$. Но, в силу условия (a) Уитни, $V\subset T$. Отсюда $\dim T\geqslant \dim T\cap V+\dim T\cap V^{\perp}=\dim V+\dim T\cap V^{\perp}>\dim T$. Полученное противоречие показывает, что $\pi|_{N\cap\mathcal{U}}$ – субмерсия. Отображение $\pi|_{N\cap\bar{\mathcal{U}}}: N\cap\bar{\mathcal{U}}\to N\cap V$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.I работы [10] (обобщенная первая лемма Тома об изотопии), за исключением одного: это отображение может не быть собственным. Это приводит к тому, что построенные в доказательстве теоремы векторные поля могут не быть глобально интегрируемы. Тем не менее локальная интегрируемость сохраняется. Поэтому можно утверждать, что для некоторой окрестности N_1 нуля в R^n отображение $\pi|_{N_1\cap\bar{\mathcal{U}}}: N_1\cap\bar{\mathcal{U}}\to N_1\cap V$ задает локально-тривиальное расслоение. Слой этого расслоения над точкой ноль равен $N_1\cap\bar{\mathcal{U}}\cap V^{\perp}$. Если росток множества $\mathcal{U}\cap V^{\perp}$ в ноле совпадает с ростком пустого множества, то ввиду локальной тривиальности расслоения существует окрестность ноля, не пересекающаяся с $\mathcal{U}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3.3. Пусть E – векторное расслоение с базой X. Пространство $\Gamma^{\infty}(X,E)$ его глобальных сечений, снабженное C^{∞}-топологией Уитни (индуцированной из $C^{\infty}(X,E)$), является пространством Бэра. Напомним, что пространством Бэра называется такое топологическое пространство, в котором пересе-

чение счетного семейства открытых всюду плотных множеств (т.е. массивное подмножество) всюду плотно.

ЛЕММА (модификация теоремы трансверсальности Тома). Пусть $p: E \to X$ – векторное расслоение, $J^r(E)$ – расслоение r-струй его сечений, Z – подмногообразие в $J^r(E)$. Множество $\{s \in \Gamma^\infty(X,E) | s \pitchfork Z\}$ массивно в $\Gamma^\infty(X,E)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы трансверсальности Тома (см., например, [9], глава 2, теорема 4.9) и поэтому не приводится.

3.4. ТЕОРЕМА. Пусть E – векторное расслоение с базой X, Z – замкнутое подмножество в $J^r(E)$, снабженное стратификацией $\mathcal{Z} = \{Z^i\}_{i=1}^N$ (N – натуральное число или $+\infty$). Для $s \in \Gamma^\infty(X,E)$ через $\mathcal{Z}_s$ обозначим разбиение множества $(j^r s)^{-1}(Z) \subset X$, образованное $j^r s$-прообразами стратов из $\mathcal{Z}$. Тогда:

1) Множество $\mathcal{U} = \{s \in \Gamma^\infty(X,E) | s \pitchfork Z\}$ открыто и всюду плотно в $\Gamma^\infty(X,E)$.

2) Для любого $s \in \mathcal{U}$ разбиение $\mathcal{Z}_s$ является стратификацией Уитни множества $(j^r s)^{-1}(Z)$.

3) Имеет место неравенство

$$\operatorname{codim} (j^r s)^{-1}(Z) \geq \operatorname{codim} Z. \qquad (*)$$

Если Z содержит всюду плотный страт и $(j^r s)^{-1}(Z) = \emptyset$, то (*) превращается в равенство*).

4) Устойчивость. Если многообразие X компактно, то любое сечение $s \in \mathcal{U}$ обладает такой окрестностью $\mathcal{U}'$ в $\mathcal{U}$, что каково бы ни

---

*) Мы считаем, что для $Y \subset X$ неравенство $\operatorname{codim} Y > \dim X$ означает, что $Y = \emptyset$.

было $t \in \mathcal{U}'$ существует сохраняющий стратификацию гомеоморфизм $(j^r s)^{-1}(Z)$ на $(j^r t)^{-1}(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Множество $\mathcal{U}$ открыто в силу леммы 3.I, кроме того, $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1} \{s \in \Gamma^\infty(X,E) | j^r s \pitchfork Z^i\}$. Это обстоятельство и лемма из п.3.3 позволяют утверждать, что $\mathcal{U}$ плотно в $\Gamma^\infty(X,E)$.

2) Второе утверждение теоремы вытекает из следствия 8.8 статьи [I0].

3) Неравенство (ж) - тривиальное следствие стандартных фактов теории трансверсальных отображений. Утверждение о равенстве в (ж) вытекает из леммы п.3.2: если $j^r s(X)$ задевает множество Z, то оно задевает и его всюду плотный страт.

4) r-струйный вариант последнего утверждения теоремы является простым следствием 0-струйного и того факта, что отображение

$$j^r : \Gamma^\infty(X,E) \to \Gamma^\infty(X, J^r(E))$$

непрерывно.

В свою очередь, 0-струйный вариант четвертого утверждения теоремы доказывается почти дословным повторением рассуждения Вана (см.[I3], доказательство предложения 2, с.260).

3.5. Опишем некоторый специальный класс стратифицированных подмножеств в $J^r(E)$, который будет играть основную роль в дальнейшем. Для произвольного многообразия Y через $J^r(n,Y)$ обозначается слой над нулем канонической проекции $\alpha : J^r(R^n, Y) \to R^n$. Поскольку α - субмерсия, $J^r(n,Y)$ - гладкое многообразие, его точки - r-струи в ноле ростков гладких отображений $(R^n, 0) \to Y$. Многообразие Y стандартным образом вкладывается в $J^r(n,Y)$: образом точки $y \in Y$ служит r-струя постоянного отображения со значением y. Для произвольной группы Ли G многообразие $J^r(n,G)$ можно естественным образом снабдить структурой группы Ли; если группа G действует на многообразии Y, то это действие канонически продолжается до действия $J^r(n,G)$ на $J^r(n,Y)$.

Рассмотрим над n-мерным многообразием X расслоение E (не обязательно векторное) с типичным слоем E_0 и структурной группой G. Через $J^r(E)$ обозначим многообразие r-струй сечений расслоения E (см., например, [I4]; $L^r(n)$ - группа Ли r-струй ростков диффеоморфизмов $(R^n, 0) \to (R^n, 0)$).

Структура расслоения на E превращает $J^r(E)$ в расслоение с типичным слоем $J^r(n, E_o)$ и структурной группой $G^r(n) \overset{def}{=} = J^r(n, G) \times L^r(n)$.

3.6. Пусть Z_o – некоторое подмножество в E_o. Будем говорить, что $Z \subset E$ – локально-тривиальное подрасслоение со слоем Z_o, если для любой карты $\psi_i : E|_{\mathcal{U}_i} \to \mathcal{U}_i \times E_o$ расслоения E имеет место равенство $\psi_i(Z|_{\mathcal{U}_i}) = \mathcal{U}_i \times Z_o$. Если Z – локально-тривиальное подрасслоение в E со слоем Z_o, то Z_o инвариантно относительно G. Обратно, по любому G-инвариантному подмножеству Z_o слоя E_o можно построить локально-тривиальное подрасслоение в E со слоем Z_o.

Предположим, что множество Z_o замкнуто и снабжено стратификацией $\mathcal{Z}_o = \{Z_o^i\}_{i=1}^N$ (N – натуральное число или $+\infty$). Если стратификация G-инвариантна (т.е. каждый страт переходит в себя при преобразованиях из G), то она определяет стратификацию $\mathcal{Z}$ соотвествующего Z_o локально-тривиального подрасслоения $Z \subset E$. Действительно, G-инвариантность $\mathcal{Z}_o$ позволяет корректно определить стратификацию $\mathcal{Z}_x = \{Z_x^i\}_{i=1}^N$ каждого слоя Z_x $(x \in X)$. Положим $Z^i = \bigcup_{x \in X} Z_x^i$. Очевидно, что $\mathcal{Z} = \{Z^i\}_{i=1}^N$ – разбиение множества Z, удовлетворяющего условию (b) Уитни; локально $\mathcal{Z}$ изоморфно $\mathcal{Z}_o \times \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ открыто в X). Справедливость аксиомы границ вытекает из предложения 8.7 работы [10].

3.7. Возвращаясь к теореме п.3.4 (E – m-мерное векторное расслоение, $G \subset GL(m, R)$), заметим, что любое замкнутое подмножество Z_o в $J^r(n, R^m) = J^r(n, m) \times R^m$, снабженное $G^r(n)$-инвариантной стратификацией, определяет стратифицированное локально-тривиальное подрасслоение Z в $J^r(E)$, причем $\operatorname{codim} Z = \operatorname{codim} Z_o$, и если Z_o содержит всюду плотный страт, то и Z содержит всюду плотный страт. Таким образом, в формулировке теоремы п.3 Z можно заменить на Z_o.

Всякое $G^r(n)$-инвариантное полуалгебраическое подмножество Z_o в $J^r(n, m) \times R^m$ обладает инвариантной стратификацией (см. [13], предложение 3), позволяющей ввести стратификацию на соответствующем подрасслоении Z.

§4. Применения. Структура Парето-критического множества. Параметрические задачи линейного программирования

4.0. В этом параграфе мы продемонстрируем, как доказанные ранее теоремы работают при решении ряда конкретных задач. Основной целью параграфа является уточнение формулировки и доказательство гипотезы Смейла о структуре множества критических по Парето точек (см. [I], п.5).

4.I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – гладкое n-мерное многообразие, $\varphi : X \to R^m$ – гладкое отображение, $n \geqslant m$. Точка $x \in X$ называется критической по Парето для отображения φ , если

$$(d_x \varphi)(T_x X) \cap \mathcal{J}nt\, R^n_+ = \varnothing .$$

Совокупность всех критических точек для отображения φ обозначим через Θ_φ .

Статья Смейла [I] послужила источником целого ряда работ, посвященных изучению Парето-критического множества (см. обзор литературы в [I3]). Наиболее полные результаты в этом направлении получены Мело и Ваном. В статье Мело [6] доказано наличие стратификации (в смысле Тома) на множестве Θ_φ для отображений общего положения, заданных на многообразии без края. Ван в [I3] доказал теорему о стратифицируемости и устойчивости множества Θ_φ в специальной ситуации, возникающей при изучении экономик чистого обмена. Им же получены аналогичные результаты о структуре множества локальных оптимумов Парето как в общем случае [5,I5] , так и для специального фазового пространства экономики чистого обмена [I3]. Гипотеза Смейла о наличии структуры многообразия с углами на множестве Θ_φ при условии, что n достаточно велико по сравнению с m , по-видимому, так и не была доказана до настоящей работы.

Парето-критические точки отображения φ можно рассматривать как особые точки (в смысле §2) некоторого специального проективного поля многогранников в T^*X – градиентного поля $\nabla\varphi$ отображения φ . По определению,

$$\nabla\varphi = co_{T^*X}(d\varphi_1, \ldots, d\varphi_m).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Точка x является критической по Парето в том и только

в том случае, если $0\in(\nabla\varphi)_x$, т.е. в обозначениях §2

$$\theta(\nabla\varphi)=\theta_\varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение является очевидным следствием леммы п.2.3.

4.2. ЛЕММА. Пусть $Z(n,m)=\theta(P(n,m))$ - множество особых точек канонического поля $P(n,m)$ над $Hom(n,m)$. Тогда

1) $Z(n,m)$ - замкнутое полуалгебраическое подмножество в $Hom(n,m)$;

2) его каноническая стратификация (см. [II], с.99) содержит всюду плотный страт коразмерности $n-m+1$, являющийся открытым подмножеством в $L^1(n,m)$;

3) множество $Z^1(n,m)\overset{def}{=}Z(n,m)\cap L^1(n,m)\equiv\theta(P^1(n,m))$ есть подмногообразие с углами в $L^1(n,m)$; его стандартная стратификация (в смысле §2) высекается канонической стратификацией множества $Z(n,m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полуалгебраичность множества $Z(n,m)$ следует из теоремы Зайденберга - Тарского [I6], а его замкнутость очевидна.

Проверим, что $Z^1(n,m)$ плотно в $Z(n,m)$. Пусть $A\in Z(n,m)$ и $L=\mathcal{J}m\,A$. В силу леммы п.2.5, $L^\perp\cap R^m_+\neq\{0\}$. Если $y\in L^\perp\cap R^m_+$, $y\neq 0$, то $\hat{L}=\{x\in R^m|<x,y>=0\}$ - гиперплоскость, содержащая L. Поскольку $y\in\hat{L}^\perp$ и $y\neq 0$, лемма п.2.5 позволяет утверждать, что $\hat{L}\cap\mathcal{J}nt\,R^m_+\neq\emptyset$. Плоскость L натянута на столбцы $a_1,\dots,a_n$ матрицы A. Выберем n последовательностей $\{a^{(i)}_1\},\dots,\{a^{(i)}_n\}$ так, чтобы при каждом фиксированном i векторы $a^{(i)}_1,\dots,a^{(i)}_n$ порождали гиперплоскость $\hat{L}$, и, кроме того, для любого $j=1,\dots,n$ имеет место сходимость $a^{(i)}_j\to a_j$. Пусть $A^{(i)}$ - $n\times m$ -матрица со столбцами $a^{(i)}_1,\dots,a^{(i)}_n$. Ясно, что $A^{(i)}\to A$ в $Hom(n,m)$ и $\mathcal{J}m\,A^{(i)}=\hat{L}$ для всех i, следовательно, $A^{(i)}\in Z^1(n,m)$.

Утверждение 3) о том, что $Z^1(n,m)$ есть многообразие с углами, вытекает из следствия п.2.7.

Тот факт, что каноническая стратификация множества $Z^1(n,m)$ индуцирована из $Z(n,m)$, немедленно следует из описания канонической стратификации.

ЗАМЕЧАНИЕ. На множестве $Z(n,m)$ имеется следующая страти-

фикация геометрического происхождения. Пусть $I \subset \{1,2,\dots,m\}$, $I \neq \emptyset$, $x \in Hom(n,m)$. Обозначим через $x(I)$ матрицу, составленную из строк x, с номерами, входящими в I; $co\,x(I)$ — выпуклая оболочка строк матрицы $x(I)$ в R^n. Пусть k – натуральное число, $k < |I|$. Обозначим через $Z_{I,k}$ совокупность всех матриц $x \in Hom(n,m)$, обладающих следующими свойствами:

1) $0 \in relint\, co\,x(I)$;

2) $0 \notin relint\, co\,x(J)$ для любого $J \supsetneq I$;

3) $rang\, x(I) = k$.

Нетрудно проверить, что $Z_{I,k}$ – подмногообразия в $Hom(n,m)$ коразмерности $(n-k)(|I|-k)$ и разбиение $\mathcal{Z} = \{Z_{I,k}\}$ является стратификацией Уитни. По-видимому, эта стратификация множества $Z(n,m)$ совпадает с канонической, фигурирующей в лемме п.4.2. Ее важность обусловлена задачей изучения комбинаторного типа многогранников и конфигураций при помощи техники Гейла ([7], 5.4).

4.3. Теперь в качестве следствия теоремы п.3.4 мы немедленно получаем усиление теоремы Мело о структуре множества Парето-критических точек.

ТЕОРЕМА (Мело – Ван). В пространстве $C^\infty(X,R^m)$, $n = dim\, X \geq m$, найдется такое открытое всюду плотное подмножество $\mathcal{U}$, что для любого $\varphi \in \mathcal{U}$ совокупность $\theta(\varphi)$ Парето-критических точек отображения φ является замкнутым стратифицированным в смысле Уитни подмножеством в X. При этом, если $\theta(\varphi) \neq \emptyset$, то $dim\,\theta(\varphi) = m-1$. Предположим, что X компактно, тогда для любого отображения $\varphi \in \mathcal{U}$ найдется такая его окрестность $\mathcal{U}_\varphi$, что каково бы ни было $\psi \in \mathcal{U}_\varphi$ существует сохраняющий стратификацию гомеоморфизм $\theta(\varphi)$ на $\theta(\psi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на X тривиальное расслоение F^m. Расслоение $J^1(F^m)$ канонически изоморфно $J^1(X,R^m) = Hom(TX,R^m) \times R^m$. Множество $Z_0 = Z(n,m) \times R^m$ инвариантно

относительно структуры группы $GL(n,R)$ этого расслоения. Это обстоятельство позволяет построить в $J^1(F^m)$ локально-тривиальное подрасслоение Z со слоем Z_0 (см. п.3.6). Положим $\mathcal{U}=\{s\in\Gamma^\infty(X,F^m)|s \pitchfork Z\}$. Остается применить основную теорему и лемму п.4.2, заметив, что $\Gamma^\infty(X,F^m)\cong C^\infty(X,R^m)$, а $\theta(\varphi)=(j^1\varphi)^{-1}(Z)$.

4.4. ТЕОРЕМА (гипотеза о структуре множества Парето-критических точек). Пусть $n>2m-4$. Тогда в пространстве $C^\infty(X,R)$ найдется такое открытое и всюду плотное подмножество $\mathcal{V}$, что для любого $\varphi\in\mathcal{V}$ $\theta(\varphi)$ - замкнутое подмногообразие с углами в X, и $\dim\theta(\varphi)=m-1$, если $\theta(\varphi)\neq\emptyset$. Иными словами, в пространстве наборов функции полезности типичное подмножество состоит из таких отображений, для которых множество Парето-критических точек есть многообразие с углами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S^i - подмножество струй коранга i в $J^1(F^m)=J^1(X,R^m)$ (см., например, [9]). Предположение относительно размерности многообразия X означает, что $\dim X<\operatorname{codim} S^2$. Поэтому в пространстве $\Gamma^\infty(X,F^m)$ существует такое открытое и всюду плотное подмножество $\mathcal{W}$, что для любого $s\in\mathcal{W}$ $s(X)\cap\bigcup_{i\geq 2}S^i=\emptyset$. Положим $\mathcal{V}=\mathcal{U}\cap\mathcal{W}$. В ходе доказательства теоремы п.4.3 мы видели, что для любого $s\in\mathcal{U}$ $\theta(\varphi)=(j^1s)^{-1}(Z)$ - замкнутое стратифицированное подмножество в X. Но для всех $s\in\mathcal{V}$

$$(j^1s)^{-1}(Z)=(j^1s)^{-1}(Z\cap S^1).$$

Из леммы п.4.2 вытекает, что $Z\cap S^1$ - подмногообразие с углами в $J^1(F^m)$, а j^1s трансверсально всем стратам его канонической стратификации. Остается применить следствие п.2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уточнение формулировки теоремы п.4.4 состоит в следующем. Если для любого $x\in X$ $\operatorname{rang} d_x\varphi\geq m-1$ и $j^1\varphi\pitchfork Z$*),

---

*) Это условие, по-видимому совпадает с условиями транверсальности, предложенными Смейлом в [I]. (Формулировки в [I] не являются вполне четкими.)

то $\theta(\varphi)$ – подмногообразие с углами в X. Предположение о ранге является свойством общего положения при условии, что $n > 2m-4$ (см. [I]).

4.5. Как мы видели выше, в теории Смейла особой точкой проективного поля многогранников P естественно считать такую точку $x \in X$, что $0 \in P_x$. Однако это лишь одно из целого ряда полуалгебраических свойств многогранников, представляющих интерес в связи с задачами математической экономики, линейного программирования, теории игр. Теорема п.4.4 по существу не связана с выбором конкретного полуалгебраического свойства многогранника. Точка $x \in X$ не является критической по Парето для функции φ в том и только в том случае, если в пространстве $T_x X$ найдется такой вектор ξ, что $\partial\varphi_i/\partial\xi\,(x) > 0$ для любого $i = 1,\dots,m$ (см. определение п.4.I). С точки зрения рассматриваемой Смейлом экономической модели это означает, что в направлении ξ будут происходить "инфинитезимальные сделки". Естественное обобщение модели Смейла, имеющее прозрачную экономическую интерпретацию, состоит в следующем. Пусть $\beta \in C^\infty(X, R^m)$. Будем считать, что точка $x \in X$ не является критической для экономической динамики, определяемой парой (φ, β), если в $T_x X$ существует такой вектор ξ, что $\partial\varphi_i/\partial\xi\,(x) > \beta_i(x)$, $i = 1,\dots,m$, т.е. в точке x существует направление, в котором рост функции полезности i-го игрока больше $\beta_i(x)$. Через $\theta(\varphi,\beta)$ обозначим совокупность всех критических точек пары (φ, β). Определим индуктивное поле конусов $K(\beta)$ в расслоении F^m_X, положив $K_x(\beta) = \{v \in R^m_+ \mid \langle v, \beta(x)\rangle \geq 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Следующие утверждения равносильны:

1) $x \in \theta(\varphi, \beta)$;

2) $(d_x\varphi)^{-1}(\mathrm{Int}\, R^m_+ + \beta(x)) = \emptyset$;

3) $(\mathrm{Im}\, d_x\varphi)^\perp \cap K_x(\beta) \neq \{0\}$.

(Это предложение является обобщением леммы п.2.5 и доказывается совершенно аналогично.) Итак, в рассматриваемой задаче особой следует считать точку x, над которой проективное поле подпространств $(\mathrm{Im}\, d\varphi)^\perp$ имеет нетривиальное пересечение с индуктивным полем конусов $K(\beta)$. (В исходной модели Смейла это последнее поле тривиально и равно $(R^m_+)_X$.)

Пространством параметров в обобщенной задаче Смейла следует считать множество $C^\infty(X, R^m) \times C^\infty(X, R^m)$ пар (φ, β), снаб-

женное C^{∞}-топологией Уитни. Покажем, как теорема п.3.4 может быть использована при описании структуры множества $\theta(\varphi,\beta)$ для случаев общего положения.

Обозначим через $\mathcal{U}_{n,m}$ множество всех таких пар $(A,b)\in \in Hom(n,m)\times R^m$, что $\mathcal{J}m\, A\cap K(b)\neq\{0\}$ $(K(b)=\{x\in R^m_+ \mid \langle x,b\rangle\geqslant 0\}$. Из теоремы Зайденберга - Тарского следует, что $\mathcal{U}_{n,m}$ полуалгебраично, его замкнутость очевидна. Снабдим множество $\mathcal{U}_{n,m}$ канонической стратификацией и построим по $\mathcal{U}_{n,m}\times R^m\subset (J^1(n,m)\times R^m)\times R^m$ стратифицированное локально-тривиальное подрасслоение $\mathcal{U}$ в $J^1(F^m_X)\times F^m_X$ (см. п.3.6; пространство, стоящее справа от знака включения, - типичный слой расслоения $J^1(F^m_X)\times F^m_X$). Поднимем $\mathcal{U}$ в $J^1(F^m_X)\times J^1(F^m_X)$ при помощи отображения $id\times\pi$, где $\pi: J^1(F^m_X)\to F^m_X$ - каноническая проекция; положим $Z=(id\times\pi)^{-1}(\mathcal{U})$. Как легко видеть,

$$x\in\theta(\varphi,\beta)\Longleftrightarrow (j^1\varphi(x),\beta(x))\in\mathcal{U}\Longleftrightarrow (j^1\varphi(x),j^1\beta(x))\in Z,$$

т.е. $\theta(\varphi,\beta)=(j^1(\varphi,\beta))^{-1}(Z)$. (Здесь (φ,β) рассматривается как элемент пространства $\Gamma^{\infty}(X,F^m_X\times F^m_X)\cong C^{\infty}(X,R^m)\times \times C^{\infty}(X,R^m)$.) Теорема п.3.4, примененная к стратифицированному подрасслоению Z расслоения $J^1(F^m_X\times F^m_X)$, показывает, что для открытого всюду плотного множества $\mathcal{U}$ моделей (φ,β) совокупность $\theta(\varphi,\beta)$ обладает стратификацией Уитни и устойчива в случае компактного X. Как и в исходной задаче Смейла, $dim\,\theta(\varphi,\beta)=m-1$, если $(\varphi,\beta)\in\mathcal{U}$ и $\theta(\varphi,\beta)\neq\emptyset$ (мы считаем, что $n\geqslant m$). Следующее предложение является утверждением о модели, аналогичным лемме п.4.2.

ЛЕММА. $\mathcal{U}_{n,m}\cap(L^1(n,m)\times R^m)$ - подмногообразие с углами в $L^1(n,m)\times R^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим субмерсию $f\times id: L^1(n,m)\times R\to \to RP^{m-1}\times R^m$ $(f(A)=(\mathcal{J}m\,A)^{\perp})$. Положим $V=\{(\ell,b)\in RP^{m-1}\times \times R^m \mid \ell\cap K(b)\neq\{0\}\}$. Очевидно, что $\mathcal{U}_{n,m}\cap L^1=(f\times id)^{-1}(V)$, поэтому достаточно доказать, что V - многообразие с углами. Рассмотрим в RP^{m-1} проективную гиперплоскость $H_i=\{(\ell_1:\ldots\ell_m)\mid \ell_i=0\}$. Пусть $\psi_i:(\ell_1:\ldots:\ell_m)\to(\ell_1/\ell_i,\ldots,\ell_{i-1}/\ell_i,\ell_{i+1}/\ell_i,\ldots,\ell_m/\ell_i)$ - стандартная карта на $RP^{m-1}-H_i$. Подмножество $(\psi_1\times id)(V-H_1\times R^m)$ пространства $R^{m-1}\times R^m$ задано системой неравенств

$$\begin{cases} x_2 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0, \\ b_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_m x_m \geqslant 0 \end{cases}$$

($x_2, \ldots, x_m$ – координаты в $R^{m-1} = \mathcal{J}m\,\psi$), т.е. является прообразом положительного конуса в R^m относительно субмерсии $(x_2, \ldots, x_m, b_1, \ldots, b_m) \mapsto (x_2, \ldots, x_m, b_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_m x_m)$. Доказанная только что лемма позволяет получить аналог гипотезы Смейла.

ТЕОРЕМА. Пусть $n > 2m - 4$, тогда в пространстве $C^\infty(X, R^m) \times C^\infty(X, R^m)$ найдется такое открытое и всюду плотное подмножество $\mathcal{V}$, что для любой пары $(\varphi, \beta) \in \mathcal{V}(\varphi, \beta)$ – замкнутое подмногообразие с углами в X, и $\dim \Theta(\varphi, \beta) = m - 1$, если $\Theta(\varphi, \beta) \neq \emptyset$.

4.6. Модель Смейла относится (в наших теоремах) к полям многогранников в кокасательном или касательном расслоении. Однако вопросы, рассмотренные ранее в связи с моделью Смейла, представляют интерес и в случае полей в произвольном расслоении, в частности тривиальном. Соответствующая задача для тривиального расслоения есть просто параметрическая задача линейного программирования, где параметр пробегает многообразие. Возникающие здесь проблемы похожи на те, что появляются при решении алгебраических уравнений с коэффициентами из того или иного кольца функций на многообразии.

Просмотрим, например, вопрос о непустоте множества допустимых планов в параметрической задаче линейного программирования. Пусть $A : F_X^n \to F_X^m$ – морфизм тривиального n-мерного расслоения над X в m-мерное, т.е. гладкая функция на X со значениями в пространстве $m \times n$-матриц $(n < m)$; $\beta \in C^\infty(X, R^m)$. Рассмотрим множество $\Theta(A, \beta)$ таких параметров $x \in X$, для которых система линейных неравенств

$$A_x v > \beta(x) \qquad (**)$$

не имеет решений. 0-струйный вариант теоремы п.3.4 позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. В пространстве задач параметрического линейного программирования, т.е. в $C^\infty(X, \mathrm{Hom}(n, m)) \times C^\infty(X, R^m)$, снабженном C^∞-тополо-

гией Уитни, найдется такое открытое всюду плотное подмножество $\mathcal{U}$, что для любой пары $(A,\beta)\in\mathcal{U}$ совокупность $\Theta(A,\beta)$ параметров $x\in X$, для которых задача (**) не имеет допустимых планов, является замкнутым стратифицированным подмножеством в X (обладающим непустой внутренностью, если $\Theta(A,\beta)\neq\neq\emptyset$). Если X компактно, то множество $\mathcal{U}$ можно выбрать так, что $\Theta(A,\beta)$ устойчиво относительно малого изменения пары (A,β) в $\mathcal{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Двойственная задача к (**) выглядит следующим образом:

$$\sup\{\langle\beta(x),p\rangle \mid p\in R^m,\ p\geqslant 0,\ A^*p=0\}\equiv M(x).$$

В силу теоремы двойственности, множество допустимых планов задачи (**) в точке x пусто тогда и только тогда, когда $M(x)= =\infty$. Поэтому теорема фактически описывает структуру множества тех x, для которых значение $M(x)$ бесконечно. Аналогичное утверждение остается верным, если заменить расслоение F_X^n на касательное. Отличие от модели Смейла здесь в том, что A не обязательно является матрицей Якоби системы функций.

Следует подчеркнуть, что в задачах параметрического программирования и оптимального управления характер множества параметров (его локальные свойства гладкости и др.), при которых решение отсутствует или обладает тем или иным фиксированным свойством, наиболее интересен и наименее изучен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы затронем геометрические вопросы, представляющие интерес как для теории полей многогранников, так и для топологии самих пространств многогранников.

I. Пространство многогранников. В основном тексте мы рассматривали некоторые канонические поля многогранников, которые в том или ином смысле можно считать аналогами пространства всех выпуклых многогранников в пространстве данной размернос-

ти с не более чем данным числом вершин. Особенно полезно поле $T(n,m)$ в каноническом расслоении над грассмановым многообразием (см. §I).

Рассмотрим пространство многогранников в его буквальном понимании. Обозначим через $Pol(n,m)$ множество всех выпуклых многогранников в R^n с не более чем m вершинами и через $pol(n,m)$ – его подмножество, образованное многогранниками, у которых ровно m вершин. Снабдим $Pol(n,m)$ метрикой Хаусдорфа:

$$\rho(A,B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|+\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^n. Нетрудно показать, что пространство $Pol(n,m)$ полно в метрике ρ, а $pol(n,m)$ открыто и всюду плотно в $Pol(n,m)$*).

Удобно ввести подмножества $Pol_0(n,m)$ и $pol_0(n,m)$, состоящие из многогранников с барицентром в нуле. Отображение $b: Pol(n,m)\to R^n$, которое ставит в соответствие многограннику его барицентр, непрерывно и позволяет построить гомеоморфизм $P\longmapsto(P-b(P),\,b(P))$ пространства $Pol(n,m)$ на $Pol_0(n,m)\times R^n$. Кроме того, в $Pol(n,m)$ и $pol_0(n,m)$ есть структура конуса относительно гомотетии (с центром в нуле) многогранников. Вершиной конуса служит многогранник, состоящий из единственной точки $0\in R^n$. Оба конуса имеют компактное сечение, в качестве которого можно взять, например, множество $Pol_{01}(n,m)$, $pol_{01}(n,m)$ многогранников диаметра I.

Рассмотрим топологические пространства $Pol(n,m)$ и $pol(n,m)$. Пусть отображение

$$Conv: Hom(R^m, R^n)\to Pol(n,m)$$

задано формулой

$$Conv(A)=co\{Ae_1,\dots,Ae_m\},$$

где $e_1,\dots,e_m$ – канонический базис в R^m. Положим $\mathcal{M}(n,m)= Conv^{-1}(pol(n,m)),\ conv=Conv|_{\mathcal{M}(n,m)},\ \mathcal{M}_0(n,m)=conv^{-1}(pol_0(n,m))$. Легко видеть, что топологическое пространство $Pol(n,m)$

---

*) Собственно, существенна лишь топология, определяемая метрикой.

является фактор-пространством пространства $n \times m$ -матриц $Hom(m,n)$ по следующему отношению эквивалентности: две матрицы эквивалентны, если выпуклые оболочки их столбцов совпадают; $conv$ – каноническая проекция в фактор-пространство. В открытом подмножестве $\mathcal{M}(n,m) \subset Hom(m,n)$ классы эквивалентности совпадают с орбитами симметрической группы $\mathfrak{S}_m$, переставляющей столбцы матриц, т.е. $pol(n,m) \approx \mathcal{M}(n,m)/\mathfrak{S}_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Отображение $conv: \mathcal{M}(n,m) \to \to pol(n,m)$ является накрытием с конечным слоем, состоящим из $m!$ точек.

СЛЕДСТВИЕ. Отображение $conv$ задает на $pol(n,m)$ структуру nm-мерного C^∞-многообразия (без края).

Топология и, в частности, гомотопические группы многообразий $pol(n,m)$ (или $pol_{01}(n,m)$) представляют большой интерес. Простейшие примеры приведены далее.

Многообразия $pol(n,m)$ можно разбить на подмножества $pol(n,m,\mathcal{T})$, соответствующие многогранникам с данным комбинаторным типом $\mathcal{T}$ (в частности, данной размерности). Топология этих подпространств особенно важна для изучения особых точек полей данных комбинаторных типов.

В общем случае прообраз элемента $M \in Pol(n,m)$ при отображении $Conv$ есть объединение $|ex\, M|!$ многогранников, не сводящихся к точке, если $M \notin pol(n,m)$. Нетрудно показать, что $Pol(n,m)$ является топологическим многообразием, гомеоморфным R^{nm}, при этом, однако, отображение $Conv$ уже не индуцирует на нем гладкой структуры и даже структуры многообразия с углами (в каком-либо приемлемом смысле). Тем не менее пространство $Pol(n,m)$ естественным образом стратифицировано: стратами служат многообразия $pol(n,k)$, $k = 1,2,\dots,m$. Другая стратификация – по размерностям, по комбинаторным типам и т.д. (см. выше). Более детальный анализ картины этой стратификации мы оставляем до другого раза.

Можно ввести двойственные пространства $Pol^*(n,m)$ ($pol^*(n,m)$) выпуклых многогранников с не более чем m (или ровно m) гранями старшей размерности. Их структура изучается аналогично. Полезно (см. §I) рассматривать пространства $Con(n,m)$ и $Con^*(n,m)$ конусов в R^n, имеющих не более m экстремальных лучей или

соответственно граней старшей размерности.

Приведем два конкретных примера.

1) Пусть $m=2$. Отображение, которое ставит в соответствие матрице $(a,-a)\in \mathcal{M}_0(n,2)$ упорядоченную пару $\left(\frac{a}{\|a\|}, \cdot \|a\|\right)$, является гомеоморфизмом $\mathcal{M}_0(n,2)$ на $S^{n-1}\times R_+$. Понятно также, что

$$pol_0(n,2)\approx RP^{n-1}\times R_+,$$

и отображение $conv$ совпадает с произведением канонического накрытия $S^{n-1}\to RP^{n-1}$ на id_{R_+}. Наконец, $pol(n,2)\approx R^n\times RP^{n-1}\times R_+$, а $Pol(n,2)\approx R^n\times con\, RP^{n-1}$.

2) Рассмотрим в $pol_0(n,m+1)$, $m\leq n$, подпространство $\Delta_0(n,m+1)$, образованное m-мерными симплексами. Поскольку вершины каждого симплекса связаны соотношением $a_1+\dots+a_{m+1}=0$, достаточно произвольным образом задать m линейно-независимых векторов в R^n (т.е. m-репер). Отсюда следует, что

$$\Delta_0(n,m+1)\approx V'(n,m)/\mathfrak{S}_{m+1}, \qquad (\text{***})$$

где $V'(n,m)$ - некомпактное многообразие Штифеля (см., например, [17]), а действие $\mathfrak{S}_{m+1}$ определяется следующим образом: поставим в соответствие реперу $(a_1,\dots,a_m)\in V'(n,m)$ набор векторов $(a_1,\dots,a_m-\sum_{i=1}^{m}a_i)$, применим к этому набору произвольную перестановку $\sigma\in\mathfrak{S}_{m+1}$ и возьмем первые m векторов; полученный репер и есть образ исходного под действием σ.

Отсюда легко заключить, что структурная группа расслоения, содержащая поле n-мерных симплексов, редуцируется к симметрической.

Формула (***) позволяет вычислять гомотопические группы пространств симплексов (в том числе и пространств $pol(n,3)$) на основании информации о гомотопических группах многообразий Штифеля. Например,

$$\pi_r(\Delta_0(n,m+1))=\pi_r(V'(n,m)) \quad \text{при } r\geq 2,$$

$$\pi_1(\Delta_0(n,m+1))=\mathfrak{S}_{m+1}, \text{ если } n>m+1.$$

2. Непрерывные поля, общее определение. В этом пункте нам понадобится небольшое видоизменение приведенного ранее понятия пространства многогранников. Пусть F - произвольное конечномерное вещественное векторное пространство, $Pol(F,m)$, $(pol(F,m))$ - топологическое пространство выпуклых многогранников в F с не

более чем (ровно) m вершинами. (Топология задана факторизацией, как это описано выше.) Ясно, что $Pol(F,m) \approx \approx Pol(n,m)$, где $n = \dim F$. Каждое линейное отображение $A: F_1 \to F_2$ индуцирует естественным образом отображение $Pol(F_1, \cdot) \to Pol(F_2, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – произвольное векторное расслоение с базой X. "Ассоциируем" с ним локально-тривиальное расслоение $Pol(E,m)$ над X. Слоем этого расслоения над точкой $x \in X$ служит пространство $Pol(E_x, m)$, а отображения перехода получаются применением функтора $Pol(\cdot, m)$ к функциям расслоения E. Аналогичным образом можно рассматривать расслоения $pol(E,m)$, $pol_0(E,m)$, $pol(E,m,\tau)$ и т.д. (Таким образом, $Pol(\cdot,m)$ превращается в функтор из категории векторных расслоений в категорию локально-тривиальных расслоений.)

Всякое семейство V многогранников (см. определение п.I.0) с не более чем m вершинами в расслоении E задает сечение расслоения $Pol(E,m)$. Если это сечение непрерывно, то семейство (E,V) называется непрерывным проективным полем многогранников над X того или иного типа (с не более чем m вершинами, ровно m вершинами и т.д.).

Если в предыдущих определениях заменить Pol на Pol^*, то мы получим понятие индуктивного поля.

Рассмотрим универсальные расслоения. Пусть $G(N,n)$ – многообразие Грассмана, $E(N,n)$ – тавтологическое расслоение на нем; $Pol(E(N,n),m)$ – соответствующее расслоение многогранников. Если E – произвольное расслоение над X, то с помощью классифицирующего отображения $f_E: X \to G(N,n)$ расслоение $Pol(E(N,n),m)$ индуцирует расслоение $Pol(E,m)$ над X.

Можно предложить простую конструкцию (не являющуюся, впрочем, специфической для данного вопроса), позволяющую индуцировать (в духе §I) сами поля многогранников при помощи некоторого стандартного объекта. Пусть π – каноническая проекция $Pol(E(N,n),m)$ на $G(N,m)$. Поднимем при помощи π расслоение $E(N,n)$ до расслоения $\tilde{E}(N,n)$ над $Pol(E(N,n),m)$. В расслоении $\tilde{E}(N,n)$ имеется выделенное (тавтологическое) поле многогранников $V(N,n,m)$. Его определение (как полиэдрального семейства) таково: для $P \in \in Pol(E(N,n),m)$ в слое $\tilde{E}(N,n)_P = E_{\pi(P)}(N,n)$ помещен сам многогранник P. Любое поле (E,V) над многообразием X

задает отображение $f_{E,V}: X \to Pol(E(N,n),m)$; по определению, $f_{E,V}(x)$ – это многогранник $V_x \subset E_x$, рассматриваемый как точка пространства $Pol(E(N,n)_{f_E(x)}, m)$. Поле (E,V) индуцировано (как полиэдральное семейство в смысле §I) полем (N,n,m) при помощи отображения $f_{E,V}$.

Мы видим, что теория полей многогранников в расслоении E становится теорией сечений в некотором "ассоциированном" с E расслоении $Pol(E,\cdot)$, и поэтому к ней приложимы обычные методы теории расслоений (препятствия к построению сечений, характеристические классы, стабилизация и др.). Специфика рассматриваемой ситуации состоит в том, что тотальные пространства расслоений не являются, вообще говоря, гладкими многообразиями. Тем не менее их можно снабдить той или иной естественной стратификацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. СМЕЙЛ С. Глобальный анализ и экономика. Оптимум Парето и обобщение теории Морса. - УМН, 1972, т.27, вып. 3, с.177-187.
2. БРЫЗГАЛОВА Л.Н. О функции максимума семейства функций, зависящих от параметров. - Функциональный анализ, 1978, т.12, вып. 1, с.66-67.
3. ЗАКАЛЮКИН В.М. Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий. - Функциональный анализ, 1977, т.11, вып.3, с.76-77.
4. ВЕРШИК А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования. - УМН, 1970, т.25, вып.5, с. 117-124.
5. WAN Y.-H. On the algebraic criteria for local Pareto optima,I.- Topology, 1977, v.16, No 1, p.113-117.
6. MELO W. de. On the structure of the Pareto set of generic mappings. - Bol. soc. Bras. Math., 1976, v.7, No 2,121-126.
7. GRÜNBAUM B. Convex polytops. - London - New York - Sydney: Interscience Publishers, 1967.
8. ХИРШ М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979.
9. ГОЛУБИЦКИЙ М., ГИЙЕМИН В. Устойчивые отображения и их особенности. - М.: Мир, 1977.
10. МЕЗЕР Дж. Стратификации и отображения. - УМН, 1972, т.27, вып. 5, с.85-118.
11. МЕЗЕР Дж. Структурная устойчивость отображений. - В кн.: Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968.

12. KUO T.-C. On Thom-Whitney stratification theory.- Math. Ann., 1978, Bd. 234, p. 97-107.

13. WAN Y.-H. On the structure and stability of local Pareto optima in a pure exchange economy.- J. Math. Econ., 1978, v.5, No 3, p. 225.274.

14. БУРБАКИ Н. Дифференцируемые многообразия. Сводка результатов. - М.: Мир, 1975.

15. WAN Y.-H. On the algebraic criteria for local Pareto optima, II. - Trans. Amer. Math. Soc., 1978, v.245, p.385-397.

16. SEIDENBERG A. A new decision method for elementary algebra.- Ann. Math., 1954, v.60, p.356-374.

17. РОХЛИН В.А., ФУКС Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.: Наука, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
26.10.1981 г.