УДК 512.25/26+513.88

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЧНОСТЬЮ В ДВУХУРОВНЕВОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Н.И.Калашникова

Многие численные методы сводятся к итерационному процессу вида

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n=0,1,2,\ldots$$

Обычно предполагается, что задача нахождения x_{n+1} по известному x_n решается точно. Это требование не может быть практически удовлетворено, потому что вычисление x_{n+1} часто требует бесконечного числа операций. Поэтому необходимо обрывать процесс нахождения x_{n+1}, т.е. искать x_{n+1} в виде

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, \gamma_n), \quad n=0,1,2,\ldots,$$

где γ_n - некоторый управляющий параметр. Например, многие задачи могут быть сведены к отысканию общей точки конечной системы выпуклых замкнутых множеств, задаваемых неравенствами вида $f_i(x) \leq 0 (i \in I)$, где $f_i (i \in I)$ - выпуклые достаточно гладкие функции. Один из методов для нахождения решения совместной системы таких выпуклых неравенств состоит в том, что строится итерационный процесс, в котором точка x_{n+1} находится как решение системы

$$\begin{cases} f_i(x_n) + (\nabla f_i(x_n), x - x_n) \leq 0 \quad (i \in I \setminus I_0), \\ f_j(x) \leq 0 \quad (j \in I_0), \\ |x - x_n|^2 - \min, \end{cases}$$

где $f_j \ (j \in I_0)$ - линейные функции. При практической реализации этого метода вспомогательная задача квадратичного программирования решается неточно, с некоторой погрешностью γ_n. Естественно, возникает вопрос, каким образом выбирать управляющий параметр γ_n. Желательно, чтобы управляющий параметр выбирался каким-нибудь оптимальным (в некотором смысле) способом, например, чтобы выбор γ_n не ухудшал существенно скорость сходимости метода или же минимизировал среднюю трудоемкость решения задачи. Предположим, что достигнутая точность η_{n+1}, соответствующая приближению $x_{n+1} = \Phi(x_n, \gamma_n)$, зависит от точности предыдущего шага итерационного процесса η_n и параметра γ_n (который в дальнейшем находится из решения некоторой задачи оптимизации). Переходя к оценкам, можем считать, что $\eta_{n+1} = \varphi(\eta_n, \gamma_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, получаем двухуровневый процесс, в котором верхний уровень - это сам итерационный процесс $x_{n+1} = \Phi(x_n, \gamma_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а нижний уровень - это задача оптимизации для определения управляющего параметра γ_n.

Класс методов математического программирования, которые по своей сути двухуровневые, достаточно широк. Такие методы рассматривают, например, Шимановский и Рущинский в [I], С.Улым в [2].

Мы будем строить задачу оптимизации нижнего уровня следующим образом. Пусть имеется некоторая функция трудоемкости шага $C(\gamma_n, \eta_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и справедлива некоторая гипотеза об оценке суммарной погрешности, т.е. гипотеза

$$\eta_{n+1} = \varphi(\eta_n, \gamma_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Задача нижнего уровня для определения γ_n будет иметь в этом случае вид

$$\begin{cases} \min\left\{\sum_{k=0}^{n-1} C(\gamma_k, \eta_k), \quad n \geq 1, \; \gamma_k \geq 0, \; k = 0, \ldots, n-1\right\}, \\ \eta_{k+1} = \varphi(\eta_k, \gamma_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \eta_n = \varepsilon. \end{cases} \tag{I}$$

Смысл сформулированной задачи состоит в том, что определяется последовательность погрешностей $\{\gamma_k\}_{k=0}^{n-1}$ и число шагов n, при которых задача верхнего уровня будет решена с погрешностью $\eta_n \leq \varepsilon$, причем суммарная трудоемкость будет минимальной.

Подробнее изучим задачу нижнего уровня при следующих предположениях относительно функции трудоемкости шага.

I. Средние ожидаемые затраты зависят только от отношения конечной и исходной погрешностей, т.е.

$$C(\gamma_n, \eta_n) = C_0(\gamma_n / \eta_n).$$

2. Справедлива аксиома аддитивности

$$C_0(q_1 \cdot q_2) = C_0(q_1) + C_0(q_2).$$

Эти гипотезы единственным образом (с точностью до постоянного множителя) определяют функции трудоемкости

$$C(\gamma_n, \eta_n) = -K \ln(\gamma_n / \eta_n),$$

где K - положительная постоянная. В дальнейшем можно считать $K=1$. Заметим, что сделанные предположения фактически означают, что значение функции $\mathcal{F}$ осуществляется итерационным процессом с линейной скоростью сходимости. Считая, что наш основной метод имеет скорость сходимости порядка $(1+\alpha)$, $0<\alpha\leq 1$, и оценку точного шага (при $\gamma_n = 0$) вида $\eta_{n+1} = \mathcal{L}\cdot\eta_n^{1+\alpha}$, рассмотрим два варианта задачи управления процессом. В первом варианте оценка метода и оценка шага складываются, т.е. $\eta_{n+1} = \mathcal{L}\eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n$. Положим $\eta_k = \mathcal{L}^{1/\alpha}\cdot\bar\eta_k$ и $\bar\gamma_k = \mathcal{L}^{1/\alpha}\cdot\gamma_k$. Тогда формула для оценок приобретает вид $\bar\eta_{k+1} = \bar\eta_k^{1+\alpha} + \bar\gamma_k$. Чтобы упростить обозначения, снова $\bar\eta_n$ и $\bar\gamma_n$ обозначим через η_n и γ_n, т.е. будем рассматривать формулу сложения

$$\eta_{n+1} = \eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n, \quad 0<\alpha\leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Все дальнейшие рассуждения удобно будет проводить не относительно параметра γ_n, а относительно параметра Δ_n, который связан с γ_n формулой $\gamma_n = \Delta_n \cdot \eta_n^{1+\alpha}$, $\alpha\in(0,1]$, $n=0,1,2,\ldots$, и решать задачу нижнего уровня (I) не относительно последовательности $\{\gamma_k\}_{k=0}^{n-1}$, а относительно последовательности $\{\Delta_k\}_{k=0}^{n-1}$. С учетом принятых нами предположений относительно функции трудоемкости шага и гипотезы о сложении погрешностей задача нижнего уровня (I) принимает вид

$$\begin{cases} \ln\left[\dfrac{\eta_0}{\varepsilon}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1+\Delta_k}{\Delta_k}\right] \to \min\limits_{\{\Delta_k\}_{k=0}^{n-1},\, n}, \\ \eta_{k+1} = (1+\Delta_k)\eta_k^{1+\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ \eta_n \leq \varepsilon. \end{cases} \qquad (2)$$

Используя известный критерий динамического программирования, получим связь между оптимальными значениями Δ_k и Δ_{k+1}. Для этого достаточно при фиксированных точностях η_k и η_{k+2} решить оптимальную задачу (2) относительно Δ_k и Δ_{k+1}. Эта задача имеет вид

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{\eta_k}{\eta_{k+2}}\cdot\frac{1+\Delta_k}{\Delta_k}\cdot\frac{1+\Delta_{k+1}}{\Delta_{k+1}}\right)-\min_{\Delta_k,\,\Delta_{k+1}}, \\ \eta_{k+1}=(1+\Delta_k)\eta_k^{1+\alpha}, \quad \eta_{k+2}=(1+\Delta_{k+1})\eta_{k+1}^{1+\alpha}. \end{cases}$$

Решая ее с помощью множителей Лагранжа, получим, что

$$\Delta_{k+1}=(1+\alpha)\Delta_k, \quad k=0,\dots,n-2,$$

а следовательно, $\Delta_k=(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0$, $k=1,\dots,n-1$. Учитывая полученное соотношение, задачу нижнего уровня можно переписать в виде

$$\begin{cases} \ln\left[\frac{\eta_0}{\varepsilon}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+(1+\alpha)^k\Delta_0}{(1+\alpha)^k\Delta_0}\right]-\min_{\Delta_0,\,n}, \\ \eta_{k+1}=\left[1+(1+\alpha)^k\Delta_0\right]\eta_k^{1+\alpha}, \quad k=0,1,\dots,n-1, \\ \eta_n\leq\varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

В задаче (3) уже только две переменные величины Δ_0 и n.

Предположим, что погрешность η_{n+1} при нахождении $x_{n+1}=\Phi(x_n,\gamma_n)$ связана с погрешностью n-го шага итерационного процесса и параметром γ_n некоторым другим, отличным от рассмотренного способом, а именно:

$$\eta_{n+1}=\sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)}+\gamma_n^2}, \quad \alpha\in(0,1], \quad n=0,1,2,\dots$$

Так же, как и выше, удобнее задачу нижнего уровня формулировать не относительно параметра γ_n, а относительно параметра Δ_n, связанного с γ_n соотношением

$$\gamma_n=\Delta_n\cdot\eta_n^{1+\alpha}, \quad \alpha\in(0,1], \quad n=0,1,2,\dots$$

Задача нижнего уровня в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \ln\left[\frac{\eta_0}{\varepsilon}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{1+\Delta_k^2}}{\Delta_k}\right]-\min_{\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1},\,n}, \\ \eta_{k+1}=\sqrt{1+\Delta_k^2}\cdot\eta_k^{1+\alpha}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1, \\ \eta_n\leq\varepsilon. \end{cases} \tag{4}$$

Как и выше, можно выяснить связь между параметрами Δ_k и Δ_{k+1} $(k=0,1,\ldots,n-2)$ в цепочке $\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1}$, являющейся оптимальным решением сформулированной задачи нижнего уровня (4). Для этого необходимо решить задачу

$$\ln \frac{\eta_0}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1+\Delta_k^2}}{\Delta_k} \cdot \frac{\sqrt{1+\Delta_{k+1}^2}}{\Delta_{k+1}} - \min_{\{\Delta_k,\Delta_{k+1}\}},$$

$$\eta_{k+2} = \sqrt{1+\Delta_{k+1}^2} \cdot \left(\sqrt{1+\Delta_{k+1}^2}\right)^{1+\alpha} \cdot \eta_k^{(1+\alpha)^2}.$$

Решив эту задачу, получим, что $\Delta_{k+1} = \sqrt{1+\alpha}\,\Delta_k$. Таким образом, Δ_{k+1} и Δ_k в цепочке $\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1}$, являющейся оптимальным решением задачи (4), связаны друг с другом формулой

$$\Delta_{k+1} = \sqrt{1+\alpha} \cdot \Delta_k, \quad k=0,1,2,\ldots,n-2,$$

а следовательно, $\Delta_k = (\sqrt{1+\alpha})^k \cdot \Delta_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Учитывая это соотношение, задачу (4) можно решать не относительно последовательности $\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1}$ и числа шагов n, а относительно Δ_0 и n. Для этого перепишем задачу (4) в виде

$$\begin{cases} \ln \left[\dfrac{\eta_0}{\varepsilon} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\dfrac{1+[(1+\alpha)^{k/2} \cdot \Delta_0]^2}{[(\sqrt{1+\alpha})^k \cdot \Delta_0]^2}} \right] - \min\limits_{\Delta_0,\, n}, \\ \eta_{k+1} = \sqrt{1+(\sqrt{1+\alpha})^{2k} \cdot \Delta_k^2} \cdot \eta_k^{1+\alpha}, \quad k=0,1,\ldots,n-1, \\ \eta_n \le \varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

Дальнейшие рассуждения будут проводиться при предположении, что число шагов n в задачах (3) и (5) достаточно велико. При этом предположении условием целочисленности числа шагов n можно пренебречь и обобщить задачи (3) и (5) на случай произвольного вещественного n.

Сначала займемся обобщением граничных условий в задаче (3). Запишем граничное условие

$$\eta_n = (1+(1+\alpha)^{n-1} \cdot \Delta_0) \cdot \eta_{n-1}^{1+\alpha} = \varepsilon$$

в виде

$$\eta_0^{(1+\alpha)^n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left[1+(1+\alpha)^i \Delta_0\right]^{(1+\alpha)^{(n-1-i)}} = \varepsilon.$$

Введем обозначение

$$Q(k) = q_0^{(1+\alpha)^k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} [1+(1+\alpha)^i \Delta_0]^{(1+\alpha)^{(k-1-i)}}, \quad k=0,1,\ldots$$

и заметим, что имеет место соотношение

$$Q(k+1) = [Q(k)]^{1+\alpha} \cdot [1+(1+\alpha)^k \Delta_0], \quad k=1,2,3,\ldots$$

В дальнейшем нам понадобится бесконечное произведение

$$\prod_{i=0}^{\infty} [1+(1+\alpha)^i x]^{1/(1+\alpha)^{i+1} \cdot x}.$$

Ниже будет показано, что оно сходится равномерно при $x \geq q$, $q>0$, т.е.

$$\prod_{i=0}^{\infty} [1+(1+\alpha)^i x]^{1/(1+\alpha)^{i+1} \cdot x} = P(x).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\bar{Q}(k) = \left[\frac{C}{P((1+\alpha)^k \cdot \Delta_0)} \right]^{(1+\alpha)^k \cdot \Delta_0}, \quad k \geq 0,$$

где C - некоторая положительная постоянная. Заметим, что функция $\bar{Q}(k)$ удовлетворяет условию

$$\bar{Q}(k+1) = [\bar{Q}(k)]^{1+\alpha} \cdot [1+(1+\alpha)^k \Delta_0].$$

Если постоянную C найти из условия

$$\left[\frac{C}{P(\Delta_0)} \right]^{\Delta_0} = q_0,$$

откуда получаем, что $C = P(\Delta_0) \cdot q^{1/\Delta_0}$, то функция

$$\bar{Q}(k) = \left[\frac{q_0^{1/\Delta_0} \cdot P(\Delta_0)}{P((1+\alpha)^k \Delta_0)} \right]^{(1+\alpha)^k \cdot \Delta_0}$$

совпадает со значениями функции $Q(k)$ при целых положительных значениях k. Кроме того, $\bar{Q}(k)$ - выпуклая функция.

В задаче (3) целевая функция

$$\ln F(k) = \ln \frac{q_0}{\varepsilon} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+(1+\alpha)^i \cdot \Delta_0}{(1+\alpha)^i \Delta_0}$$

также определена только для целых положительных k. Заметим, что функция $F(k)$ обладает свойством

$$F(k+1)=F(k)\cdot\frac{1+(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0}{(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0},\quad k=1,2,\ldots$$

Рассмотрим для $x\geq q$, $q>0$ бесконечное произведение

$$\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1+(1+\alpha)^i x}{(1+\alpha)^i x}=\tilde{P}(x)$$

(ниже мы покажем его равномерную сходимость в области $x\geq q$, $q>0$) и функцию

$$\bar{F}(k)=\frac{\bar{C}}{\tilde{P}((1+\alpha)^k\Delta_0)},$$

где $\bar{C}$ - положительная постоянная. Легко заметить, что функция $F(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{F}(k+1)=\bar{F}(k)\frac{1+(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0}{(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0},\quad k>0.$$

В качестве постоянной $\bar{C}$ возьмем ту, которая удовлетворяет условию

$$\frac{\bar{C}}{\tilde{P}(\Delta_0)}=\frac{l_0}{\varepsilon}\qquad\text{, или}\quad \bar{C}=\frac{l_0}{\varepsilon}\cdot\tilde{P}(\Delta_0).$$

Функция

$$\ln\bar{F}(k)=\ln\frac{l_0}{\varepsilon}\quad\frac{\tilde{P}(\Delta_0)}{\tilde{P}((1+\alpha)^k\Delta_0)}$$

вогнутая и совпадает с функцией $\ln F(k)$ при целых положительных значениях k . Поэтому можем в качестве обобщения целевой функции задачи (3) на все положительные значения k взять функцию

$$\ln\bar{F}(k)=\ln\frac{l_0}{\varepsilon}\quad\frac{\tilde{P}(\Delta_0)}{\tilde{P}((1+\alpha)^k\Delta_0)}.$$

Изучим теперь свойства функций $P(x)$ и $\tilde{P}(x)$. Сначала докажем равномерную сходимость произведения

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left[1+(1+\alpha)^i\Delta_0\right]^{1/(1+\alpha)^{i+1}\cdot\Delta_0}$$

при $\Delta_0\geq q$, $q>0$. Для этого достаточно рассмотреть ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i \cdot x)}{(1+\alpha)^{i+1} \cdot x}, \quad x \geq q,\ q>0,\ \alpha \in (0,1].$$

и доказать его равномерную сходимость. Заметим, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i \cdot x}{x} = 0.$$

Найдем значение $x>0$, при котором функция

$$\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i \cdot x}{x}$$

достигает своего максимума, и обозначим его через x_{max}. Для этого решим уравнение

$$\frac{\frac{(1+\alpha)^i \cdot x}{1+(1+\alpha)^i \cdot x} - 1 \cdot \ln(1+(1+\alpha)^i \cdot x}{x^2} = 0. \qquad (6)$$

Обозначим $1+(1+\alpha)^i \cdot x = y$. С помощью этого обозначения уравнение (6) переписывается в виде $e^{y-1} = y^y$, откуда

$$e^y = (e^{1/y} \cdot y)^y, \quad e = e^{1/y} \cdot y, \quad y = e/e^{1/y},$$

значит, $x_{max} \leq \frac{e-1}{(1+\alpha)^i}$. Начиная с номера $i_0 = [\log_{(1+\alpha)}[(e-1)/q]]$, функция

$$\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{x}, \quad x \geq q,\ q>0,$$

достигает максимума в точке $x_{max} \leq q$. Поэтому для $x \geq q,\ q>0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^k \cdot x}{(1+\alpha)^{k+1} \cdot x} \leq \sum_{k=0}^{i_0} \max\left\{\frac{1}{(1+\alpha)^{k+1} \cdot x_{max}}, \frac{\ln(1+(1+\alpha)^k q)}{(1+\alpha)^k \cdot q}\right\} +$$

$$+ \sum_{k=i_0+1}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^k \cdot q)}{(1+\alpha)^k \cdot q}.$$

Ряд

$$\sum_{k=i_0+1}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^k \cdot q}{(1+\alpha)^k \cdot q}$$

сходится, так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[\ln(1+(1+\alpha)^{k+1}\cdot q]\cdot(1+\alpha)^{k+1}\cdot q}{(1+\alpha)^{k+2}\cdot q\cdot \ln(1+(1+\alpha)^{k}\cdot q)} = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, бесконечное произведение

$$\prod_{i=0}^{\infty}[1+(1+\alpha)^{i}\cdot x]^{1/(1+\alpha)^{i+1}\cdot x}$$

сходится равномерно для $x \geq q,\ q>0$. Заметим, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^{i}x)}{(1+\alpha)^{i+1}\cdot x}\right) = \frac{-\ln(1+(1+\alpha)^{i}x)}{(1+\alpha)^{i+1}\cdot x^{2}} + \frac{1}{(1+\alpha)\cdot x\cdot(1+(1+\alpha)^{i}\cdot x}\,.$$

Как показано выше, ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{-\ln(1+(1+\alpha)^{i}\cdot x)}{(1+\alpha)^{i+1}\cdot x^{2}}$$

сходится равномерно при $x \geq q,\ q>0$, а ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\alpha)\cdot x\cdot(1+(1+\alpha)^{i}\cdot x}$$

сходится равномерно в силу того, что

$$\frac{1}{(1+\alpha)\cdot x\cdot(1+(1+\alpha)^{i}\cdot x} \leq \frac{1}{(1+\alpha)\cdot q\cdot(1+(1+\alpha)^{i}\cdot q)}\,.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^{i}\cdot x}{(1+\alpha)^{i+1}\cdot x}\right)$$

в области $x \geq q,\ q>0$ сходится равномерно. Поэтому $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geq q,\ q>0$ и

$$\rho'(x) = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left([1+(1+\alpha)^{i}\cdot x]^{1/(1+\alpha)^{i+1}\cdot x}\right).$$

Теперь обратимся к доказательству равномерной сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1+(1+\alpha)^{i}\cdot x}{(1+\alpha)^{i}\cdot x}$$

для $x \geq q,\ q>0$. Для этого достаточно показать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ln \frac{1+(1+\alpha)^k \cdot x}{(1+\alpha)^k \cdot x}.$$

Так как

$$\ln \frac{1+(1+\alpha)^i \cdot x}{(1+\alpha)^i \cdot x} = \ln\left(\frac{1}{(1+\alpha)^i x} + 1\right) \leq \frac{1}{(1+\alpha)^i \cdot x}$$

для $x>0$ и ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^i \cdot x}$$

сходится равномерно при $x \geq q, q>0$, то ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ln \frac{1+(1+\alpha)^i \cdot x}{(1+\alpha)^i \cdot x},$$

а значит, и

$$\prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+(1+\alpha)^i \cdot x}{(1+\alpha)^i \cdot x}$$

сходятся равномерно для $x \geq q, q>0$. Ввиду равномерной сходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{-1}{(1+(1+\alpha)^i \cdot x) \cdot x}.$$

при $x \geq q, q>0$ функция

$$\tilde{\rho}(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+(1+\alpha)^i \cdot x}{(1+\alpha)^i \cdot x}$$

непрерывно дифференцируема.

Теперь можно сформулировать обобщенную задачу для задачи (3), которая имеет вид

$$\begin{cases} \ln \dfrac{\tau_0}{\varepsilon} \dfrac{\tilde{\rho}(\Delta_0)}{\tilde{\rho}((1+\alpha)^k \Delta_0)} - \min\limits_{\Delta_0>0,\, k>0}, \\ \left[\dfrac{\tau_0^{1/\Delta_0} \cdot \rho(\Delta_0)}{\rho((1+\alpha)^k \cdot \Delta_0)}\right]^{(1+\alpha)^k \cdot \Delta_0} = \varepsilon. \end{cases} \qquad (7)$$

Прежде чем приступить к вопросу о разрешимости задачи (7), установим связь между функциями $P(x)$ и $\tilde{P}(x)$. Так как

$$\ln p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i \cdot x)}{(1+\alpha)^{i+1} \cdot x},$$

$$\ln \tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \ln \frac{1+(1+\alpha)^i \cdot x}{(1+\alpha)^i \cdot x},$$

то

$$x(\ln \tilde{p}(x))' = -(2x \ln p(x))'.$$

Введем обозначения $y=(1+\alpha)^k$, $x=\Delta_0$ и перепишем задачу (7) в виде

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \ln \tilde{p}(x) - \ln \tilde{p}(x \cdot y) - \min\limits_{x>0,y>1}, \\ f(x,y) = y \ln \gamma_0 + xy \ln p(x) - xy \ln p(xy) - \ln \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Решая эту задачу методом Лагранжа и учитывая связь между функциями $p(x)$ и $\tilde{p}(x)$, получим, что обобщенная задача (7) сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \ln \gamma_0 + x \ln p(x) = 0, \\ xy \ln p(xy) + \ln \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{8}$$

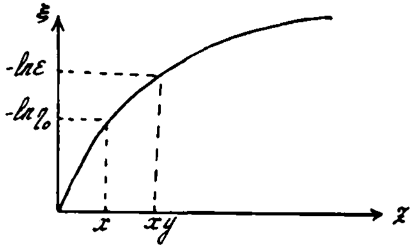
Покажем, что система уравнений (8) имеет единственное решение. Исследуем график функции $\xi = z \ln p(z), z>0$. Если $z=0$, то $z \ln p(z)=0$, кроме того, $\lim\limits_{z\to\infty} z \ln p(z) = \infty$. Так как

$$\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i z)}{(1+\alpha)^{i+1}}\right)' = \frac{1}{(1+\alpha)} \cdot \frac{1}{1+(1+\alpha)^i \cdot z} > 0,$$

то функция $z \ln p(z)$ возрастающая, а так как

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i \cdot z)}{(1+\alpha)^{i+1}} = -\frac{(1+\alpha)^{i-1}}{1+(1+\alpha)^i \cdot z} < 0,$$

то функция $z \ln p(z)$ вогнутая. График функции $\xi = z \ln p(z)$ при $z \geq 0$ имеет вид



Разрешимость системы уравнений (8) показана. Осталось показать, что единственное решение системы (8) является решением задачи (7). Для этого сделаем замену переменных $x = x$ и $z = xy$. Задача (7) перепишется в виде

$$\begin{cases} \ln \tilde{\rho}(x) - \ln \tilde{\rho}(z) \to \min\limits_{x>0,\, z>x}, \\ z \ln \eta_0 + xz \ln \rho(x) - xz \ln \rho(z) - x \ln \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение параметр t, равный $t = z\ln\eta_0 + xz\ln\rho(x)$, $t = x\ln\varepsilon + xz\ln\rho(z)$. Отсюда получаем, что

$$\dot{z}\ln\eta_0 + \dot{z}x\ln\rho(x) - \frac{zx}{2}(\ln\tilde{\rho}(x))_x \cdot \dot{x} = 1, \tag{9}$$

$$\dot{x}\ln\varepsilon + \dot{x}z\ln\rho(z) - \frac{zx}{2}(\ln\tilde{\rho}(z))_z \cdot \dot{z} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{xz}{2}\left[(\ln\tilde{\rho}(x))_x \cdot \dot{x} - (\ln\tilde{\rho}(z))_z \cdot \dot{z}\right] = -\dot{x}\left[z\ln\rho(z) + \ln\varepsilon\right] +$$

$$+\dot{z}\left[\ln\eta_0 + x\ln\rho(x)\right] = \frac{t}{x}\cdot\dot{x} + \frac{t}{z}\cdot\dot{z} = t\cdot(\ln xz)_t .$$

Видно, что для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что произведение $x(t)\cdot z(t)$ в окрестности точки $t=0$ монотонно возрастает.

Обозначим

$$A(x) = \ln\eta_0 + x\ln\rho(x), \quad B(z) = \ln\varepsilon + z\ln\rho(z).$$

Из (9) получаем, что

$$\dot{x} = \frac{1 - \dot{z}\cdot A(x)}{z(x\ln\rho(x))_x},$$

$$\dot{z} = \frac{1-\dot{x}\cdot B(z)}{x(z\ln\rho(z))_z}\ .$$

Отсюда

$$\dot{x} = \frac{x(z\ln\rho(z))_z - A(x)}{x(z\ln\rho(z))_z\cdot z(x\ln\rho(x))_x - A\cdot B},$$

$$\dot{z} = \frac{z(x\ln\rho(x))_x - B(z)}{x(z\ln\rho(z))_z\cdot z(x\ln\rho(x))_x - A\cdot B}\ .$$

Так как $A(x(0))=0$ и $B(z(0))=0$, то

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{z(0)\cdot[x(0)\cdot\ln\rho(x(0))]_x} > 0,$$

$$\dot{z}(0) = \frac{1}{x(0)\cdot[z(0)\cdot\ln\rho(z(0))]_z} > 0\ .$$

Поэтому существуют такие окрестности нуля U и V, что $\dot{x}(t)>0$ при $t\in U$ и $\dot{z}(t)>0$ при $t\in V$. Если $t\in U\cap V$, то $x\cdot\dot{z}+z\cdot\dot{x}>0$. Так как через x обозначили Δ_0, а через y обозначили $(1+\alpha)^k, \alpha\in(0,1]$, то из вида системы (8) получаем, что параметр Δ_0, а вместе с ним и управляющий параметр $\gamma_0=\Delta_0\cdot\eta_0^{1+\alpha}$ зависит только от величины начальной погрешности η_0 и не зависит от того, какой точности ε мы хотим достичь.

Аналогичные результаты легко распространяются на задачу (5), т.е. на случай, когда гипотеза о сложении погрешностей имеет вид

$$\eta_{k+1} = \sqrt{\eta_k^{2(1+\alpha)} + \gamma_k^2}, \quad k=0,1,2,\dots,\alpha\in(0,1].$$

Если заметить, что в этом случае

$$\Delta_k = (\sqrt{1+\alpha})^k\cdot\Delta_0, \quad k=1,2,3,\dots,$$

$$\prod_{i=0}^{\infty}\sqrt{\frac{1+(1+\alpha)^i\cdot\Delta_0^2}{(1+\alpha)^i\cdot\Delta_0^2}} = \sqrt{\rho(\Delta_0^2)},$$

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(\sqrt{1+(1+\alpha)^i\cdot\Delta_0^2}\right)^{1/(1+\alpha)^{i+1}\cdot\Delta_0^2} = \sqrt{\tilde{\rho}(\Delta_0^2)},$$

то в качестве обобщенной задачи для задачи (5) можно взять следующую:

$$\begin{cases} \ln \frac{\eta_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\tilde{\rho}(\Delta_0^2)}{\tilde{\rho}((1+\alpha)^k \Delta_0^2)}} - \min_{\Delta_0>0,\, k>0}, \\ \left[\eta_0^{1/\Delta_0^2} \cdot \sqrt{\frac{\rho(\Delta_0^2)}{\rho((1+\alpha)^k \Delta_0^2)}} \right]^{(1+\alpha)^k \Delta_0^2} = \varepsilon . \end{cases} \qquad (10)$$

В этом случае положим $x=\Delta_0^2,\ y=(1+\alpha)^k$. Задачу (10) перепишем в виде

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \ln \tilde{\rho}(x) - \ln \tilde{\rho}(xy) - \min_{x>0,\, y>1}, \\ f(x,y) = y \ln \eta + \frac{xy}{2} \ln \rho(x) - \frac{xy}{2} \ln \rho(xy) - \ln \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Таким образом, этот случай сводится к предыдущему заменой $\ln \eta_0$ на $2\ln \eta_0$ и $\ln \varepsilon$ на $2 \ln \varepsilon$.

Рассмотренный в данной статье двухуровневый метод применялся для решения следующей задачи: найти точку $x^* \in R^q$, удовлетворяющую системе неравенств $f_i(x) \le 0\ (i \in I)$, где f_i $(i \in I)$ – непрерывно дифференцируемые вещественные функции, заданные на R^q, линейные при $i \in I_0$. Строится итерационный процесс. В последовательности $\{x_n\}$ в качестве x_{n+1} бралось решение задачи

$$\begin{cases} f_i(x_n) + (\nabla f_i(x_n),\ x - x_n) \le 0 & (i \in I \setminus I_0), \\ f_j(x) \le 0 & (j \in I_0), \\ \|x - x_n\| - \min . \end{cases} \qquad (11)$$

На каждом шаге система (11) решалась с некоторой погрешностью γ_n.

Прежде всего рассмотрим вопрос о вычислении функции

$$x \ln \rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^k \cdot x)}{(1+\alpha)^{k+1}} .$$

Заметим, что

$$\frac{\ln(1+(1+\alpha)^k \cdot x)}{(1+\alpha)^{k+1}} = \frac{k \ln(1+\alpha)}{(1+\alpha)^{k+1}} + \frac{\ln x}{(1+\alpha)^{k+1}} + \frac{\ln(1+(1+\alpha)^{-k} \cdot \frac{1}{x})}{(1+\alpha)^{k+1}} .$$

Поэтому при достаточно малых x считаем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^k \cdot x)}{(1+\alpha)^{k+1}},$$

а при достаточно больших x считаем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\ln(1+\alpha)}{(1+\alpha)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+\alpha)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^{-k} \cdot \frac{1}{x})}{(1+\alpha)^{k+1}}.$$

В программе предполагалось, что управляющий параметр γ_0 зависит от параметра Δ_0, погрешности η_0 и константы $\mathcal{L}_0$. По известной начальной погрешности η_0 параметр Δ_0 находится как решение уравнения

$$\ln(\mathcal{L}_0 \eta_0) + \Delta_0 \ln \rho(\Delta_0) = 0 \qquad (12)$$

или уравнения

$$\ln(\mathcal{L}_0 \eta_0) + \frac{1}{2}\Delta_0^2 \ln \rho(\Delta_0^2) = 0 \qquad (13)$$

в зависимости от того, какую гипотезу об оценке суммарной погрешности $\varphi(\eta_n, \gamma_n)$ мы приняли, т.е.

$$\varphi(\eta_n, \gamma_n) = \eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n$$

или

$$\varphi(\eta_n, \gamma_n) = \sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)} + \gamma_n^2}.$$

Задавшись произвольным x_0, решаем систему (11) с погрешностью $\gamma_0 = \mathcal{L}_0 \Delta_0 \eta_0^{(1+\alpha)}$, находим точку $x_1 \in R^q$. Теоретически ожидаемая погрешность определяется по формулам

$$\eta_1^* = \mathcal{L}_0 \eta_0^{1+\alpha} \cdot (1+\Delta), \quad \text{если } \varphi(\eta_n, \gamma_n) = \eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n,$$

и

$$\eta_1^* = \mathcal{L}_0 \eta_0^{1+\alpha} \cdot \sqrt{(1+\Delta_0^2)}, \quad \text{если } \varphi(\eta_n, \gamma_n) = \sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)} + \gamma_n^2}.$$

Фактически полученную погрешность обозначим через η_1.

Предлагается следующий способ пересчета константы $\mathcal{L}_0$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \frac{\eta_1}{\eta_0^{1+\alpha} \cdot (1+\Delta_0)}, \quad \text{если } \varphi(\eta_n, \gamma_n) = \eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n,$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \frac{\eta_1}{\eta_0^{1+\alpha} \cdot \sqrt{1+\Delta_0^2}}, \quad \text{если } \varphi(\eta_n, \gamma_n) = \sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)} + \gamma_n^2}.$$

В качестве новой константы $\mathcal{L}_1$ предлагается взять

$$\mathcal{L}_1 = (1-\varepsilon)\mathcal{L}_0 + \varepsilon\tilde{\mathcal{L}}_0 ,$$

ε – достаточно мало.

В качестве примера решалась система уравнений

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + (x_1 - x_4)^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 - 19,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1 - x_2)^2 + 13x_3^2 - 26,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)^2 + 18{,}1x_1 + 12x_2 + 5x_4^2 - 143,$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3(x_1 - x_2 + 2x_4)^2 - 0{,}5x_3 - 50,$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 12(x_1 + x_2)x_3 + 21x_4^2 - 125.$$

Начальная точка $x_0 = (5,5,5,5)$, в формуле пересчета гипотезы $\mathcal{L}_n$ полагалось $\varepsilon = 0{,}1$, в качестве $\mathcal{L}_0$ бралось $\mathcal{L}_0 = \dfrac{0{,}9}{\max\limits_{i=\overline{1,5}}\{|f_i(x_0)|\}}$, α полагалось равным I.

Таблица

	$\varphi(\eta_n, \gamma_n) = \eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n$				$\varphi(\eta_n, \gamma_n) = \sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)} + \gamma_n^2}$			
№ шага	η_n	Δ_n	$\mathcal{L}_n$	γ_n	η_n	Δ_n	$\mathcal{L}_n$	γ_n
0	$0{,}33 \cdot 10^{3}$	$0{,}30 \cdot 10^{-1}$		$0{,}89 \cdot 10^{1}$	$0{,}33 \cdot 10^{3}$	$0{,}28 \cdot 10^{0}$		$0{,}68 \cdot 10^{2}$
1	$0{,}66 \cdot 10^{2}$	$0{,}24 \cdot 10^{1}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	$0{,}26 \cdot 10^{2}$	$0{,}68 \cdot 10^{2}$	$0{,}15 \cdot 10^{1}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	$0{,}17 \cdot 10^{2}$
2	$0{,}23 \cdot 10^{2}$	$0{,}84 \cdot 10^{1}$	$0{,}24 \cdot 10^{-2}$	$0{,}11 \cdot 10^{2}$	$0{,}24 \cdot 10^{2}$	$0{,}27 \cdot 10^{1}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	$0{,}40 \cdot 10^{1}$
3	$0{,}38 \cdot 10^{1}$	$0{,}58 \cdot 10^{2}$	$0{,}22 \cdot 10^{-2}$	$0{,}19 \cdot 10^{1}$	$0{,}40 \cdot 10^{1}$	$0{,}70 \cdot 10^{1}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	$0{,}28 \cdot 10^{0}$
4	$0{,}22 \cdot 10^{0}$	$0{,}12 \cdot 10^{1}$	$0{,}20 \cdot 10^{-2}$	$0{,}12 \cdot 10^{0}$	$0{,}25 \cdot 10^{0}$	$0{,}29 \cdot 10^{2}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	$0{,}43 \cdot 10^{-2}$
5	$0{,}72 \cdot 10^{-3}$	$0{,}38 \cdot 10^{6}$	$0{,}18 \cdot 10^{-2}$	$0{,}36 \cdot 10^{-3}$	$0{,}11 \cdot 10^{-2}$	$0{,}45 \cdot 10^{-5}$	$0{,}23 \cdot 10^{-2}$	$0{,}12 \cdot 10^{-5}$
6	$0{,}93 \cdot 10^{-8}$				$0{,}19 \cdot 10^{-7}$			

ЛИТЕРАТУРА

1. SZYMANOWSKI I., RUSZCZYNSKI A. Convergence analysis for twolevel algorithms of mathematical programming.- Math. Programming Study, 1978, N10, p.158-171.
2. УЛЬМ С. Методы декомпозиции для решения задач оптимизации. - Таллин; Валгус, 1979, гл.2.
3. ЛОБЫРЕВ А.И. Ускорение сходимости в итерационном методе проектирования на многогранное множество. - Оптимизация, 1974, вып.15(32), с.58-72.
4. СУХАНОВ В.А. Оптимальная реализация метода наискорейшего спуска и метода проекции градиента. - В кн.: Оптимизация управления сложными технологическими процессами непрерывного типа. Томск: изд. Томского гос. ун-та, 1981, с.38-41.

Поступила в ред.-изд. отдел
12.06.1981 г.