Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.

Численные методы

УДК 517.5:519.85

О ПОСТРОЕНИИ АЛГОРИТМОВ ОТЫСКАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В R^n

В.И.Шмырев

В работе автора [1] показано, что в простейших экономических моделях обмена равновесные цены являются неподвижными точками некоторого порождаемого исследуемой моделью кусочно-постоянного отображения, которое при надлежащем введении структуры нормированного пространства в симплексе цен оказывается в определенном смысле монотонным. В предлагаемой заметке рассматривается вопрос о построении алгоритмов для отыскания неподвижных точек монотонных кусочно-постоянных отображений для более простого случая, когда пространство является евклидовым. Доказываемые утверждения были сформулированы автором в [2]. Здесь приводится их доказательство (в уточненной формулировке), при этом термин "монотонное отображение" используется в более широком смысле, являясь объединяющим для классов возрастающих и убывающих кусочно-постоянных отображений. Все построения основываются на доказанной автором в [3] потенциальности возрастающих отображений.

1. Понятие кусочно-постоянного отображения здесь используется в смысле определения, данного в [2]. Для полноты изложения напомним, что при этом имеется в виду пара (ω, F), которая состоит из полиэдрального комплекса ω , образованного конечным числом непересекающихся по относительно внутренним точкам и покрывающих все пространство полиэдральных множеств $Q \in \omega$ (клеток комплекса), и многозначного отображения $F: R^n \to R^n$, постоянного на относительной внутренности

Q° каждой клетки $Q \in \omega$ и подчиненного условию

$$F(Q^{\circ}) = \operatorname{conv}\{F(\mathcal{Q}^{\circ}) | \mathcal{Q} \supset Q,\ \mathcal{Q} \in \omega\}.$$

Кусочно-постоянное отображение (ω, F) условимся называть возрастающим, если для любых двух точек $x, y \in R^n$ выполняется условие

$$(x-y,\ v-w) \geq 0, \quad \forall v \in F(x),\ \forall w \in F(y),$$

или короче

$$(x-y,\ F(x)-F(y)) \geq 0. \qquad \text{(I)}$$

Отображение (ω, F), для которого в приведенном условии выполняется неравенство противоположного знака, будем называть убывающим. Возрастающее и убывающее кусочно-постоянные отображения будем именовать монотонными кусочно-постоянными отображениями.

Следует отметить, что в работах [2,3] рассматривались лишь возрастающие кусочно-постоянные отображения и именовались они также монотонными (по аналогии с монотонными операторами [4]). Здесь понятие монотонного кусочно-постоянного отображения употребляется в более широком смысле. Однако простая связь убывающих отображений с возрастающими (если (ω, F) - возрастающее отображение, то $(\omega, -F)$ - убывающее, и наоборот) позволяет перенести на этот более общий случай все утверждения из [3] с незначительными изменениями. Введенная терминология представляется естественной, если учесть, что кусочно-постоянные монотонные функции одной переменной естественным образом порождают кусочно-постоянные отображения из R в R, при этом возрастающим функциям соответствуют отображения, удовлетворяющие неравенству (I), а убывающим - отображения, удовлетворяющие противоположному неравенству.

Ограничиваясь рассмотрением лишь монотонных кусочно-постоянных отображений, в дальнейшем, не умаляя общности, будем предполагать, что среди клеток полиэдрального комплекса ω, фигурирующего в задании рассматриваемого кусочно-постоянного отображения, имеются нульмерные клетки - вершины комплекса, которые будем обозначать через $a^j, j \in J$. При этом предположении образы внутренних точек полномерных клеток комплекса могут быть лишь одноточечными. Будем обозначать такие клетки через $\mathcal{Q}_i$, $i \in I$, а соответствующие образы их внутренних точек – через x^i :

$$F(Q_i^\circ) = x^i, \quad i \in I.$$

Будем называть монотонное кусочно-постоянное отображение (ω, F) строго монотонным, если образы внутренностей двух различных клеток из ω различны:

$$F(Q_1^\circ) \neq F(Q_2^\circ), \ Q_1 \neq Q_2, \ Q_1, Q_2 \in \omega.$$

Любому монотонному кусочно-постоянному отображению (ω, F) соответствует строго монотонное отображение (ω_F, F) ([3], лемма 4), для которого комплекс ω_F определяется множествами постоянства многозначного отображения F. Строго монотонное (возрастающее или убывающее) отображение (ω, F) естественно отождествлять с самим отображением F, говоря при этом о монотонном (соответственно возрастающем или убывающем) кусочно-постоянном отображении F.

II. В [3] показано, что возрастающие кусочно-постоянные отображения потенциальны: отображению F соответствует (единственная с точностью до постоянного слагаемого) выпуклая функция f – потенциальная функция отображения F такая, что отображение F совпадает с субдифференциальным отображением ∂f. Для убывающего кусочно-постоянного отображения G под потенциальной функцией будем понимать функцию $g = -f$, где f – потенциальная функция возрастающего отображения $F = -G$. При этом g – вогнутая функция, и если по определению принять $\partial g(x) \overset{d}{=} -\partial f(x)$, что естественно и вполне согласуется с известными обобщениями понятия дифференциала [5,6], то снова будем иметь $G = \partial g$.

Используя потенциальность монотонных кусочно-постоянных отображений, несложно получить простые критерии, характеризующие неподвижные точки таких отображений. Напомним, что неподвижные точки многозначного отображения F определяются соотношением $x \in F(x)$.

Ограничимся сначала рассмотрением возрастающих отображений. Для произвольной дифференцируемой функции f неподвижные точки отображения $\mathrm{grad}\, f$ совпадают со стационарными точками функции $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x,x) - f(x)$. При некотором обобщении понятия стационарной точки этот факт сохраняется также и в случае рассмотрения неподвижных точек субдифференциального отображения ∂f, порождаемого собственной замкнутой выпуклой функцией f. Для этого стационарной точкой произвольной функции γ будем называть такую точку x, в которой функция γ дифференцируема по любому направлению h и получающаяся производная $\gamma'(x,h)$ обладает свойством:

$$\gamma'(x,h)\cdot\gamma'(x,-h)\geq 0 \quad \forall h\neq 0.$$

Для функции φ, получающейся по выпуклой функции f, будем иметь:

$$\varphi'(x,h)=(x,h)-\max_{z\in\partial f(x)}(z,h)=\min_{z\in D(x)}(z,h),$$

где $D(x)=x-\partial f(x)$. Отсюда и следует, что x является стационарной точкой функции φ тогда и только тогда, когда $x\in\partial f(x)$.

Таким образом, неподвижные точки возрастающего кусочно-постоянного отображения F совпадают со стационарными точками функции φ, полученной по его потенциальной функции f. Приведем утверждение, характеризующее поведение функции φ в окрестности неподвижной точки.

Пусть ω – полиэдральный комплекс, порождаемый множествами постоянства отображения F.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы точка z клетки $Q\in\omega$ принадлежала $\operatorname{Int} F(Q^\circ)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\varphi'(z,h)=0 \text{ при } h\in V,$$
$$\varphi'(z,h)<0 \text{ при } h\notin V,$$

где V – конус допустимых направлений для многогранника Q в точке z.

Неподвижные точки отображения F будут таковыми и для обратного отображения F^{-1}, сопоставляющего каждой точке $x\in F(R^n)$ ее полный прообраз $F^{-1}(x)=\{z\in R^n \mid x\in F(z)\}$. Это обстоятельство позволяет получить в некотором смысле двойственную формулировку приведенного утверждения. При этом потенциальной функцией отображения F^{-1} будет выпуклая функция f^*, сопряженная к функции f, а роль комплекса ω

будет играть комплекс ξ, состоящий из многогранников $\Xi = F(Q^\circ), Q\in\omega$, объединение которых $|\xi| = F(R^n)$ также является выпуклым многогранником ($|\xi| = dom(f^*)$). Роль функции φ будет играть функция $\psi(x) = \frac{1}{2}(x,x) - f^*(x)$.

ТЕОРЕМА I$'$. Для того чтобы точка x клетки $F(Q^\circ)\in\xi$ принадлежала множеству Q, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\psi'(x,h) = 0 \quad \text{при } h\in W, \tag{2}$$

$$\psi'(x,h) < 0 \quad \text{при } h\notin W, \tag{3}$$

где W – конус допустимых направлений для многогранника $F(Q^\circ)$ в точке x.

Отметим, что для всех $x\notin|\xi|$ имеем $f^*(x) = +\infty$, а $\psi(x) = -\infty$.

Для введенных функций φ и ψ иногда удобно пользоваться иным представлением. Обозначим для произвольной клетки $Q\in\omega$ через $I(Q)$ и $J(Q)$ множества

$$I(Q) = \{ i\in I \mid Q_i \supset Q \},$$

$$J(Q) = \{ j\in J \mid a^j \in Q \}.$$

Для функции φ, как легко видеть, имеем

$$\varphi(z) = \min_{i\in I} \varphi_i(z)$$

при

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{2}|z - x^i|^2 + \delta_i, \tag{4}$$

где константы δ_i подчинены условию

$$\varphi_{i_1}(a^j) = \varphi_{i_2}(a^j), \quad j\in J;\ i_1, i_2 \in I(a^j). \tag{5}$$

Аналогично, для всех $x\in|\xi|$

$$\psi(x) = \min_{j\in J} \psi_j(x) \tag{6}$$

при

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2}|x - a^j|^2 + \Delta_j, \tag{7}$$

а константы Δ_j таковы, что выполняются условия:

$$\psi_{j_1}(x^i) = \psi_{j_2}(x^i), \quad i\in I;\ j_1, j_2 \in J(Q_i). \tag{8}$$

Доказательства приведенных утверждений проводятся по одной схеме. Поэтому проведем лишь доказательство теоремы I'. Введем еще некоторые обозначения. Многогранники $F(a^j)$ будем обозначать через Ξ_j. Для произвольной точки $x \in \Xi_j$ через $Z_j(x)$ будем обозначать конус допустимых направлений для многогранника Ξ_j в точке x, а через $Z(x)$ – такой же конус для многогранника $|\xi|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I'. Необходимость. Пусть точка клетки $F(Q^\circ), Q \in \omega$, принадлежит множеству Q°. Ясно, что по направлениям, выводящим из конуса $Z(x)$, производная функции ψ в точке x равна $-\infty$. Любое из направлений h, не выводящих из $Z(x)$, ведет при малых сдвигах в один из многогранников Ξ_j, содержащих точку x. Это многогранники Ξ_s, соответствующие вершинам клетки $F^{-1}(x) = \mathcal{Q}$ комплекса ω, т.е. многогранники Ξ_s при $s \in J(\mathcal{Q})$. На многогранн... Ξ_s функция ψ совпадает с функцией ψ_s, а значит, ее производная в точке x по такому направлению h будет иметь вид:

$$\psi'(x, h) = (x - a^s, h). \tag{9}$$

Из определения возрастающего отображения имеем

$$(x - a^s, y - z) \geq 0 \qquad \forall y \in F(x), \ \forall z \in F(a^s),$$

и равенство здесь имеет место лишь при $y, z \in F(x) \cap F(a^s)$. Так как $x \in F(x)$, то можно принять $y = x$. В результате получим

$$(x - a^s, x - z) > 0, \qquad z \in F(a^s) \setminus F(x), \tag{10}$$

$$(x - a^s, x - z) = 0, \qquad z \in F(a^s) \cap F(x). \tag{11}$$

Учитывая, что вектор $z - x$ при изменении $z \in F(a^s)$ задает все направления h, не выводящие из конуса $Z_s(x)$, а при $z \in F(a^s) \cap F(x)$ – все направления, не выводящие из конуса W, заключаем, что условия (10), (11) и означают справедливость условий (2),(3). Это и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть точка x принадлежит $F(Q^\circ)$ и выполняются условия (2) и (3). Покажем, что тогда $x \in Q^\circ$.

Рассмотрим ту грань клетки $F(Q^\circ)$, в относительной внутренности которой находится точка x. Пусть это клетка $F(Q_1^\circ)$, $Q_1 \in \omega$. Возьмем произвольную вершину $x^{i_0} \in F(Q_1^\circ)$. Очевидно, что конус допустимых направлений $W(x^{i_0})$ для многогранника

$F(Q^\circ)$ в вершине x^{i_0} содержится в конусе W. Аналогично, для любого многогранника Ξ_s, содержащего клетку $F(Q^\circ)$ (т.е. при $s\in J(Q)$), конус $Z_s(x^{i_0})$ содержится в конусе $Z_s(x)$.

Ясно, что вектор $h=x^j-x^{i_0}$ при $j\in I(Q)\cap\theta_{i_0}$, где $\theta_{i_0}= =\{j\in I\,|\,[x^{i_0};x^j]\in\xi\}$, принадлежит конусу $W(x^{i_0})$, а значит, и конусу W. Следовательно, производная функции ψ в точке x по такому направлению h равна нулю. На клетке $F(Q^\circ)$ функция ψ совпадает с функциями ψ_s, $s\in J(Q)$. Таким образом, для любого $s\in J(Q)$ имеем

$$(x-a^s,\, x^j-x^{i_0})=0,\quad j\in I(Q)\cap\theta_{i_0}. \tag{12}$$

Зафиксировав некоторое $s\in J(Q)$, рассмотрим теперь направление $h=x^k-x^{i_0}$ при $k\in\theta_{i_0}\cap I(a^s)\setminus I(Q)$. Ясно, что $h\in Z_s(x^{i_0})$, но $h\notin W(x^{i_0})$. А потому h выводит из аффинного носителя грани $F(Q^\circ)$ многогранника Ξ_s. Тем самым $h\notin W$. Значит, производная функция ψ по такому направлению h в точке x отрицательна. Учитывая, что $h\in Z_s(x^{i_0})\subset Z_s(x)$ и что на многограннике Ξ_s функция ψ совпадает с функцией ψ_s, получаем

$$(x-a^s,\, x^k-x^{i_0})<0,\quad k\in I(a^s)\cap\theta_{i_0}\setminus I(Q). \tag{13}$$

Легко видеть, что система условий

$$(z-a^s,\, x^j-x^{i_0})=0,\quad j\in\theta_{i_0}\cap I(Q), \tag{14}$$

$$(z-a^s,\, x^k-x^{i_0})<0,\quad k\in I(a^s)\cap\theta_{i_0}\setminus I(Q), \tag{15}$$

описывает при переменном z относительную внутренность конуса, касательного к клетке Q в вершине a^s. Таким образом, условия (12),(13) и означают, что точка x лежит в относительной внутренности указанного конуса. Поскольку это выполняется для любой вершины a^s клетки Q, то $x\in Q^\circ$, что и требовалось доказать.

Из приведенных построений следует, что неподвижными точками возрастающего кусочно-постоянного отображения F будут, в частности, точки локального максимума функции ψ на многограннике $|\xi|$, которые непременно существуют ввиду ограниченности этого многогранника. Принимая во внимание вид функции ψ, легко видеть, что точками локального максимума функции ψ могут быть лишь точки x^i, $i\in I$. Тем самым получаем

СЛЕДСТВИЕ. Для возрастающего отображения F среди точек $x^i = F(Q_i^\circ)$, $i \in I$, всегда существуют неподвижные точки отображения.

Ясно, что в общем случае могут существовать неподвижные точки возрастающего отображения F, являющиеся для функций φ и ψ стационарными точками иного типа, отличные от точек локального максимума. В этой связи интересно отметить, что для функции $\zeta = \varphi + \psi$, рассматриваемой на многограннике $|\xi|$, неподвижные точки отображения F могут быть уже только точками максимума. Это видно из следующих рассуждений.

Пусть, как и прежде, f - какая-либо потенциальная функция отображения F, и f^* - сопряженная к функции f. Функции f и f^* (по определению сопряженной функции) связаны соотношением

$$f(z) + f^*(x) \geq (z,x) \qquad \forall x, z \in R^n, \tag{16}$$

и равенство здесь эквивалентно условию $x \in \partial f(z)$, т.е. $x \in F(z)$. Если рассмотреть функции φ и ψ, соответствующие функциям f и f^*, то для них получим

$$\varphi(z) + \psi(x) \leq \frac{1}{2}|x - z|^2 \qquad \forall x, z \in R^n,$$

и равенство здесь также имеет место тогда и только тогда, когда x и z связаны соотношением $x \in F(z)$. Принимая $z = x$, получим

$$\varphi(x) + \psi(x) \leq 0 \qquad \forall x \in R^n, \tag{17}$$

и равенство здесь эквивалентно соотношению $x \in F(x)$, откуда и следует требуемое.

Переходя к убывающим отображениям, отметим, что из самого их определения следует единственность неподвижной точки у таких отображений. Действительно, если G - убывающее отображение и x, y - его неподвижные точки, то в определяющем неравенстве

$$(x - y,\ v - w) \leq 0 \qquad \forall v \in F(x),\ \forall w \in F(y)$$

можно принять $v = x$ и $w = y$. Это дает $\|x - y\|^2 \leq 0$, т.е. $x = y$.

Аналогом теоремы I для убывающих отображений является

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы точка x^* была неподвижной точкой убывающего кусочно-постоянного отображения G, необходимо и достаточно, чтобы она являлась точкой безусловного минимума функции $\varphi(z)=\frac{1}{2}(z,z)-g(z)$, где g - потенциальная функция отображения G.

Легко видеть, что здесь функция φ является кусочно-квадратичной выпуклой функцией и может быть задана в виде

$$\varphi(z)=\max_{i\in I}\varphi_i(z), \tag{I8}$$

где функции φ_i, как и в случае возрастающих отображений, определяются в соответствии с (4)-(5). Аналогично, для формулировки двойственного варианта сформулированного критерия следует ввести на многограннике $|\xi|$ функцию ψ вида

$$\psi(x)=\max_{j\in J}\psi_j(x), \tag{I9}$$

где функции ψ_j определяются согласно (7)-(8).

ТЕОРЕМА 2$'$. Для того чтобы точка x^0 была неподвижной точкой для убывающего кусочно-постоянного отображения G, необходимо и достаточно, чтобы функция ψ, задаваемая формулой (I9), в точке x^0 достигала минимума на многограннике $|\xi|$.

Следует отметить, что большего единообразия в рассмотрении убывающих и возрастающих отображений можно достичь, если естественным образом распространить понятие сопряженной функции, вводимое для выпуклых функций, на случай вогнутых функций, изменив знак неравенства в определяющем соотношении (I6) на противоположный, т.е. если для вогнутой функции g в качестве сопряженной функции g^* по определению принять функцию

$$g^*(x)=\min_z\{(x,z)-g(z)\}.$$

При таком соглашении, если доопределить функцию ψ, считая $\psi(x)=+\infty$ для $x\notin|\xi|$, то при всех x будем иметь $\psi(x)=\frac{1}{2}(x,x)-g^*(x)$, где g - потенциальная функция рассматриваемого убывающего отображения G.

Справедливость теорем 2 и 2$'$ следует из того, что, как и в случае возрастающих отображений, неподвижные точки убывающих отображений совпадают со стационарными точками соответствующих функций φ и ψ, которые в данном случае являются выпуклыми, а потому имеют стационарные точки одного типа - точки минимума.

Ш. Полученные выше утверждения, характеризующие неподвижные точки кусочно-постоянных монотонных отображений, позволяют строить различные алгоритмы для отыскания таких точек. Рассмотрим некоторые из них.

Для возрастающих отображений одной из возможных процедур отыскания неподвижных точек является процедура "соседней вершины", позволяющая за конечное число шагов отыскать ту из точек x^i, которая принадлежит соответствующему ей множеству $Q_i^o = Int\, F^{-1}(x^i)$. Напомним для полноты изложения, что вершины x^i и x^j комплекса ξ называются соседними [3], если соответствующие им многогранники $F^{-1}(x^i)$ и $F^{-1}(x^j)$ имеют общую $(n-1)$-мерную грань, что эквивалентно наличию в комплексе ξ клетки $[x^i, x^j]$. Процедура состоит в следующем: если на очередном шаге процесса имеющаяся точка x^i не принадлежит множеству Q_i^o, то осуществляется переход в одну из соседних вершин x^j, обладающую тем свойством, что несущая гиперплоскость клетки $Q_i \cap Q_j$ отделяет точку x^i от Q_i^o. Несложно показать, что такой процесс будет сопровождаться строгим возрастанием значения функции ψ в текущей вершине x^i и тем самым будет конечным.

Для отыскания неподвижных точек возрастающего отображения F применима также процедура метода итераций, описываемая соотношением $z^{k+1} \in F(z^k)$ и состоящая в том, что по имеющемуся текущему приближению z^k в качестве следующего приближения z^{k+1} принимается любая точка из множества $F(z^k)$.

ТЕОРЕМА 3. Для возрастающего кусочно-постоянного отображения метод итераций позволяет получить неподвижную точку за конечное число шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два последовательных приближения: z^k и $z^{k+1} \in F(z^k)$. Имеем

$$\varphi(z^k) - \varphi(z^{k+1}) = \frac{1}{2}(|z^k|^2 - |z^{k+1}|^2) + f(z^{k+1}) - f(z^k). \quad (20)$$

Но так как $z^{k+1} \in F(z^k) = \partial f(z^k)$, то

$$f(z^{k+1}) - f(z^k) \geq (z^{k+1}, z^{k+1} - z^k).$$

Ввиду этого, из (20) следует неравенство

$$\varphi(z^k) - \varphi(z^{k+1}) \geq \frac{1}{2} \| z^k - z^{k+1} \|^2. \qquad (21)$$

Таким образом, до тех пор пока $z^{k+1} \neq z^k$, будем иметь $\varphi(z^{k+1}) < \varphi(z^k)$. С другой стороны, учитывая, что в (21) z^k и z^{k+1} связаны лишь условием $z^k \in F^{-1}(z^{k+1})$, можно утверждать, что при любом $z \in |\xi|$ выполняется условие

$$\varphi(z) \leq \varphi(x) \qquad \forall x \in F^{-1}(z).$$

Значит, множество $F^{-1}(z^k)$ в дальнейшем уже встретиться не может, и конечность процесса следует из конечности числа клеток в комплексе ω. Теорема доказана.

Для убывающего отображения задача об отыскании неподвижной точки свелась к безусловной минимизации выпуклой функции φ (теорема 2), для чего можно воспользоваться известными процедурами спуска. При этом субдифференциал функции φ в точке z будет задаваться множеством $z - F(z)$. Можно также строить алгоритмы, основываясь на минимизации функции ψ на многограннике $|\xi|$ (теорема 2′). При этом для любой точки $x \in |\xi|$ все элементы множества $F(x) - x$ будут определять "подходящие" направления, т.е. направления убывания функции ψ. Покажем это.

Пусть $x \in |\xi|, x \notin F(x)$. Возьмем произвольно $\hat{x} \in F(x)$ и положим $h = \hat{x} - x$. Так как $x, \hat{x} \in |\xi|$ и $|\xi|$ - выпуклый многогранник, то направление h в точке x ведет внутрь некоторой клетки $\Xi \in \xi$. Пусть $\Xi = F(Q^\circ), Q \in \omega$. Для любой вершины $a^j, j \in J(Q)$, имеем $F(a^j) \supset \Xi$ и, значит, $x \in F(a^j)$. Из условия монотонности, учитывая, что $\hat{x} \in F(x)$, получаем

$$(x - a^j, \hat{x} - x) \leq 0.$$

Равенство здесь, однако, невозможно, ибо для этого необходимо, чтобы $x, \hat{x} \in F(x) \cap F(a^j)$, чего нет ($x \notin F(x)$!). Таким образом,

$$(x - a^j, h) < 0, \qquad j \in J(Q). \qquad (22)$$

Остается учесть, что на многограннике $\Xi_j, j \in J$, функция ψ совпадает с функцией ψ_j, задаваемой формулой (7), а значит, неравенство (22) означает $\psi'(x,h)<0$, что и требовалось показать.

Учитывая кусочно-квадратичный характер функций φ и ψ, можно для их минимизации рассматривать также процедуры, аналогичные процессам субоптимизации для задач математического программирования с линейными ограничениями [9]. Опишем одну из процедур такого рода.

Пусть на k-м шаге процесса имеется точка $p^k \in Q^\circ$, $Q \in \omega$, и пусть $\Xi = F(p^k)$. Обозначим через L и M соответственно аффинные носители клеток Q и Ξ. Возможны два случая:

(i) $p^k = L \cap M$,

(ii) $p^k \neq L \cap M = \hat{p}^k$.

В случае (i) определим среди точек многогранника Ξ ближайшую к p^k в евклидовой метрике

$$|p^k - z^k| = \min_{z \in \Xi} |p^k - z|.$$

Пусть Z - конус допустимых направлений для многогранника Ξ в точке z^k и P - аналогичный конус для $F^{-1}(z^k)$ в точке p^k. Как несложно показать, эти конусы связаны равенством $Z^\perp = -P$, где $Z^\perp$ - поляра конуса Z. Так как z^k - ближайшая точка к p^k в многограннике Ξ, то вектор $h = p^k - z^k$ принадлежит конусу $Z^\perp$ и тем самым конусу $(-P)$, а следовательно, достаточно малые сдвиги из точки p^k по отрезку $[p^k, z^k]$ не выводят из клетки $F^{-1}(z^k)$. При этом либо $z^k \in F^{-1}(z^k)$ и z^k - неподвижная точка отображения F, либо $z^k \notin F^{-1}(z^k)$. В последнем случае точку пересечения отрезка $[p^k, z^k]$ с границей клетки $F^{-1}(z^k)$ принимаем в качестве p^{k+1}.

В случае (ii) либо $\hat{p}^k \in Q^\circ$, и мы принимаем $p^{k+1} = \hat{p}^k$, получая случай (i), либо $\hat{p}^k \notin Q^\circ$, и в качестве p^{k+1} принимается точка пересечения отрезка $[p^k, \hat{p}^k]$ с границей клетки Q.

Покажем, что изложенная процедура позволяет найти неподвижную точку убывающего кусочно-постоянного отображения за конечное число шагов. Действительно, при переходе от p^k к p^{k+1} строго убывает значение функции φ, ибо в случае (i) движение происходит в направлении, обратном минимальному (по евклидовой норме) субградиенту этой функции (см.[7], с.85), а в случае (ii) убывает расстояние до любой точки из M и, в частности, до вершин клетки Ξ , т.е. убывает каждая из функций φ_i, $i \in I(Q)$,и тем самым функция φ . Но в случае (i) значение $\varphi(p^k)$ однозначно определено клеткой Q . Поэтому любая клетка Q , фигурирующая при реализации случая (i) , в дальнейшем встретиться уже не может. Так как в случае (ii) размерность клетки Q понижается, то этот случай может повториться подряд лишь конечное число раз, после чего реализуется случай (i). В результате конечность процесса следует из конечности общего числа клеток в комплексе ω .

ЛИТЕРАТУРА

1. ШМЫРЕВ В.И. Монотонность в линейных моделях обмена. - Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.76-94.
2. ШМЫРЕВ В.И. Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n. - Докл. АН СССР, 1981, т.259, №2, с.299-301.
3. ШМЫРЕВ В.И. О потенциальности кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n. - Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с. 64-75.
4. ВАЙНБЕРГ М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. - М.: Наука, 1972.
5. CLARKE F.H. Generalized gradients and applications. - Trans. Amer. Math. Soc., 1975,v.250, p.247-262.
6. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. О квазидифференцируемых функционалах. - Докл. АН СССР, 1980, т.250, №1, с. 21-25.
7. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., МАЛОЗЕМОВ В.Н. Введение в минимакс. - М.: Наука, 1972.
8. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
9. РУБИНШТЕЙН Г.Ш., ШМЫРЕВ В.И. Методы минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом многограннике. - Оптимизация, 1971, вып. 1(18), с. 82-117.

Поступила в ред.-изд. отдел
12.06.1981 г.