УДК 517.51

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ В СИЛЬНЕЙШЕЙ ФОРМЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ И МИНИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ σ-АЛГЕБРЕ

А.Я.Заславский

В [1] в качестве одного из примеров бесконечномерных оптимизационных моделей рассматривается следующая задача о максимальном потоке и минимальном разрезе.

Пусть в σ-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств произвольного непустого множества X выделены дизъюнктные элементы e^{o} и e^{oo}. Кроме того, в множестве Ω всех неотрицательных σ-аддитивных по каждому аргументу функций $\psi : \mathcal{B}\times\mathcal{B}\to R$, удовлетворяющих условию $\psi(X,e^{o})=\psi(e^{oo},X)=0$, выделена некоторая функция ψ_0.

Множество Ω_{ψ_0} допустимых потоков состоит из функций $\varphi\in\Omega$, удовлетворяющих соотношениям $\varphi(e,e')\leq\psi_0(e,e')$ $(e,e'\in\mathcal{B})$, $\varphi(e,X)=\varphi(X,e)$ $(e\in\mathcal{B} : e\subset X\setminus(e^{o}\cup e^{oo}))$.

Под интенсивностью каждого потока понимается величина $\varphi(X,e^{oo})$. Элементы множества $S(e^{o};e^{oo})=\{e\in\mathcal{B} : e^{o}\subset e,\ e\cap e^{oo}=\emptyset\}$ называются разрезами и под пропускной способностью каждого из них понимается величина $\psi(e,X\setminus e)$.

Непосредственно проверяется, что для любых $\varphi\in\Omega_{\psi_0}$ и $e\in S(e^{o};e^{oo})$ имеет место неравенство

$$\varphi(X,e^{oo})\leq\psi(e,X\setminus e),$$

т.е. $\mathcal{A}=\sup\limits_{\varphi\in\Omega_{\psi_0}}\varphi(X,e^{oo})\leq\inf\limits_{e\in S(e^{o};e^{oo})}\psi(e,X\setminus e)=\mathcal{L}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для приведенных задач справедлива теорема двойственно-

с т и в с и л ь н е й ш е й ф о р м е , т . е . $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ и с у щ е с т в у ю т т а к и е $\varphi^* \in \Omega_{\psi_0}$ и $e^* \in S(e^\circ, e^{\circ\circ})$, ч т о $\varphi^*(X, e^{\circ\circ}) = \psi(e^*, X \setminus e^*)$.

Указанный результат для случая конечных множеств X установлен впервые в [2]. В [I] приведен этот результат для частного случая, когда B - σ -алгебра борелевских множеств метрического компакта X. Там же (см. также [3]) доказывается существование минимального разреза для общего случая и высказывается гипотеза о справедливости теоремы двойственности в сильнейшей форме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбиением множества X назовем конечное семейство попарно-дизъюнктных элементов σ -алгебры B, объединение которых есть X. Для любого разбиения λ через $B(\lambda)$ обозначим совокупность всевозможных конечных объединений элементов разбиения λ. Символом Λ обозначим совокупность всеу разбиений λ множества X таких, что $e^\circ \in B(\lambda), e^{\circ\circ} \in B(\lambda)$. На множестве Λ вводится следующее отношение порядка: $\lambda_1 \leq \lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda)$ тогда и только тогда, когда $B(\lambda_1) \subset B(\lambda_2)$.

Для любых $e_1, e_2 \in B$ положим $K(e_1, e_2) = [0, \psi_0(e_1, e_2)]$, а через Q обозначим топологическое произведение отрезков $K(e_1, e_2)$ по всем $(e_1, e_2) \in B \times B$. Отметим, что топологическое пространство Q будет компактным по теореме А.Н.Тихонова [4].

Пусть $\lambda \in \Lambda$. В силу [2] существует биаддитивная функция $\varphi_\lambda : B(\lambda) \times B(\lambda) \to R$ такая, что $0 \leq \varphi_\lambda(e_1, e_2) \leq \psi_0(e_1, e_2)$ $(e_1, e_2 \in B(\lambda))$, $\varphi_\lambda(e, X) = \varphi_\lambda(X, e)$ $(e \in B(\lambda), e \subset X \setminus (e^\circ \cup e^{\circ\circ}))$, причем $\varphi_\lambda(X, e^{\circ\circ}) = \inf\{\psi_0(e, X \setminus e) : e \in B(\lambda), e \supset e^\circ, e \cap e^{\circ\circ} = \emptyset\} \geq \mathcal{L}$.

Доопределим функцию φ_λ на всем множестве $B \times B$, полагая $\varphi_\lambda(e, e') = 0$ при $(e, e') \in B \times B \setminus [B(\lambda) \times B(\lambda)]$. Имеем, что $\varphi_\lambda \in Q$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Так как топологическое пространство Q - компакт, то сеть $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ имеет подсеть, сходящуюся к некоторому $\varphi^* \in Q$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\varphi^* : B \times B \to R$ биаддитивна, $\varphi^*(X, e) = \varphi^*(e, X)$ $(e \in B, e \subset X \setminus (e^\circ \cup e^{\circ\circ}))$, причем $0 \leq \varphi^*(e, e') \leq \psi_0(e, e')$ $(e, e' \in B)$.

Из последнего неравенства и из σ -аддитивности функции ψ_0 по каждому аргументу следует, что и функция φ^* также σ -аддитивна по каждому аргументу. Таким образом, $\varphi^* \in \Omega_{\psi_0}$. Теперь для того, чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно заметить, что $\varphi^*(X, e^{\circ\circ}) = \mathcal{L}$.

Автор глубоко признателен Г.Ш.Рубинштейну за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. – Успехи мат. наук, 1970, т.25,вып.5, с.171-201.
2. ДАНЦИГ Дж.Б., ФУЛКЕРСОН Д.Р. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. – В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы. – М.: Изд-во иностр. лит., с.318-324.
3. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств. – Оптимизация, 1973, вып. 9(26), с.157-164.
4. БУРБАКИ Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968.

Поступила в ред,-изд. отдел
11.05.1982 г.