Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

УСТОЙЧИВЫЕ СИСТЕМЫ ДОГОВОРОВ В ЭКОНОМИКЕ ЧИСТОГО ОБМЕНА

А.Н.Козырев

Стандартный способ определения ядра состоит в том, что на множестве допустимых состояний экономики определяют отношение доминирования по каждой допустимой коалиции и называют ядром совокупность допустимых состояний, не доминируемых ни по одной коалиции. Этот способ можно сделать более универсальным, если вместо отношений доминирования на множестве допустимых состояний экономики рассматривать отношения доминирования на совокупности вспомогательных объектов, называемых системами договоров. При этом каждому допустимому состоянию экономики соответствует множество различных систем договоров, но каждой системе договоров соответствует единственное состояние экономики. Система договоров, не доминируемая ни по одной коалиции, называется квазиустойчивой или устойчивой, а соответствующее состояние экономики договорным или вполне договорным, в зависимости от рассматриваемого набора отношений доминирования. Впервые такой подход использован В.Л.Макаровым в [1], где определены основные понятия математической теории договоров и исследованы их простейшие свойства. В настоящей работе дано определение устойчивой системы договоров, при котором любое вальрасовское состояние экономики чистого обмена оказывается вполне договорным. Далее оно сравнивается с аналогичным определением из [1], строится достаточно простой и естественный пример рынка, множество вполне договорных состояний которого пусто, если использовать определение устойчивой системы договоров из [1].

§I. Договоры, системы договоров и договорные состояния

Экономикой чистого обмена или рынком будем называть четверку

$$\mathcal{E} = \langle N, R^m, \mathfrak{S}, \{X_i, a^i, \underset{i}{\gtrsim}\}_{i \in N} \rangle, \qquad (I)$$

где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ - множество экономических агентов (торговцев), m - число наименований продуктов (товаров), $\mathfrak{S} \subset 2^N$ - множество допустимых коалиций, а $\{X_i, a^i, \underset{i}{\gtrsim}\}$ - описание торговца с номером i. Описание каждого торговца состоит из его потребительского множества $X_i \subset R^m$, начального запаса продуктов $a^i \in X_i$ и отношения предпочтения $\underset{i}{\gtrsim}$ на X_i. Предполагается, что отношения предпочтения для всех торговцев полны и транзитивны. Запись $x \underset{i}{>} y$ означает, что $x \underset{i}{\gtrsim} y$ и $y \underset{i}{\not\gtrsim} x$. Дополнительные предположения относительно множеств X_i и отношений предпочтения вводятся по мере необходимости, так как они обычно связаны с интерпретацией модели. С другой стороны, все основные понятия можно определить и без дополнительных предположений. Более того, определения договора, системы договоров, договорного и вполне договорного состояния без каких-либо изменений переносится на более общую модель рынка, когда отношения предпочтения заданы на множестве $\prod_{i=1}^{n} X_i$ или на множестве допустимых состояний рынка

$$X = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i \mid \sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=1}^{n} a^i\},$$

которое иногда называют множеством допустимых распределений товаров. Описанная модель отличается как от классической модели рынка [2], так и от абстрактной экономики с аддитивным производством [I]. Отсутствие явно выделенного производства позволяет уменьшить число формальных переменных, что не приводит тем не менее к потере общности, так как модель из [I] сводится к рынку (I).

Договором v называется пара $(x(v), s(v))$, где $x(v) \in R^{mn}$, $s(v) \in \mathfrak{S}$, причем $x^i(v) = 0$ для $i \notin s$ и $\sum_{i=1}^{n} x^i(v) = 0$.

Системой договоров называется конечное семейство договоров

$V=\{v_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, где $\xi\in\Xi$ - номера соответствующих договоров из V , причем векторы $x(v_\xi)$, $x(v_{\xi'})$ при различных ξ и ξ' могут совпадать, а коалиции $S(v_\xi)$ и $S(v_{\xi'})$ полностью или частично пересекаться.

С системой договоров $V=\{v_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ естественным образом связан вектор перераспределения товаров $x(V)=\sum_{\xi\in\Xi} x(v_\xi)$, которому соответствует (не обязательно допустимое) состояние экономики $a+x(V)$. Если $(a+x(V))\in X$, то система договоров V называется сбалансированной.

Чтобы определить отношение доминирования $\underset{S}{>}$ по некоторой коалиции S из $\mathfrak{S}$,введем формальные операции заключения и разрыва договоров этой коалицией. Естественно предположить, что для заключения договора v необходимо согласие всех его будущий участников, т.е. всех торговцев из $S(v)$, а для разрыва договора v достаточно желания одного из его участников. Чтобы записать эти условия более формально, предположим, что система договоров $\tilde V=\{v_\xi\}_{\xi\in\tilde\Xi}$ получается некоторой коалицией S из имеющейся системы договоров $V=\{v_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ путем заключения новых и разрыва части старых договоров, причем старые договоры, не разорванные коалицией S , сохраняют свои номера при переходе из V в $\tilde V$. С каждым из множеств Ξ и $\tilde\Xi$ свяжем пару множеств

$$\Xi(S)=\{\xi\in\Xi \mid S(v_\xi)\subset S\},\quad \Xi^*(S)=\{\xi\in\Xi \mid S(v_\xi)\cap S\neq\emptyset\}$$

и

$$\tilde\Xi(S)=\{\xi\in\tilde\Xi \mid S(v_\xi)\subset S\},\quad \tilde\Xi^*(S)=\{\xi\in\tilde\Xi \mid S(v_\xi)\cap S\neq\emptyset\}.$$

Между этими парами множеств должны выполняться соотношения

$$\Xi\setminus\Xi^*(S)=\tilde\Xi\setminus\tilde\Xi^*(S) \tag{2}$$

и

$$\Xi^*(S)\setminus\Xi(S)\supset\tilde\Xi^*(S)\setminus\tilde\Xi(S). \tag{3}$$

В самом деле, условие (2) означает, что договоры из V , в которых не задействован ни один торговец из S , полностью сохранятся, а условие (3) - что договоры с участием торговцев, не входящих в S , эта коалиция может только разрывать.

Совокупность систем договоров вида $\tilde{V}$, для которых выполняются условия (2) и (3), обозначим через $F(V,S)$. Отношение доминирования по коалиции S определим сначала лишь для сбалансированных систем договоров, а затем распространим его на произвольные системы договоров.

Сбалансированная система договоров $\bar{V}$ доминирует сбалансированную систему договоров V по коалиции $S \in \mathfrak{S}$ (т.е. $\bar{V} \succ_S V$), если $\bar{V} \in F(V,S)$ и

$$a^i + x^i(\bar{V}) \underset{i}{\geqslant} a^i + x^i(V)$$

для всех $i \in S$, причем

$$a^i + x^i(\bar{V}) \underset{i}{>} a^i + x^i(V)$$

хотя бы для одного $i \in S$.

Пусть теперь V - произвольная система договоров. Обозначим через $G(V)$ совокупность всех сбалансированных подсистем системы договоров V, т.е.

$$G(V) = \{V' = \{v_\xi\}_{\xi \in \Xi'} \mid \Xi' \subset \Xi, (\sum_{\xi \in \Xi'} x(v_\xi) + a) \in X\},$$

а через $H(V)$ - совокупность максимальных (по включению) элементов множества $G(V)$. При этом удобно считать, что система договоров, не содержащая ни одного договора, является подсистемой любой другой системы договоров. Эта система сбалансирована, так как $a \in X$. Таким образом, $G(V) \neq \emptyset$ для любой системы договоров V и, следовательно, $H(V) \neq \emptyset$. Если система договоров V сбалансирована, то очевидно $H(V) = \{V\}$.

Система договоров $\bar{V}$ доминирует систему договоров V по коалиции $S \in \mathfrak{S}$ ($\bar{V} \succ_S V$), если $\bar{V} \in F(V,S)$ и

$$a^i + x^i(V') \underset{i}{\geqslant} a^i + x^i(V'')$$

для всех систем договоров $V' \in H(\bar{V})$, $V'' \in H(V)$ и всех торговцев из S, причем для любых V' и V'' найдется $i \in S$ такой, что

$$a^i + x^i(V') \underset{i}{>} a^i + x^i(V'').$$

Сбалансированная система договоров V, не доминируемая ни по одной коалиции из $\mathfrak{S}$, называется квазиустойчивой, а соответствующее ей состояние $a + x(V)$ рынка - договорным состоянием.

Определим умножение договора на скаляр, положив

$$\lambda v = (\lambda x(v),\ s(v))$$

для произвольного договора v и произвольного числа λ.

Разбиением системы договоров $V=\{v_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ называется система договоров $V'=\{\alpha_\xi v_\xi, (1-\alpha_\xi)v_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, где $0\leqslant\alpha_\xi\leqslant 1$, $\xi\in\Xi$. Система договоров, каждое разбиение которой квазиустойчиво, называется устойчивой, а соответствующее ей состояние экономики – вполне договорным. Непосредственно из определений следует, что каждое вполне договорное состояние является договорным. Если обозначить множество договорных состояний рынка $\mathcal{E}$ через $D(\mathcal{E})$, а множество вполне договорных состояний – через $D_o(\mathcal{E})$, то $D(\mathcal{E})\supset D_o(\mathcal{E})$.

Через P обозначим стандартный симплекс в R^m, который иногда называют симплексом цен, а через $\langle p,y\rangle$ – скалярное произведение векторов $p\in P$ и $y\in R^m$. Состоянием конкурентного равновесия называется пара $(\bar p,\bar x)\in P\times X$, для которой при всех $i\in N$ выполняются условия:

(а) $\langle\bar p,\bar x^i\rangle=\langle\bar p,a^i\rangle$,

(б) для $x^i\in X_i$ из $\langle\bar p,x^i\rangle\leqslant\langle\bar p,a^i\rangle$ следует $\bar x^i \underset{i}{\geqslant} x^i$.

Состояние $x\in X$ называется вальрасовским, если (p,x) – конкурентное равновесие при некотором $p\in P$. Множество всех вальрасовских состояний рынка $\mathcal{E}$ обозначим через $W(\mathcal{E})$.

ТЕОРЕМА I. *Если $N\in\sigma$ и для каждого $i\in N$ отношение $\underset{i}{\geqslant}$ строго монотонно (возрастающее), а множества X_i удовлетворяют условию $X_i=X_i+R^m_+$, то справедливо включение $D_o(\mathcal{E})\supset W(\mathcal{E})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar x\in W(\mathcal{E})$, т.е. существует вектор $\bar p\in P$ такой, что $(\bar p,\bar x)$ – конкурентное равновесие. Рассмотрим систему договоров V, состоящую из единственного договора v такого, что $s(v)=N$ и $x(V)=\bar x-a$. Остается показать, что система договоров V устойчива. Предположим противное, т.е. существуют коалиция $S\in\sigma$ и число $\alpha\in[0,1]$ такие, что разбиение $V'=\{\alpha v,(1-\alpha)v\}$ системы договоров V доминируемо по коалиции S. Если $\bar V\underset{S}{>}V'$, то без ограничения общности можно считать, что $\bar V$ состоит из двух договоров αv и $\bar v$, причем $s(\bar v)=S$ и $(a+x(\bar V))\in X$. Поскольку $\bar V\underset{S}{>}V'$, для

всех $i \in S$ должны выполняться условия

$$a^i + x^i(\bar{v}) + \alpha x^i(v) \underset{i}{\geq} a^i + x^i(v),$$

а для некоторого $i_0 \in S$ - более сильное условие

$$a^{i_0} + x^{i_0}(\bar{v}) + \alpha x^{i_0}(v) \underset{i_0}{>} a^{i_0} + x^{i_0}(v).$$

Если при этом выполняется неравенство

$$<\bar{p}, a^{i_0} + x^{i_0}(\bar{v}) + \alpha x^{i_0}(v)> \leq <\bar{p}, a^{i_0} + x^{i_0}(v)>,$$

то для i_0 нарушено условие (б) определения конкурентного равновесия. Следовательно, выполняется противоположное неравенство, которое с учетом условия (а) можно записать в виде $<\bar{p}, x^{i_0}(\bar{v})> > 0$. С другой стороны, $\sum\limits_{i \in S} <\bar{p}, x^i(\bar{v})> = 0$, так как $\sum\limits_{i \in S} x^i(\bar{v}) = 0$. Следовательно, $<\bar{p}, x^{i_1}(v)> < 0$ при некотором $i_1 \in S$. Но тогда для $i_1 \in S$ нарушено условие (б) определения конкурентного равновесия. Действительно, пусть e - m -мерный вектор, все компоненты которого единицы. Из условия $X_i = X_i + R^m_+$ следует, что

$$(a^{i_1} + x^{i_1}(\bar{V}) - <\bar{p}, x^{i_1}(\bar{v})> e) \in X_{i_1},$$

а из строгой монотонности отношения $\underset{i}{\geq}$, что

$$a^{i_1} + x^{i_1}(\bar{V}) - <\bar{p}, x^{i_1}(\bar{v})> e \underset{i_1}{>} a^{i_1} + x^{i_1}(\bar{V}) \underset{i_1}{\geq} \bar{x}^{i_1}.$$

Это отношение вместе с равенством

$$<\bar{p}, a^{i_1} + x^{i_1}(\bar{V}) - <\bar{p}, x^{i_1}(\bar{v})> e> = <\bar{p}, a^{i_1}>$$

противоречит определению конкурентного равновесия. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

На множестве X определим отношение доминирования по коалициям из σ . Для $x, y \in X$ положим $x \underset{S}{>} y$, если $\sum\limits_{i \in S} x^i = \sum\limits_{i \in S} a^i$, и $x^i \underset{i}{\geq} y^i$ для всех $i \in S$, причем $x^i \underset{i}{>} y^i$ хотя бы для одного $i \in S$. Множество состояний из X , не доминируемых ни по одной коалиции, называется ядром рынка и обозначается $C(\mathcal{E})$. Для классического рынка такое ядро совпадает с ядром, определяемым в [2]. Следующая теорема представляет собой объединение двух утверждений из [I]. Тем не менее она приводится с доказательством, так как определение договора в [I] отличается от используемого здесь.

ТЕОРЕМА 2. **При любой коалиционной структуре σ справедливо включение $C(\mathcal{E}) \supset D(\mathcal{E})$, причем $C(\mathcal{E}) = D(\mathcal{E})$, если $N \in \sigma$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in D(\mathcal{E})$, т.е. существует квазиустойчивая система договоров V такая, что $a + x(V) = x$. Если $x \notin C(\mathcal{E})$, то найдутся коалиция S и состояние $y \in X$ такие, что $\sum\limits_{i \in S} y^i = \sum\limits_{i \in S} a^i$ и $y^i \underset{i}{\geqslant} x^i$, $i \in S$, причем $y^{i_0} \underset{i_0}{>} x^{i_0}$ для некоторого $i_0 \in S$. Систему договоров V можно представить в виде $V = \{v_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ и для некоторого $\xi_0 \in \Xi$ положить $x^i(v_{\xi_0}) = y^i - a^i$ и $x^i(v_{\xi_0}) = 0$, если $i \in S$ и соответственно $i \notin S$. Далее, пусть $S(v_{\xi_0}) = S$ и

$$\bar{V} = \{v_\xi\}_{\xi \in (\Xi \setminus \Xi^*(S)) \cup \{\xi_0\}}.$$

Тогда $\bar{V} \underset{S}{>} V$, т.е. система договоров V не является квазиустойчивой, что противоречит первоначальному предположению. Следовательно, имеет место включение $C(\mathcal{E}) \supset D(\mathcal{E})$.

Пусть теперь $x \in C(\mathcal{E})$ и $N \in \sigma$. Система договоров V, состоящая из единственного договора v такого, что $x(v) = x - a$ и $S(v) = N$, квазиустойчива. Действительно, если это не так, то существуют коалиция $S \in \sigma$ и система договоров $\bar{V} \in F(V, S)$ такие, что для каждого $i \in S$ выполняется условие

$$a^i + x^i(\bar{V}) \underset{i}{\geqslant} a^i + x^i(V), \tag{4}$$

а для некоторого $i_0 \in S$ более сильное условие

$$a^{i_0} + x^{i_0}(\bar{V}) \underset{i_0}{>} a^{i_0} + x^{i_0}(V).$$

Если при этом $v \in \bar{V}$, то условие (4) выполняется для всех $i \in N$. Это значит, что

$$a + x(\bar{V}) \underset{N}{>} a + x(V),$$

т.е. $x \notin C(\mathcal{E})$. Если $v \notin \bar{V}$, то можно определить $y \in X$, положив $y^i = a^i$ для $i \notin S$ и $y^i = a^i + x^i(\bar{V})$ для $i \in S$. В результате получим $y \underset{S}{>} x$, следовательно, $x \notin C(\mathcal{E})$, что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $N \in \sigma$, используемое при доказательстве включения $D(\mathcal{E}) \supset C(\mathcal{E})$, столь же естественно, как, напри-

мер, требование оптимальности решения в смысле Парето. В классической модели рынка это условие выполняется, так как $\sigma = 2^N$.

§2. Некоторые модификации определения устойчивой системы договоров

Напомним основные определения из [I]. Пусть v_{ij} - m-мерный вектор обмена продуктами между участниками i и j, где положительные компоненты показывают количество соответствующих продуктов, которые участник j должен передать участнику i, а отрицательные - наоборот. По определению имеем $v_{ij} = -v_{ji}$.

Договором называется совокупность векторов $v(S) = \{v_{ij}\}_{i,j \in S}$, где S - некоторая коалиция из σ. Вектор обмена продуктами между участниками i и j из S обозначается через v_{ij} или $v_{ij}(S)$.

Договор $v(S)$ называется правильным, если для любого $i \in S$ найдутся j и k из S такие, что $v_{ij}(S)$ содержит положительные, а $v_{ik}(S)$ - отрицательные компоненты. Выделение из всей совокупности мыслимых договоров именно правильных (в указанном выше смысле) связано с интерпретацией процедуры разрыва договоров (см. [I]).

С произвольным договором $v(S)$ можно связать набор векторов $\{x^i(v(S))\}_{i \in S}$, полагая

$$x^i(v(S)) = \sum_{j \in S, j \neq i} v_{ij}(S), \qquad (5)$$

или вектор $x(v(S))$ такой, что $x^i(v(S))$ определяется равенством (5) при $i \in S$ и $x^i(v(S)) = 0$ при $i \notin S$. Из равенства $v_{ij} = -v_{ji}$ непосредственно следует, что $\sum\limits_{i=1} x^i(v(S)) = 0$.

ЛЕММА I. Если заданы вектор $x \in R^{mn}$ и коалиция $S \in \sigma$ такие, что $\sum\limits_{i=1} x^i = 0$ и $x^i = 0$ для $i \notin S$, а число участников коалиции S не меньше трех, то существует правильный договор $v(S)$, удовлетворяющий условию $x = x(v(S))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $S = N$. Пусть $x_{j_0}^{i_0}$ - максимальная по модулю компонента вектора x. Через Δ обозначим вектор из R^m, каждая компонента которого равна $|n x_{j_0}^{i_0}|$, и положим

$$v_{i\,i-1}(N)=\Delta-\sum_{k=1}^{i-1}x^k,\quad i=\overline{2,n};\quad v_{1n}(N)=\Delta.$$

Тогда для каждого $i=\overline{2,n-1}$ получим

$$x^i(v(N))=\sum_{j=1}^{n}v_{ij}(N)=\Delta-\sum_{k=1}^{i-1}x^k-\Delta+\sum_{k=1}^{i}x^k=x^i,$$

аналогично для $i=n$ и $i=1$ получим

$$x^n(v(N))=\Delta-\sum_{k=1}^{n-1}x^k-\Delta=x^n;\ x^1(v(N))=\Delta-\Delta+x^1=x^1.$$

При этом оказывается, что для $i=\overline{2,n-1}$ вектор $v_{i\,i-1}(N)$ содержит положительные компоненты, а вектор $v_{i\,i+1}(N)$ отрицательные. Для $i=n$ положительные компоненты содержит вектор $v_{n\,n-1}(N)$, а отрицательные - вектор $v_{n1}(N)$. Наконец, для $i=1$ вектор $v_{1n}(N)=\Delta$ положителен, а вектор $v_{12}(N)$ отрицателен. Следовательно, договор $v(N)$ правильный.

Если коалиция S состоит из двух участников i и j, то вектор v_{ij} полностью определяет договор $v(\{i,j\})$. Если число участников коалиции больше двух, то вектор $x(v(S))$ и коалиция S определяют некоторый класс договоров, среди которых есть по крайней мере один правильный. Напомним, что в предыдущем параграфе под договором понималась пара $(x(v),S(v))$, т.е. класс эквивалентных договоров. В определениях устойчивой и квазиустойчивой систем договоров как в настоящей работе, так и в [I], используются свойства пар $(x(v),S(v))$, а не самих договоров. Ограничение на использование только правильных договоров может оказаться существенным лишь для коалиций, состоящих из двух участников, при условии, что коалиция может заключить только один договор.

Чтобы сравнивать между собой различные определения устойчивой системы договоров, удобно записывать их в следующей довольно универсальной форме. Пусть определение квазиустойчивой системы договоров фиксировано и совпадает, например, с определением из предыдущего параграфа. На множестве всех мыслимых систем договоров вводится отношение эквивалентности такое, что каждая система договоров эквивалентна любому из своих разбиений. Таких отношений эквивалентности можно придумать достаточно много, причем каждому из них соответствует некоторое определение устойчивой системы договоров.

Система договоров называется устойчивой, если каждая эквивалентная ей система договоров квазиустойчива.

Это определение дословно совпадает с определением из [I], однако отношение эквивалентности между системами договоров в [I]определяется несколько иначе. С точностью до обозначений его можно определить следующим образом.

Системы договоровV и V', не доминируемые по коалициям из одного участника, называются эквивалентными, если $x(V)=x(V')$. Системы договоров, не доминируемые по коалициям из одного участника, называются ненавязанными. В [I] дано несколько более слабое определение ненавязанной системы договоров, но для дальнейшего это не существенно. Существуют достаточно простые и естественные примеры экономик, в частности рынков, для которых не существует систем договоров, устойчивых в смысле определения из [I]. Один из таких примеров строится ниже.

Пусть $\mathcal{E}$ - ящик Эджворта, т.е. двухпродуктовый рынок с двумя торговцами. Удобно считать, что общее количество каждого продукта равно единице, и пользоваться для описания состояния рынка парой скаляров α и β, которые обозначают количество первого и второго товара у первого участника. Тогда второй торговец располагает набором товаров в количествах $1-\alpha$ и $1-\beta$. Далее, пусть начальному распределению товаров соответствуют значения переменных $\alpha=1$ и $\beta=0$, а функции полезности u_1 и u_2 совпадают на множестве допустимых состояний с функцией u, где

$$u(\alpha;\beta)=2-(1-\alpha)^2-(1-\beta)^2.$$

Такие функции полезности можно рассматривать как λ-усечения строго вогнутой монотонно возрастающей функции, определенной на R_+^2. Это значит, что для рынка $\mathcal{E}$ выполняются все требования, предъявляемые к рынкам в [2].

Непосредственно проверяется, что границей Парето рассматриваемого рынка является отрезок с концами $\alpha=\beta=0$ и $\alpha=\beta=1$, а состоянием равновесия - пара $((1/2;1/2),(1/2;1/2;1/2;1/2))$, т.е. $p=(1/2;1/2)$, $\alpha=\beta=1/2$. Предполагается, что допустимы все коалиции, поэтому ядром рынка является часть границы Парето, а именно, отрезок с концами

$$\alpha=\beta=1-\sqrt{2}/2, \quad \alpha=\beta=\sqrt{2}/2.$$

Будем называть r -кратной репликой $\mathcal{E}^r$ экономики $\mathcal{E}$ составную экономическую модель, составленную из r субэкономик $\mathcal{E}(\nu)$, $\nu = \overline{1,r}$, идентичных исходной экономической модели. Все составляющие $\mathcal{E}(\nu)$ отличаются от соответствующих им составляющих других субэкономик только номером ν. Как и прежде, предполагается, что допустимы любые коалиции. В этом случае [2] для состояний $\{\alpha(\nu), \beta(\nu)\}_{\nu=1}^{r}$ из из рынка $\mathcal{E}^r$ выполняются равенства $\alpha(\nu) = \alpha(1)$ для всех $\nu = \overline{1,r}$, причем $(\alpha(\nu), \beta(\nu))$ принадлежит ядру исходной экономики $\mathcal{E}$. Таким образом, состояние из ядра описывается одним параметром $\alpha = \beta$. Остается показать, что для любого значения параметра α найдется правильная ненавязанная система договоров V, не являющаяся квазиустойчивой, такая, что

$$((\alpha;\alpha), (1-\alpha;\, 1-\alpha)) = a(\nu) + x(\nu)(V), \quad \nu = \overline{1,r}.$$

Имеет смысл рассмотреть отдельно состояния из ядра, соответствующие значениям параметра $\alpha \neq 1/2$ и $\alpha = 1/2$. Если $\alpha \neq 1/2$, то без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 1/2$. С другой стороны, $\alpha \leqslant \sqrt{2}/2$, так как состояние $(\alpha;\alpha)$ содержится в ядре исходного рынка. По этой же причине $u(1-\alpha;1-\alpha) \geqslant u(0;1)$, следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$u(1-(1-\varepsilon)\alpha;\ 1-(1-\varepsilon)\alpha-\varepsilon) = u(1-\alpha;\ 1-\alpha).$$

В самом деле, существование такого $\varepsilon > 0$ эквивалентно существованию положительного корня уравнения

$$(1-\varepsilon)^2\alpha^2 + [(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon]^2 = 2\alpha^2. \tag{6}$$

Уравнение (6) легко приводится к виду

$$\varepsilon(\varepsilon - 2\alpha\varepsilon + 2\alpha^2\varepsilon + 2\alpha - 4\alpha^2) = 0,$$

его корнями являются числа

$$\varepsilon_1 = 0; \quad \varepsilon_2 = 2\alpha(2\alpha-1)/((1-\alpha)^2+\alpha^2).$$

Учитывая, что $\sqrt{2}/2 \geqslant \alpha > 1/2$, можно оценить значения ε_2. Понятно, что $\varepsilon_2 > 0$, так как $(2\alpha-1)2\alpha$ и $(1-\alpha)^2+\alpha^2$ – положительные числа. Остается заметить, что

$$2\alpha(2\alpha-1) + (1-\alpha)^2 - \alpha^2 = 4\alpha^2 - 2\alpha - 1 + 2\alpha - 2\alpha^2 = 2\alpha^2 - 1,$$

причем равенство достигается только при $\alpha = \sqrt{2}/2$. Поскольку

$$u((1-\alpha)(1-\varepsilon_2);\ (1-\alpha)(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_2)=u(1-\alpha;\ 1-\alpha)\geq u(0;\ 1),$$

для всех $\varepsilon>\varepsilon_2$ должно выполняться неравенство

$$u((1-\alpha)(1-\varepsilon);\ (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon)<u(1-\alpha;\ 1-\alpha),$$

а для $0<\varepsilon<\varepsilon_2$ – неравенство

$$u((1-\alpha)(1-\varepsilon);\ (1-\alpha)(1-\varepsilon)+\varepsilon)>u(1-\alpha;\ 1-\alpha).$$

В противном случае уравнение (6) имеет еще один (третий) корень, чего не может быть. Если $\varepsilon_2>1/2$, то нужная система договоров V состоит всего из z договоров, по одному для каждой из субэкономик $\mathcal{E}(\nu),\ \nu=\overline{1,z}$. При любом ν договор между торговцами $(1,\nu)$ и $(2,\nu)$ полностью описывается вектором $v_{(1,\nu),(2,\nu)}=(\alpha-1;\ \alpha)$. Система договоров V заведомо является правильной и ненавязанной. В то же время V не является квазиустойчивой, так как торговцы $(2,\nu)$ и $(2,\nu')$ могут разорвать договор $v(\{(1,\nu');\ (2,\nu')\})$ и заключить новый договор $v(\{(2,\nu);\ (2,\nu')\})$, где $v_{(2,\nu),(2,\nu')}=((\alpha-1)/2;\ \alpha/2)$. В результате участники $(2,\nu)$ и $(2,\nu')$ будут иметь одинаковые наборы продуктов $((1-\alpha)/2;\ 1-\alpha/2)$, что соответствует значению $\varepsilon=1/2<\varepsilon_2$. Следовательно, $u((1-\alpha)/2;\ 1-\alpha/2)>u(1-\alpha;\ 1-\alpha)$, т.е. коалиция $\{(2,\nu);\ (2,\nu')\}$ блокирует систему договоров V. Если $\varepsilon_2\leq 1/2$, то найдется $\bar{\varepsilon}\leq 1/2$ такое, что $\varepsilon_2<\bar{\varepsilon}<2\varepsilon_2$. Каждый из договоров системы V следует разбить на два договора:

$$\bar{\varepsilon}v(\{(1,\nu);\ (2,\nu)\});\ (1-\bar{\varepsilon})v(\{(1,\nu);\ (2,\nu)\}),\quad \nu=\overline{1,z}.$$

Получаемая в результате система договоров будет правильной и в силу выбора $\bar{\varepsilon}$ ненавязанной. Остается заметить, что торговцы $(2,\nu)$ и $(2,\nu')$ могут блокировать эту систему договоров, разрывая договор $\bar{\varepsilon}v(\{(1,\nu);\ (2,\nu)\})$ и заключая новый договор $v(\{(2,\nu),(2,\nu')\})$, для которого $v_{(2,\nu),(2,\nu')}=(\bar{\varepsilon}(\alpha-1)/2;\ \bar{\varepsilon}\alpha/2)$.

Несколько сложнее построить подходящую систему договоров для состояния из ядра экономики, соответствующего значению параметра $\alpha=1/2$. Как и в случае $\varepsilon_2\leq 1/2$, каждому ν сопоставим пару договоров $v(\{(1,\nu);\ (2,\nu)\})$ и $v'(\{(1,\nu);(2,\nu)\})$, где

$$v_{(1,\nu),(2,\nu)}=(-0{,}25;0{,}33);\ v'_{(1,\nu)(2,\nu)}=(-0{,}25;\ 0{,}17).$$

Полученная система договоров V является ненавязанной, так как при разрыве договора $v(\{(1,\nu);\ (2,\nu)\})$ получаем

$$u(0{,}75;\ 0{,}17) = 1{,}2488; \quad u(0{,}25;\ 0{,}83) = 1{,}4086,$$

а при разрыве договора $v'(\{(1,\nu);(2,\nu)\})$

$$u(0{,}75;\ 0{,}33) = 1{,}4886; \quad u(0{,}25;\ 0{,}67) = 1{,}3286,$$

т.е. значения функций полезности не превосходит I,5. Однако система договоров V не является квазиустойчивой, так как торговцы $(1,\nu)$ и $(1,\nu')$ могут разорвать договор $v'(\{(1,\nu);(2,\nu)\})$ и заключить новый договор $v(\{(1,\nu);(1,\nu')\})$, где $v_{(1,\nu),(1,\nu')} = (-0{,}125;\ 0{,}125)$. В результате торговцы $(1,\nu)$ и $(1,\nu')$ оказываются в одинаковом состоянии (0,625; 0,4I5), которому соответствует значение целевой функции

$$u(0{,}625;\ 0{,}415) = 2 - (0{,}375)^2 - (0{,}585)^2 = 1{,}52015,$$

большее, чем $u(1/2;\ 1/2) = 1{,}5$. Следовательно, коалиция $\{(1,\nu);(1,\nu')\}$ блокирует систему договоров V. Таким образом, множество систем договоров, устойчивых в смысле определения из [I], пусто для всех экономик $\mathcal{E}^z$, $z=\overline{2,\infty}$. Заметим, что для любой из экономик $\mathcal{E}^z$ состояние $\{x(\nu)\}_{\nu=1}^{z}$, где $x(\nu) = (1/2;\ 1/2;\ 1/2;\ 1/2)$, является вполне договорным в смысле определения из предыдущего параграфа. Это следует непосредственно из теоремы I. Достаточно легко убедиться, что других вполне договорных состояний экономики $\mathcal{E}^z$ не существует.

Еще одно достаточно интересное определение устойчивой системы договоров получается, если среди отношений эквивалентности таких, что каждая система договоров эквивалентна всем своим разбиениям, выбрать минимальное и определить устойчивость так, как это сделано в начале параграфа. Это определение не эквивалентно, вообще говоря, определению из предыдущего параграфа, но приводит приблизительно к тем же результатам.

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л. О понятии договора в абстрактной экономике. - Оптимизация, 1980, вып. 24(4I), с.5-17.

2. РОЗЕНМЮЛЛЕР И. Кооперативные игры и рынки. - М.: Мир, 1974.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.05.1982 г.