Выпуск 29(46) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Имитационные модели

УДК 658.012.122

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В.В.Титов

Задачи оптимизации планирования в основном связаны с использованием методов линейного программирования. Однако многие технико-экономические показатели функционирования предприятия имеют между собой сложные нелинейные зависимости. Например, затраты на рубль товарной продукции C^V (как функция от объема производства товарной продукции V) имеют следующую зависимость:

$$C^V = f(V) = C_0^V + C_1^V V^{-\alpha},$$

где C_0^V, C_1^V, α - коэффициенты регрессионного уравнения.

В условиях серийного производства при организации движения предметов труда (деталей) по стадиям обработки (операциям технологического процесса) партиями затраты времени на обработку одной детали зависят от размеров партий деталей. Движение производства оптимальными по размеру партиями деталей обеспечивает достижение минимальных приведенных затрат [1]. Так, для всего годового выпуска x^k деталей k приведенные затраты могут быть рассчитаны по следующей формуле:

$$Z_k = C_k x^k + E H^k,$$

где C_k - себестоимость готовой детали k , E - норматив эффективности капитальных вложений, H^k - уровень незавершенного производства по детали k .

При планировании производства расчеты осуществляются в некоторой последовательности, на каждом этапе которой решаются локальные задачи. Например, определение оптимальных размеров партий деталей и других календарно-плановых нормативов осуществляется до формирования производственной программы выпуска продукции. Таким образом, задача заключается в определении различий в использовании линейных и упрощенных нелинейных моделей как для решения локальных задач технико-экономического планирования, так и более общих задач нелинейного программирования, охватывающих ту же область плановых расчетов.

Существенным ограничением по использованию методов нелинейного программирования и программ на ЭВМ является размерность решаемых задач. Для проведения практических расчетов была использована информация по одному из новосибирских заводов. Причем было выбрано частично независимое производство: прямоточная линия выпускает 9 наименований изделий, состоящих из одной детали. Заготовки для линии поступают из кузнечно-прессового цеха, где обработка деталей идет партиями. Затраты на переналадку прямоточной линии малы, а подготовительно-заключительное время по операциям в кузнечном цехе велико - достигает двух часов. Выбор такой упрощенной задачи облегчит проведение эксперимента (сравнение результатов решения по различным моделям) и позволит решить задачу нелинейного программирования, охватывающую проблему в целом.

На планируемый год задана программа выпуска продукции $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_{\bar{k}}\}$, рассчитан техпромфинплан и все необходимые технико-экономические показатели (ТЭП) относительно плана B. При фиксированной производственной программе решим частную задачу: определить оптимальные размеры партий запуска деталей в производство для кузнечного цеха. Показатель оптимальности для данной задачи - минимум приведенных затрат:

$$Z = \sum_k Z_k \to min.$$

Для плана B известны его ТЭП. Себестоимость деталей, прошедших обработку в кузнечно-прессовом цехе, равна C_k^0, размеры партий деталей - n_k^0. Если оптимальный размер партий деталей n_k не совпадает с n_k^0, то себестоимость деталей не изменится. Тогда новое значение себестоимости детали k можно рассчитать по формуле

$$C_k = C_k^1 + C_k^2 / n_k, \qquad (1)$$

где C_k^2 - затраты на переналадку оборудования, C_k^1 - себестоимость детали без учета затрат на переналадку.

Уровень незавершенного производства, связанный с выпуском продукции, складывается из следующих составляющих:

$$H^k = \sum_{\nu=1}^{4} H_\nu^k ,$$

где H_1^k – уровень незавершенного производства детали k в цикловом заделе (кузнечного цеха), H_2^k – оборотный задел по детали k между цехами, H_3^k – резервный задел деталей k перед прямоточной линией, H_4^k – уровень незавершенного производства в процессе окончательной обработки детали k, но без учета нарастания себестоимости детали на линии.

Определим приведенные затраты по детали k:

$$Z_k = b_k \left(C_k^1 + \frac{C_k^2}{n_k} \right) + EH^k . \qquad (2)$$

Формула (2) представляет собой функцию одной переменной, т.е. $Z_k = f(n_k), n_k > 0$. Эта функция непрерывна, дифференцируема и выпуклая вниз. Тогда оптимальное значение размеров партий деталей можно будет определить из следующего условия $\frac{df(n_k)}{dn_k} = 0$:

$$n_k = \left(\left[b_k C_k^2 + EP_k C_k^2 \left(\frac{\tau_k^2}{2} + \tau_k^3 + \tau_k^4 \right) \right] / \frac{E}{2} \left[P_k \tau_k^1 (d_k + C_k^1) + C_k^1 \right] \right)^{1/2}, \qquad (3)$$

P_k – суточная потребность в детали k, τ_k^2 – время межоперационного пролеживания партии деталей k и затрат на переналадку оборудования (в сутках), τ_k^3 – резерв деталей в днях потребления, τ_k^4 – длительность нахождения детали k на линии и до отправки продукции с завода, τ_k^1 – технологическая длительность обработки детали k по операциям, d_k – стоимость заготовки детали k.

Для указанных производственных условий по формуле (3) были рассчитаны значения n_k, представленные в табл. I. Анализ подробных расчетов показал, что с оптимальными размерами партий деталей связана определенная устойчивость некоторых ТЭП.

Используя информацию, полученную при организации расчетов оптимальных размеров партий деталей, осуществим построение линейной и нелинейной моделей определения оптимальной производственной программы выпуска продукции для указанного выше производства.

В линейной модели оптимальные значения n_k были использованы при определении величин t_{kl}.

Таблица I

k	n_k°	n_k	C_k	$C_k n_k$	t_k	$t_{kl} n_k$	η_l
I	4900	6927	0,I97	I364,62	9,8	20,09	6,25
2	4740	5548	0,234	I298,23	9,2	I8,48	7,57
3	4500	5005	0,277	I386,38	9,6	I7,69	7,93
4	3I70	3968	0,328	I30I,50	9,3	I6,99	8,28
5	2940	4238	0,360	I525,68	I0,3	22,20	9,0I
6	2340	3087	0,485	I497,I9	9,9	20,47	I0,83
7	I500	2242	0,7I3	I598,55	9,5	22,8I	9,6I
8	II70	I729	0,947	I637,36	I0,7	22,6	9,7I
9	980	I465	I,II0	I626,I5	I0,8	23,02	9,5I

Примечание. Здесь t_k - длительность цикла обработки деталей (в днях), t_{kl} - длительность обработки партии деталей по ведущей операции, η_l - % затрат времени на переналадку ведущей группы оборудования.

Сформулируем задачу оптимизации планирования производства: максимизировать товарный выпуск продукции при ограничениях по мощностям ведущих групп оборудования и структуре выпускаемой продукции, т.е.

$$V=\sum_k \pi_k x^k \to max,$$

$$\sum_k t_{kl} x^k \le M_l, \quad l=1,2,\dots,\bar{l};$$

$$m_k R - Q_k \ge 0, \quad x^k - \mu_k R - Q_k = 0, \quad k=1,2,\dots,\bar{k};$$

$$x^k, R, Q_k \ge 0;$$

где M_l - фонд времени работы группы оборудования l, π_k - оптовая цена изделия (детали) k, μ_k - коэффициенты структурных соотношений выпуска продукции; R - количество выпусков полных комплектов продукции; Q_k - некомплектный выпуск продукции, $m_k=\rho_k\mu_k$, ρ_k - коэффициент допустимого отклонения выпуска продукции от заданной структуры.

Результаты расчетов по модели представлены в табл. 2.

Таблица 2

		Решение по линейной модели		Решение по нелинейной модели		Относительное изменение параметров		Технико-экономические показатели			
k	$\bar{n}_k$	x^k	n_k	x^k	n_k	α_x	α_n	Обозначения показателей	Для линейной модели	Для нелинейной модели	$\tilde{x}$
I	9	75I,458	6,927	800,6I4	II,033	I,065	I,593	V	2630,848	2683,49I	I,020
2	6,5	400,487	5,548	399,500	9,470	0,997	I,707	Z^1	I802,397	I833,244	I,0I7
3	7,6	598,934	5,005	595,984	7,988	0,955	I,595	Z^2	I6,946	2I,733	I,282
4	6,7	I69,884	3,968	I72,432	8,62I	I,0I5	2,I76	Z^3	4,268	6,302	I,475
5	6,2	5I4,879	4,238	534,898	7,850	I,039	I,852	X_2	I79I,283	I820,44I	0,0I6
6	5,3	3I7,447	3,087	3I8,205	5,875	I,002	I,903	Z	I807,6I6	I838,I62	I,0I7
7	4,2	202,I25	2,242	205,I56	4,288	I,0I5	I,9I2	$V-Z$	823,232	845,329	I,027
8	2,9	I69,884	I,729	I72,432	2,27I	I,0I5	I,3I3	Z/V	0,68708	0,68499	0,997
9	2,5	I24,003	I,465	I25,865	2,032	I,0I5	I,387	H	5I,066	67,3I0	I,3I8

Примечание. Символом $\bar{n}_k$ обозначаем технологически допустимые размеры партий деталей (тыс. шт.), x^k – план выпуска продукции (тыс. шт.), n_k – оптимальные размеры партий деталей (тыс. шт.), α_x, α_n – показатели изменения выпуска продукции и размеров партий деталей, $\tilde{x}$ – относительное изменение технико-экономических показателей, $H=(Z^2X-Z^1)/E$ (тыс. руб.), Z/V – приведенные затраты на рубль товарной продукции; остальные показатели даны в тыс. руб.

Для построения нелинейной модели планирования оптимальной производственной программы выпуска продукции преобразуем формулу (2). Заменим b_k на x^k, P_k - на x^k/h, где h - количество рабочих дней в году.

Величина $(C_k^1 + C_k^2/n_k)\,b_k$ соответствует текущим затратам на производство детали k, но только до прямоточной линии. Полная себестоимость детали равна $\bar{C}_k$ и затраты по детали k в размере $\bar{C}_k - C_k^0$ не зависят от размеров партий деталей. Поэтому, обозначив через $\bar{C}_k^1$ величину $C_k^1 + \bar{C}_k - C_k^0$, определим объем текущих затрат по детали k:

$$Z_k^1 = \bar{C}_k^1 x^k + C_k^2 x^k / n_k .$$

Уровень незавершенного производства, который зависит от себестоимости детали, можно определить из формулы (2). При этом нужно учесть долю уровня незавершенного производства по детали k в процессе ее обработки на прямоточной линии, которая не учитывалась в (2). Это уточнение определяется так: $P_k(\bar{C}_k - C_k^0)\,\tau_k^4/2$. Окончательно по детали k уровень незавершенного производства Z_k^2 равен:

$$Z_k^2 = a_k^1 x^k + a_k^2 x^k n_k + a_k^3 x^k / n_k + a_k^4 n_k + a_k^5 ,$$

где a_k^ν - коэффициенты при переменных - рассчитываются из формулы (2).

Уровень незавершенного производства, который не зависит от себестоимости детали, равен:

$$Z_k^3 = a_k^6 x^k n_k + a_k^7 x^k .$$

Сформулируем нелинейную модель планирования производства; максимизировать приведенную прибыль $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = V - Z,$$

или минимизировать удельные приведенные затраты

$$\mathcal{T}^V = Z/V$$

при следующих ограничениях:

- ограничения по мощности ведущих групп оборудования

$$\sum_k t_{kl}^1 x^k + \sum_k t_{kl}^2 x^k / n_k \le M_l , \quad l = 1, 2, \dots, l_1,$$

$$\sum_k t_{kl} x^k \le M_l , \quad l = l_1 + 1, \dots, \bar{l};$$

- структура спроса на продукцию и возможные отклонения от заданной структуры

$$x^k - \mu_k R - Q_k = 0,\ m_k R - Q_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, K;$$

- фиксируемые отдельные части приведенных затрат

$$\sum_k (\bar{c}_k^1 x^k + c_k^2 x^k / n_k) - z^1 = 0,$$

$$\sum_k (a_k^1 x^k + a_k^2 x^k n_k + a_k^3 x^k / n_k + a_k^4 n_k + a_k^5) - z^2 = 0,$$

$$\sum_k (a_k^6 x^k n_k + a_k^7 x^k) - z^3 = 0;$$

- объем производства товарной продукции

$$\sum_k \pi_k x^k - V = 0;$$

- условный объем текущих затрат, т.е. при сохранении планового уровня затрат $C_{пл}^V$ на рубль товарной продукции при новом объеме ее выпуска

$$C_{пл}^V V - \chi_1 = 0;$$

- фактический объем текущих затрат на товарный выпуск продукции V

$$C_0^V V + C_1^V V^{(1-\alpha)} - \chi_2 = 0;$$

- коэффициент корректировки уровня незавершенного производства из-за изменения себестоимости продукции

$$\chi - \chi_2 / \chi_1 = 0;$$

- объем приведенных затрат

$$z^1 + \chi z^2 + z^3 - (\chi_1 - \chi_2) - z = 0,$$

где $(\chi_1 - \chi_2)$ - величина корректировки текущих затрат производства.

Для переменных заданы условия неотрицательности:

$$x^k \geqslant 0,\ R \geqslant 0,\ Q_k \geqslant 0,\ n_k \geqslant 1,\ V \geqslant V_0,$$

где V_0 - достигнутый объем производства.

Расчеты по данной модели проводились с использованием программ для решения задач нелинейного программирования, основанных на методе возможных направлений [2] . Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Как оказалось, при решении данной задачи возникают вычислительные особенности. Рассмотренная модель не относится к классу задач выпуклого программирования. Целевая функция π и нелинейные ограничения по мощностям имеют почти одинаковую структуру. Использование программ, основанных на методе возможных направлений, для решения задачи затруднено. В этом случае алгоритм метода возможных направлений вырабатывает последовательность допустимых точек, которая образует зигзагообразную траекторию вблизи нелинейных ограничивающих поверхностей. Стандартно используемые в методе возможных направлений приемы против "заедания" в данном случае оказываются неэффективными. Затраты машинного времени на получение приближенного решения могут быть значительно сокращены, если линейные ограничения учитывать по методу возможных направлений, а нелинейные - по методу внешних штрафных функций (при расчетах использовалась квадратичная функция штрафа). При выборе небольших начальных значений для коэффициентов штрафа получение на ЭВМ приближенного решения не представляет трудностей. Однако полученное приближение к решению имеет невязку порядка 10^{-2}, что практически вполне приемлемо. Решение задачи с функционалом $\mathcal{J}^{\nu}$ не вызывает особых затруднений и оба варианта решения задачи отличаются незначительно.

Как видно из расчетов, в случае дефицитности мощностей групп оборудования, на которых велико время его переналадки на обработку различных деталей, становится экономически целесообразным значительное увеличение размеров партий деталей. В данном примере достигнут рост объема производства на 2% по сравнению с оптимальным планом, рассчитанным при фиксированных размерах партий деталей. Однако при этом объем незавершенного производства возрастает на 31,8%, но приведенные затраты на рубль товарной продукции наименьшие.

Экономический анализ, который может быть осуществлен с помощью изложенной нелинейной модели, позволяет оценить отклонение локального решения, полученного с помощью расчетов по формуле (3) и линейной модели формирования производственной программы выпуска продукции, относительно более точного приближения к оптимуму. Этот анализ позволяет принять решение о величине корректировки размеров партий деталей, рассчитанных по формуле (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. СОКОЛИЦЫН С.А. Применение математических методов в экономике и организации машиностроительного производства. - Л.: Машиностроение, 1970.
2. ЗАБИНЯКО Г.И. Программы для решения задач выпуклого программирования. - Новосибирск: Б.и., 1977 (Препринт/ВЦ СО АН СССР, 52).
3. ТИТОВ В.В. Определение оптимальных размеров партий запуска деталей в производство. - Оптимальное планирование, 1970, вып. 16, с.69-76.

Поступила в ред.-изд. отдел
24.11.80 г.