1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 3(20)

УДК 513.88

О МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА - РУБИНШТЕЙНА

И.Ф.Даниленко

Пусть (R, r) - метризуемый компакт с метрикой $r = r(t,s)$; B - пространство регулярных борелевских мер на R. В подпространстве B_0 пространства B, определяемым условием $\mu(R)=0$, можно ввести метрику [1,2]

$$\|\mu\|_0 = \inf_{\mu' \in \Psi_\mu} \iint_{R\times R} r\, d\mu',$$

где Ψ_μ - множество неотрицательных борелевских мер на $R\times R$, удовлетворяющих условию $\mu(e) = \mu'(e,R) - \mu'(R,e)$ для каждого измеримого множества e. По имени авторов, которые впервые ввели эту метрику, $\|\mu\|_0$ называется метрикой Канторовича-Рубинштейна. Метрика Канторовича - Рубинштейна находит многочисленные приложения в задачах математической экономики. В [2,3] подробно изучены свойства пространства $(B_0, \|\mu\|_0)$ и пространств, с ним связанных. Сопряженным к $(B_0, \|\mu\|_0)$ является пространство функций на R, удовлетворяющих условию Липшица

$$M(x) = \sup_{t\neq s} \frac{x(t)-x(s)}{r(t,s)} < +\infty,$$

с нормой $M(x)$ (функции, отличающиеся на постоянную, отождествляются).

С помощью теоремы о двойственности экстремальных задач линейного программирования в ее наиболее общей формулировке, в [4] показано, что $\|\mu\|_0$ может быть вычислена по формуле

$$\|\mu\|_0 = \sup \int_R x(t)\,d\mu;$$

$$x(t) - x(s) \leq r(t,s).$$

Настоящая работа, в отличие от [I-4], где исходным являлось пространство $(B_0, \|\mu\|_0)$, имеет своей целью показать, как с помощью методов теории двойственности из пространства функций, удовлетворяющих условию Липшица, на B_0 можно ввести норму, эквивалентную $\|\mu\|_0$.

Пусть H - совокупность функций на R, удовлетворяющих условию $M(x) < +\infty$, с нормой $\|x\|_r = \|x \vee M(x)$, где $x = \sup_{t\in R} |x(t)|$ - норма x в пространстве $C(R)$ -непрерывных на R функций. Тогда $(H, \|x\|_r)$ является банаховой алгеброй непрерывных на R функций, разделяющей точки R. По теореме Стоуна - Вейерштрасса замыкание H по норме $C(R)$ совпадает с $C(R)$, следовательно, линейные пространства B и H находятся в двойственности посредством билинейной формы

$$\langle x, \mu \rangle = \int_R x\,d\mu.$$

Если $S = \{x : \|x\|_r \leq 1\}$ - единичный шар пространства $(H, \|x\|_r)$, то он равностепенно непрерывен и замкнут, а следовательно, и компактен в $C(R)$. Поскольку топология $\sigma(H,B)$ слабее топологии $C(R)$, то S-$\sigma(H,B)$-компактно.

Определим на B норму

$$\|\mu\|_r = \sup_{x\in S} \langle x, \mu \rangle.$$

Топология, определяемая нормой $\|\mu\|_r$, является топологией равномерной сходимости на $\sigma(H,B)$ - компактном множестве S. По теореме Макки-Аренса [5] B_r^* - пространство, сопряженное к $(B, \|\mu\|_r)$, совпадает с H. Вычислим $\|\mu\|_r$ непосредственно.

Пусть $W_0 = (R \times R) \setminus \Delta$ - подпространство топологического пространства $R \times R$, где Δ - диагональ в $R \times R$; и $W = R + W_0$ - топологическая сумма R и W_0. Топологическое пространство W метризуемо, локально компактно и счетно на бесконечности [6].

Определим оператор P из H в пространство $C(W)$ непрерывных ограниченных функций на W по формуле

$$P(x) = \begin{cases} x(t) \quad , & \text{если} \quad t \in R; \\ \dfrac{x(t) - x(s)}{r(t,s)} \;, & \text{если} \quad (t,s) \in W_o . \end{cases}$$

Оператор P линейно и изометрично вкладывает H в $C(W)$, наделенное $\sup$ - нормой.

Рассмотрим пространство B_W конечных регулярных борелевских мер на W с нормой $\|\mu'\| = |\mu'|(W)$. Пространства $C(W)$ и B_W находятся в двойственности посредством билинейной формы

$$< \tilde{x}, \mu' > = \int_W \tilde{x} \, d\mu',$$

где $\tilde{x}$ из $C(W)$, а μ' из B_W. Норма $\|\mu'\|$ совпадает с нормой пространства, сопряженного к $C(W)$.

Обозначим через $H^{\perp}$ поляру H в B_W. Из теории нормированных пространств следует, что для каждого μ из B справедливо неравенство

$$\|\mu\|_r \leq \|\mu\|_1 = \inf_{\mu' \in H^{\perp}} \|\mu + \mu'\| .$$

Мера μ' принадлежит $H^{\perp}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_R x \, d\mu' + \iint_{W_o} \frac{x(t) - x(s)}{r(t,s)} \, d\mu' = 0$$

для всех x из H. Пусть мера μ' из B_W имеет вид:

$$\mu' = \begin{cases} \mu' & \text{на} \quad R , \\ r \, \chi_{W_o} \nu & \text{на} \quad W_o , \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

где ν - мера на $R \times R$, а χ_{W_o} - характеристическая функция W_o в $R \times R$.

ЛЕММА I. Мера μ' вида (а) принадлежит $H^{\perp}$ тогда и только тогда, когда для каждого борелевского множества e из R выполняется условие

$$\mu'(e) + \nu(e,R) - \nu(R,e) = 0. \qquad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для μ' вида (а) имеем

$$\int_R x\,d\mu + \iint_{W_0} \frac{x(t)-x(s)}{r(t,s)}\,d\mu' = \int_R x\,d\mu' + \iint_{R\times R} [x(t)-x(s)]\,d\nu(e_t,e_s) =$$

$$= \int_R x\,d[\mu'(e) + \nu(e,R) - \nu(R,e)].$$

Пусть μ' принадлежит $H^{\perp}$. В силу произвольности x из H и плотности H в $C(R)$ получаем, что $\mu(e)+\nu(e,R)-\nu(R,e)=0$ для каждого борелевского e из R. Если же условие (I) выполнено, то, очевидно, что μ' принадлежит $H^{\perp}$.

Рассмотрим конус K мер μ' вида (а), удовлетворяющих условию (I) из леммы I с неотрицательной мерой ν. Докажем основной результат.

ТЕОРЕМА I. Пусть мера μ принадлежит B и

$$\|\mu\|_2 = \inf_{\mu'\in K} \{|\mu+\mu'|(R) + \iint_{R\times R} r(t,s)\,d\nu(e_t,e_s)\},$$

тогда $\|\mu\|_r = \|\mu\|_1 = \|\mu\|_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^{\perp}$ содержит K, то достаточно показать, что $\|\mu\|_r = \|\mu\|_2$. Сначала покажем, что $\|\mu\|_2$ есть норма на B. Положительная однородность и полуаддитивность μ_2 проверяется без труда. Если μ' из конуса K, то мера μ'_i вида

$$\mu'_i = \begin{cases} -\mu & \text{на } R, \\ r\,\chi_{W_0}\nu_i & \text{на } W_0, \end{cases}$$

где $\nu_i(e_t,e_s) = \nu(e_s,e_t)$ принадлежит K. Отсюда следует, что $\|-\mu\|_2 = \|\mu\|_2$. Поскольку $\|\mu\|_2 \geq \|\mu\|_1$, то $\|\mu\|_2$ – норма в B и поляра U_2° в H множества $U_2 = \{\mu : \mu\in B, \|\mu\|_2 \leq 1\}$ содержит поляру S в H множества $U = \{\mu : \mu \in B, \|\mu\|_r \geq 1\}$.

Пусть $t' \neq s'$, рассмотрим меру $\dfrac{\delta_{t'} - \delta_{s'}}{r(t',s')}$, где $\delta_{t'}, \delta_{s'}$ – единичные меры, сосредоточенные в точках t' и s' соответственно. Нетрудно проверить, что мера μ' вида

$$\mu' = \begin{cases} -\dfrac{\delta_{t'} - \delta_{s'}}{r(t',s')} & \text{на } R, \\ r \times_{W_0} \dfrac{\delta_{t'} \cdot \delta_{s'}}{r(t',s')} & \text{на } W_0 \end{cases}$$

принадлежит K, поэтому

$$\left\| \frac{\delta_{t'} - \delta_{s'}}{r(t',s')} \right\|_2 \leq \iint\limits_{R \times R} r(t,s)\, d\left(\frac{\delta_{t'} \cdot \delta_{s'}}{r(t',s')}\right) = 1.$$

Для каждого x из U_2° имеем

$$\left| \frac{x(t') - x(s')}{r(t',s')} \right| = \left| \int\limits_R x\, d\left(-\frac{\delta_{t'} - \delta_{s'}}{r(t',s')}\right) \right| \leq 1.$$

Следовательно, $M(x) \leq 1$. Возьмём $\mu = \delta_t$, тогда $\|\delta_t\|_2 \leq 1$ и для каждого x из U_2°

$$x(t) = \int\limits_R x\, d(\delta_t) \leq 1.$$

Итак, доказано, что $U_2^\circ = S$. Это означает, что H ограничено слабо $*$ замкнуто в пространстве B_2^*, сопряженном к $\bar{B}_1$ – пополнению B по норме $\|\mu\|_2$ ([7], стр. 74).

По теореме Крейна-Шмульяна ([7], стр. 77) слабое $*$ и ограниченно слабое $*$ замыкание выпуклого множества в сопряженном к банахову пространству совпадают, следовательно, H слабо $*$ замкнуто в B_2^*. Используя теорему об отделимости выпуклых множеств и тот факт, что $\bar{B}$ – пополнение B по норме $\|\mu\|_r$ содержит $\bar{B}_2$, сразу получаем $H = B_2^*$, значит, и $\|\mu\|_r = \|\mu\|_2$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $B_0 = \{\mu : \mu \in B, \mu(R) = 0\}$ – подпространство в B, наделенное нормой $\|\mu\|_r$. Тогда пространство $(B_0, \|\mu\|_r)^*$, сопряженное к $(B_0, \|\mu\|_r)$, совпадает с $H/B_0^\perp$, где $B_0^\perp$ является полярой к B_0 в H. Норма в $(B_0, \|\mu\|_r)^*$

определяется формулой

$$\|\dot{x}\|_r = M(\dot{x}) \vee \max_{t,s\in R} \frac{|x(t)-x(s)|}{2},$$

где $\dot{x} = \{x(t)+c:\ c$ вещественно$\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть следствия тривиальна. Ясно, что x принадлежит $B_o^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $x(t)$ постоянно на R. Для нормы

$$\|\dot{x}\|_r = \inf_c |x+c|_r = M(x) \vee \inf_c \{\sup|x(t)+c|\} =$$

$$= M(x) \vee \max_{t,s\in R} \frac{x(t)-x(s)}{2}.$$

Нетрудно заметить, что $M(\dot{x}) \leq \|\dot{x}\|_r \leq (\frac{D}{2} \vee 1)\, M(\dot{x})$, где D - диаметр R, причем константа $\frac{D}{2} \vee 1$ наименьшая. Из последних неравенств вытекает, что $\|\mu\|_0$ - норма Канторовича-Рубинштейна в пространстве B_o - эквивалентна норме $\|\mu\|_r$. Сформулируем теорему, аналогичную теореме 2 из [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $U^o = \{\mu:\ \mu\in B,\ |\mu|(R)\leq 1\}$ - единичный шар пространства сопряженного к $C(R)$. Справедливы следующие утверждения:

а) на U^o топология $\sigma(B,H)$ совпадает с топологией, порожденной нормой $\|\mu\|_r$,

б) U компактно в $(B, \|\mu\|_r)$,

в) симметричная, выпуклая оболочка множества $\{\delta_t^o\}$ $(t\in R)$ плотна в U по норме $\|\mu\|_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Очевидно, что топология, определяемая нормой $\|\mu\|_r$, сильнее топологии $\sigma(B,H)$. Обратно, допустим, что обобщенная последовательность $\{\mu_\alpha\}(\alpha\in A)$ из U^o $\sigma(B,H)$ - сходится к μ. Множество S компактно в $C(R)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ в S существует такое конечное множество $T=\{x_i\}$, что для каждого x из S и некоторого x_i из T, $\|x-x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. По условию $\{\mu_\alpha\}$ $\sigma(B,H)$ - сходится к μ, следовательно, $|\langle \mu-\mu_\alpha, x_i\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

для всех x_i из T при $\alpha \geq \alpha_o$. Тогда для тех же α имеем

$$|<\mu-\mu_\alpha, x>| = |<\mu-\mu_\alpha, x_i>| + |<\mu-\mu_\alpha, x-x_i>| = \varepsilon,$$

а, значит, и $\|\mu-\mu_\alpha\|_\tau \leq \varepsilon$ при $\alpha \geq \alpha_o$.

Справедливость б) следует из $\sigma(B,H)$ - компактности V, а справедливость в) из $\sigma(B,H)$-плотности в V° симметричной, выпуклой оболочки множества $\{\delta_t\}$ $(t \in R)$.

В заключение автор выражает глубокую признательность А.М. Рубинову и А.М. Вершику за внимание к настоящей работе и Г.Я.Лозановскому за ряд ценных советов, позволивших упростить доказательство теоремы I.

Литература

I. Канторович Л.В., О перемещении масс. ДАН, 1942, 37:7-8, 227-229.

2. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш., Об одном пространстве вполне аддитивных функций. Вестн.ЛГУ, 1958, 7:2, 52-59.

3. Куперт Ф., Об одном обобщении пространства Канторовича - Рубинштейна. Вестн. ЛГУ, 1966, I.

4. Вершик А.М., Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования. УМН, 1970, 25:5 (155), II7-I24.

5. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, М., "Мир", 1959.

6. K. de Leew, Banach spaces of Lipschitz functions. Studia Math., 21 (1961), 55-66.

7. Дэй М., Нормированные линейные пространства, М., Изд. ин. лит., 1961.

Поступила в редакцию
I2.IУ. 1971 г.