УДК 513.88

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

А.Д. Иоффе

В работе обсуждается общий подход к теории двойственности, для задач вариационного исчисления, основанный на идеях, развитых для некоторых частных случаев в работах автора и В.М. Тихомирова [1, 2] и Р.Т.Рокафеллара [6 - 7]. Класс вариационных задач, рассматриваемых в работе, охватывается следующей общей схемой.

Пусть X и Y - линейные пространства, двойственные относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$, $\varphi(x)$ и $\varphi^*(y)$ - пара взаимно сопряженных выпуклых функций на X и Y соответственно. Пусть, далее, L есть $\sigma(X,Y)$ - замкнутое подпространство X, $S=X/L$ -фактор-пространство X по L и $\gamma: X \to S$ - каноническое отображение.

Пусть $\xi_0 \in S$. Мы рассматриваем следующую задачу.

ЗАДАЧА I. Минимизировать

$$\varphi(x)$$

на множестве тех $x \in X$, которые удовлетворяют условию

$$\gamma(x) = \xi_0 .$$

Другими словами, задача I состоит в минимизации $\varphi(x)$ на линейном многообразии, параллельном L.

Частными случаями задачи I являются практически все известные краевые вариационные задачи с выпуклыми функционалами. Приведем соответствующие примеры. В этих примерах мы будем полагать $X=L_1^n(T)$, $Y=L_\infty^n(T)$, где T -пространство

с мерой, конкретизируемое в каждом случае, а минимизируемый функционал имеет вид $I_\varphi(x(\cdot)) = \int \varphi(t, x(t))\, d\mu$, где φ - нормальный выпуклый интегрант.

ПРИМЕР I. Пусть $L = \{x(\cdot) \in L_1^n(T) : \int x(t)\, d\mu = 0\}$. Тогда L имеет коразмерность n, S изоморфно R^n и γ сопоставляет каждой $x(\cdot) \in L_1^n$ ее интеграл.

Мы приходим, таким образом, к следующей задаче.

ЗАДАЧА Iа. Минимизировать $I_\varphi(x(\cdot))$ на совокупности $x(\cdot) \in L_1^n$, удовлетворяющих условию

$$\int_T x(t)\, d\mu = \xi_0 .$$

ПРИМЕР 2. Пусть $T = [0, t_1]$, $n = 2k$; $\varphi = \varphi(t, x, y)$; $x, y \in R^k$;

$$L = \{x(\cdot), y(\cdot) : x(\cdot), y(\cdot) \in L_1^k,\ x(t) = \int_0^t y(\tau)\, d\tau,\ x(t_1) = 0\}.$$

Фактор-пространство L_1^{2k}/L отождествимо с произведением $L_1^k \times R^k$. Именно, элементы $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ и $(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ из L_1^{2k} тогда и только тогда принадлежат одному классу смежности, когда существуют функция $\xi(\cdot) \in L_1^k$ и вектор a из R^k такие, что

$$x_i(t) = \xi(t) + \int_0^t y_i(\tau)\, d\tau, \quad (x_i(t) - \xi(t))\big|_{t=t_1} = a .$$

Задача I в данном случае преобразуется к следующей.

ЗАДАЧА Iб. Минимизировать

$$\mathcal{J}_\varphi(x(\cdot)) = \int_0^{t_1} \varphi(t, x(t) + \xi(t),\ \dot{x}(t))\, dt$$

на совокупности абсолютно непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям

$$x(0) = 0, \quad x(t_1) = a$$

($\xi(\cdot) \in L_1^k$, $a \in R^k$ заданы).

Это обычная вариационная задача с закрепленными концами.

ПРИМЕР 3. Пусть T - ограниченная область в R^n, ∂T - ее граница. Обозначим через W_1^1 соболевское пространство (однократно) обобщенно дифференцируемых функций с суммируемым

градиентом (т.е. из $u(\cdot)\in W_1^1$ следует, что $\nabla u(\cdot)\in L_1^n$) и нормой

$$\|u(\cdot)\|_W = \|u(\cdot)\|_{L_1} + \|\nabla u(\cdot)\|_{L_1^n} .$$

Пусть, далее, W_{10}^1 – замыкание в W_1^1 множества дифференцируемых, финитных (т.е. равных нулю вблизи границы) функций. Положим

$$L=\{x(\cdot)\in L_1^n : \exists u(\cdot)\in W_{10}^1 : x(\cdot)=\nabla u(\cdot)\}.$$

Фактор-пространство L_1^n / L устроено в данном случае достаточно сложно. Предположим, однако, что нам известна хотя бы одна функция $\bar{x}(\cdot)\in \gamma^{-1}(\xi_0)$. Тогда задача заключается в минимизации $I_y(x(\cdot)+\bar{x}(\cdot))$ по всем $x(\cdot)\in L$. В частности, если $\bar{x}(\cdot)$ есть обобщенный градиент некоторой функции $\bar{u}(\cdot)\in W_1^1$ и $\bar{u}(\cdot)_{\partial T}=\bar{v}(\cdot)$, то задача I сводится к следующей.

ЗАДАЧА Iв. Минимизировать

$$I_y(\nabla u(\cdot))=\int_{T_1} y(t,\nabla u(t))\,dt$$

на множестве тех $u(\cdot)\in W_1$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$u(\cdot)|_{\partial T} = \bar{v}(\cdot) .$$

Это простейшая многомерная вариационная задача. Следует заметить, что и более общие многомерные задачи можно рассматривать как частные случаи задачи I.

Обозначим через L° аннулятор L в Y, т.е.

$$L^\circ=\{y\in Y : \langle x,y\rangle=0 \quad \forall x\in L\}.$$

Как известно, S и L° двойственны относительно билинейной формы $\langle \xi,y\rangle$, индуцированной на $S\times L^\circ$ билинейной формой на $X\times Y$ (т.е. $\langle \xi,y\rangle=\langle x,y\rangle$, где x – любой элемент X такой, что $\gamma(x)=\xi$).

ЗАДАЧА II. Минимизировать

$$y^*(y)-\langle \xi,y\rangle$$

при условии $y\in L^\circ$. (Здесь L то же, что и в формулировке задачи I).

Задача II называется двойственной к задаче I. Связь между обеими задачами собственно и является предметом теории

двойственности. Сформулируем простейший, хотя и весьма важный результат, доказательство которого можно извлечь из [6].

Заменим в формулировке задачи I ξ_0 произвольным элементом $\xi \in S$. Нижнюю грань в полученной таким образом задаче обозначим через $P(\xi)$.

ТЕОРЕМА I. $\inf I + \inf \bar{II} \geq 0$. Равенство $\inf I + \inf \bar{II} = 0$ выполняется в том и только том случае, когда $P(\xi)6(S, L^\circ)$ полунепрерывна снизу в точке ξ_0. (Здесь $\inf I$ и $\inf \bar{II}$ — нижние грани в задачах I и II соответственно).

Посмотрим, каким образом формулируется двойственная задача в приведенных выше примерах.

ПРИМЕР I. Если $\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle = \int (x(t), y(t))\,d\mu = 0$ для всех $x(\cdot) \in L$ (т.е. $\int x(t)\,d\mu = 0$), то $y(t) \equiv const$, т.е. L° есть пространство тождественно постоянных функций; оно изоморфно R^n и форма $\langle \xi, y(\cdot)\rangle$ на $S \times L^\circ$ есть просто скалярное произведение в $R^n \times R^n$.

Таким образом, двойственная задача заключается в минимизации $\int \varphi^*(t,y)\,d\mu - (\xi, y)$ по всем $y \in R^n$. Этот результат был получен в [2].

ПРИМЕР 2. Пусть $(y(\cdot), v(\cdot)) \in L^\circ$, т.е.

$$\int_0^{t_1} [x(t), v(t)] + (\dot{x}(t), y(t))]\,dt = 0$$

для всякой абсолютно непрерывной функции $x(t)$, равной нулю на концах отрезка. Отсюда следует, что $v(t) = \dot{y}(t)$, т.е.

$$L^\circ = \{y(t) : y(\cdot) \in L_1^\kappa,\ \dot{y}(\cdot) \in L_1^\kappa\}.$$

Если теперь $\xi = (\xi(\cdot), a) \in S$ $(\xi(\cdot) \in L_1^\kappa,\ a \in R^n)$, $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot)) \in \gamma^{-1}(\xi)$, т.е. $x_1(t) = u(t) + \xi(t)$, $u(0) = 0$, $u(t_1) = a$, $x_2(t) = \dot{u}(t)$, и $y(\cdot) \in L^\circ$, то

$$\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle = \int_0^{t_1} [(x_1(t), \dot{y}(t)) + (x_2(t), y_2(t))]\,dt =$$

$$= \int_0^{t_1} [(u(t) + \xi(t), \dot{y}(t)) + (\dot{u}(t), y(t)]\,dt =$$

$$= (a, y(a)) - \int_0^{t_1} (\xi(t), \dot{y}(t))\,dt$$

и двойственная задача приобретает следующий вид: минимизировать

$$\int_0^{t_1} [\varphi^*(t, \dot y(t), y(t)) - (\xi(t), \dot y(t)] dt - (a, y(a)).$$

Этот результат был получен в [6].

ПРИМЕР 3. Двойственная задача заключается в минимизации

$$\int_T \varphi^*(t, y(t))\, dt - \int_T (\bar v(\sigma), y(\sigma))\, d\sigma$$

на совокупности $y(\cdot) \in W^1_\infty$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{div} y(t) = 0$$

(разумеется, дивергенция понимается в смысле обобщенных функций).

Как мы уже отмечали, теория двойственности основывается на совместном изучении обеих задач. Ее цель дать ответ на следующие вопросы.

1. При каких условиях

$$\inf I + \inf II = 0.$$

Как уже было отмечено, этот вопрос сводится к выяснению условий, гарантирующих полунепрерывность $P(\xi)$ в точке ξ_0.

2. При каких условиях

$$\inf I + \min II = 0$$

(т.е. когда нижняя грань в двойственной задаче достигается).

Легко видеть, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $P(\xi)$ субдифференцируема в точке ξ_0, т.е. когда существует вектор $y_0 \in L^\circ$ такой, что $y_0 \in \partial P(\xi_0)$, т. е.

$$P(\xi) - P(\xi_0) \geq \langle \xi - \xi_0, y_0 \rangle$$

для всех $\xi \in S$.

Для доказательства отметим сначала, что функция на L, сопряженная с P, равна ограничению φ^* на L°.

Заменим теперь в формулировке задачи II ξ_0 произвольным ξ и нижнюю грань во вновь полученной задаче обозначим $Q(\xi)$. Пусть теперь $y_0 \in L^\circ$ и $P(\xi_0) + Q(\xi_0) = 0$,

$$Q(\xi_0) = \varphi^*(y_0) - \langle \xi_0, y_0 \rangle.$$

Тогда, с одной стороны,

$$P(\xi_\circ)+\varphi^*(y_\circ)-\langle \xi_\circ, y_\circ\rangle = P(\xi_\circ)+Q(\xi_\circ)=0,$$

а с другой-для любого

$$P(\xi)+\varphi^*(y_\circ)-\langle \xi, y_\circ\rangle \geq P(\xi)+Q(\xi)\geq 0,$$

откуда следует, что $y_\circ \in \partial P(\xi_\circ)$.

Обратно, если $y_\circ \in \partial P(\xi_\circ)$, то

$$\varphi^*(y_\circ)=\sup\{\langle \xi, y_\circ\rangle - P(\xi) : \xi\in S\} = \langle \xi_\circ, y_\circ\rangle - P(\xi_\circ),$$

т.е. $0=P(\xi_\circ)+\varphi^*(y_\circ)-\langle \xi_\circ, y_\circ\rangle \geq P(\xi_\circ)+Q(\xi_\circ)\geq 0$

и, следовательно, $Q(\xi_\circ)=\varphi^*(y_\circ)-\langle \xi_\circ, y_\circ\rangle$, $P(\xi_\circ)+Q(\xi_\circ)=0$.

3. При каких условиях нижняя грань в задаче I достигается.

4. Если нижняя грань в задаче I не достигается, то можно ли указать более широкий класс объектов, на котором можно было бы доопределить функционал φ таким образом, чтобы задача о минимуме φ на этом классе имела решение и ее нижняя грань в сумме с нижней гранью задачи II давала бы нуль.

5. Каковы условия экстремума в расширенной задаче. В связи с этим вопросом необходимо отметить, что удачный выбор расширенной задачи позволяет зачастую получить новую и полезную информацию и об исходной.

К настоящему времени полная теория двойственности построена лишь для простейшего из перечисленных вариантов задачи I - задачи Iа ([2]). В работах [6]-[7] первые три из перечисленных проблем решаются применительно к задаче Iб.

Здесь мы будем рассматривать задачу I в случае, когда X есть пространство L_f, порождаемое A-функцией f, а $\varphi = I_\varphi$ (см. [3]). Мы ограничиваемся, таким образом, только симметричными задачами. Однако, во-первых, такие задачи весьма часто встречаются в приложениях, особенно в многомерном случае (таковы, например, задачи о минимальной поверхности и задача Дирихле). Во-вторых, что наиболее важно, симметричные задачи, сохраняя, по-видимому, основные черты задач более общего типа, обладают все же достаточной простотой, чтобы на их примере можно было бы просмотреть все существенные аспекты теории.

Итак, пусть $f: T\times R^n \to R\cup\{+\infty\}$ есть A-функция. $L = \sigma(L_f, L_{f^*})$ - замкнутое подпространство L_f, $S=L_f/L$ и γ - каноническое отображение L_f на S.

Мы начнем сразу с изучения проблемы 2, поскольку, решив ее, мы получаем одновременно достаточные условия для проблемы I.

ПРОБЛЕМА 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия:

а) $\gamma^{-1}(\xi_0)\cap \operatorname{int} \operatorname{dom} I_f \neq \varnothing$;

б) f удовлетворяет условию (B) ;

в) $L\cap E_f$ $\sigma(L_f, L_f^*)$ - плотно в L .

Тогда $\inf I + \min \mathrm{II} = 0$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно проверить, что существует $y(\cdot)\in L^\circ$, $y(\cdot)\in \partial P(\xi_0)$.

Пусть $x_0(\cdot)\in\gamma^{-1}(\xi_0)\cap \operatorname{int}\operatorname{dom} I_f$. Тогда I_f непрерывна в точке $x_0(\cdot)$, т.е. существует окрестность $U\subset L_f$ точки $x_0(\cdot)$ такая, что $I_f(x_0(\cdot))\le k<\infty$ при $x(\cdot)\in U$. Но $\gamma(U)$ есть окрестность $\gamma(x_0(\cdot))$ и, следовательно, $P(\xi)\le k$ при $\xi\in\gamma(U)$. Поскольку $P\geqslant 0$, то $P(\xi)$ конечна и ограничена на $\gamma(U)$, т.е. непрерывна в точке $\xi_0=\gamma(x_0(\cdot))$. Поэтому существует линейный непрерывный функционал λ на S такой, что $P(\xi)-P(\xi_0)\geqslant\langle \xi-\xi_0, \lambda\rangle$ для всех $\xi\in S$.

Поскольку сильно сопряженное к S отождествимо с аннулятором L в L_f^* , мы можем считать, что $\lambda\in L_f^\wedge$ и $\langle x(\cdot),\lambda\rangle=0$ для $x(\cdot)\in L$. В силу теоремы 4.I из [3] и так как f удовлетворяет условию (B) , λ единственным образом разлагается в сумму абсолютно непрерывного функционала $y(\cdot)\in L_f$ и вполне сингулярного функционала $\tilde\lambda$.

Для каждой $x(\cdot)\in L\cap E_f$ $\langle x(\cdot),\lambda\rangle=\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle$, а поскольку $L\cap E_f$ $\sigma(L_f, L_f^*)$ - плотно в L , $\langle x(\cdot),y(\cdot)\rangle=0$ для всех $x(\cdot)\in L$, т.е. $y(\cdot)\in L_0$.

Осталось проверить, что $y(\cdot)\in\partial P(\xi_0)$. Это очевидно, если $\tilde\lambda=0$. Пусть $\tilde\lambda\neq 0$ и $\{G_\varepsilon\}$ - определяющая система подмножеств T . Пусть далее последовательность $\{x_m(\cdot)\}$ из $\gamma^{-1}(\xi_0)$ такова, что

$$I_f(x_m(\cdot))\to P(\xi_0).$$

Тогда для произвольно взятой последовательности $\{\tilde x_m(\cdot)\}$ элементов L_f

$$\lim [I_f(\tilde{x}_m(\cdot)) - I_f(x_m(\cdot)) - \langle \tilde{x}_m(\cdot) - x_m(\cdot), \lambda \rangle] =$$

$$= \lim [I_f(\tilde{x}_m(\cdot)) - P(\xi_0) - \langle \tilde{x}_m(\cdot), \lambda \rangle + \langle \xi_0, \lambda \rangle] \geqslant$$

$$\geqslant \lim [P(\gamma(\tilde{x}_m(\cdot)) - P(\xi_0) - \langle \gamma(\tilde{x}_m(\cdot)) - \xi_0, \lambda \rangle].$$

Выберем теперь ε_m таким образом, что

$$\int_{G_{\varepsilon_m}} f(t, x_m(t))\, d\mu \leqslant \frac{1}{m},$$

и положим

$$\tilde{x}_m(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \bar{\in} G_{\varepsilon_m}; \\ x_m(t), & \text{если } t \in G_{\varepsilon_m}, \end{cases}$$

где $x(t)$-произвольный фиксированный элемент $\mathcal{D}_f$. Имеем

$$I_f(x(\cdot)) - P(\xi_0) - \langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle + \langle \xi_0, y(\cdot) \rangle =$$

$$= \lim [I_f(\tilde{x}_m(\cdot)) - I_f(x_m(\cdot)) - \langle \tilde{x}_m(\cdot) - x_m(\cdot), y(\cdot) \rangle] =$$

$$= \lim [I_f(\tilde{x}_m(\cdot)) - I_f(x_m(\cdot)) - \langle \tilde{x}_m(\cdot) - x_m(\cdot), \lambda \rangle] \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний относительно условий теоремы.

Условие а) есть в некотором смысле требование невырожденности задачи I. Для задач Iа - Iв оно сводится к следующему: все граничные условия, "близкие" к заданному, должны быть допустимы в том смысле, чтобы существовала $x(\cdot) \in \mathcal{D}_f$, удовлетворяющая этим граничным условиям. В том или ином виде оно участвует в доказательстве любого содержательного результата в вариационном исчислении. Что касается условия в), то оно выполняется во всех практически важных задачах, в частности, в задачах Iа - Iв.

Наиболее ограничительным является условие б). Оно введено для того, чтобы исключить сингулярную компоненту из решения двойственной задачи. В частных случаях это удается сделать "меньшей кровью". Например, в задаче Iа утверждение, аналогичное теореме 2, справедливо вообще без условия б). Это связано с тем, что в данном случае пространство L° имеет конечную размерность. В задаче Iб условие б) удается зна-

чительно ослабить, потребовав, чтобы оно, грубо говоря, выполнялось лишь для первой группы переменных, т.е. для фазовых координат. Тогда компонента решения двойственной задачи, сопряженная к фазовой переменной (т.е. $v(t)$), абсолютно непрерывна, следовательно, абсолютно непрерывна (как интеграл от $v(t)$) и другая компонента. Возможности ослабления условия б) в задаче Iв пока не ясны.

Укажем еще одно следствие из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ. Если f удовлетворяет Δ_2 - условию, то справедливо заключение теоремы 2.

Действительно, в этом случае $\mathcal{D}_f = L_f$, f удовлетворяет условию (B) и $L_f = E_f$.

ПРОБЛЕМА 3

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены следующие условия:

а) $\gamma^{-1}(\xi_0) \cap dom\, I_f \neq \emptyset$;

б) f^* удовлетворяет условию (B) ;

в) $L^\circ \cap E_{f^*}$ $\sigma(L_{f^*}, L_f)$ - плотно в L° .

Тогда в задаче I существует решение. Более того, справедливо равенство

$$min\, I + inf\, \overline{\underline{II}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f^* удовлетворяет условию (B), то $E^*_{f^*} = L_f$ ([3] теорема 3.2). Поэтому всякое множество уровня

$$\{x(\cdot) \in L_f : I_f(x(\cdot)) \leq \alpha\},\ \alpha \geq 0,$$

не пусто и $\sigma(L_f, E_{f^*})$ компактно.

Отсюда в силу условия а) сразу следует первое утверждение теоремы.

Далее, в силу условия в), аннулятор $L^\circ \cap E_{f^*}$ в L_f совпадает с L , т.е. L $\sigma(L_f, E_{f^*})$ - замкнуто. Поэтому γ есть непрерывное отображение L_f на S , если их рассматривать в топологиях $\sigma(L_f, E_{f^*})$ и $\sigma(S, L^\circ \cap E_{f^*})$ соответственно. Отсюда в свою очередь следует, что все множества

$$\{\xi \in S\} : P(\xi) \le \alpha \}$$

$\sigma(S, L^\circ \cap E_{f^*})$ - компактны и, значит, $\sigma(S, L^\circ)$ - замкнуты (поскольку последняя топология сильнее). Поэтому P полунепрерывна снизу относительно топологии $\sigma(S, L^\circ)$. Теорема доказана.

Доказанная теорема, если ее интерпретировать в терминах задачи Iв, содержит классический результат о разрешимости многомерных вариационных задач (см., например, [4] стр. 24). Использованная здесь аргументация близка, по существу, к рассуждениям Олеха [5], который получает этот результат, доказывая $\sigma(L_1, L_\infty)$ -компактность множеств уровня I_f.

Следует заметить, что в данном случае симметричность f не играет никакой роли. Если f - произвольный нормальный выпуклый интегрант, такой, что $f^*(t,y)$ суммируемы для всех $y \in R^n$, мы всегда сможем подобрать A - функцию φ таким образом, чтобы φ^* удовлетворяла условию (B) и множества уровня I_f были бы $\sigma(L_\varphi, \bar{E}_{\varphi^*})$ - компактны. Например, мы можем взять

$$\varphi^*(t,y) = max[max(f^*(t,y), f^*(t,-y)) - f^*(t,0), |y|];$$

$$\varphi(t,x) = \varphi_t^{**}(y).$$

ПРОБЛЕМЫ 4 и 5.

Положим $\mu^\circ = L^\circ \cap E_{f^*}$, и пусть M - аннулятор M° в $E^*_{f^*} = L_f \oplus \Lambda$. Пусть $S' = E^*_{f^*}/M$ и γ' - каноническое отображение $E^*_{f^*}$ в S'. Пусть, наконец, $x_\circ(\cdot) \in L_f$ - произвольный допустимый элемент задачи I, т.е. $\gamma(x_\circ(\cdot)) = \xi_\circ$. Рассмотрим следующие задачи.

ЗАДАЧА I'. Минимизировать

$$I_f(\lambda)$$

при условиях $\lambda \in E^*_{f^*}$, $\gamma'(\lambda) = \gamma'(x_\circ(\cdot))$.

ЗАДАЧА II. Минимизировать

$$I_{f^*}(y(\cdot)) - \langle x_\circ(\cdot), y(\cdot)\rangle$$

при условии $y(\cdot) \in M^\circ$.

ТЕОРЕМА 4.

$$inf\, I' \le inf\, I; \quad inf\, II \le inf\, II', \qquad (1)$$

и с л е д у ю щ и е у с л о в и я э к в и в а л е н т н ы:

а) $\inf I = \inf I'$;

б) $\inf \overline{II}' = \inf \overline{II}$ и $\inf I + \inf \overline{II} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (I), очевидно, следуют из включений $M^\circ \subset L^\circ$, $L \subset M$.

Для доказательства второй части теоремы заметим сначала, что нижняя грань в задаче I достигается и функция

$$P'(\xi) = \inf\{\bar{I}_f(\lambda) : \lambda \in E^*_{f^*},\quad \gamma'(\lambda) = \xi\},\quad \xi \in S',$$

$\sigma(S', M^\circ)$ -полунепрерывна снизу.

В самом деле, всякое множество

$$\{\lambda \in E^*_{f^*} : \underline{I}_f(\lambda) \leqslant \alpha\},\quad \alpha \geqslant 0,$$

$\sigma(E^*_{f^*}, E_{f^*})$ - компактно. Поэтому, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 2, получаем требуемое.

В силу теоремы I

$$\inf I' + \inf \overline{II}' = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь $\inf I = \inf I'$. Тогда

$$0 \leqslant \inf \underline{I} + \inf \overline{II} \leqslant \inf I + \inf \overline{II}' = \inf I' + \inf \overline{II}' = 0,$$

т.е. $\inf I + \inf \overline{II} = 0$, $\inf \overline{II} = \inf \overline{II}'$.

Обратно, если выполнено б), то

$$\inf I + \inf \overline{II}' = 0$$

и, в силу (2), $\inf \underline{I} = \inf I'$. Теорема доказана.

Равенство $\inf \underline{I} = \inf I'$ выполняется в задаче Iа, если только $\gamma^{-1}(\xi_0) \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} I_f \neq \varnothing$ (так как L° конечномерно, то $L^\circ = M^\circ$, а $P(\xi)$ даже непрерывна во внутренних точках $\operatorname{dom} P$). Далее, равенство $\inf \overline{II} = \inf \overline{II}'$ всегда выполняется в задаче Iб. Условия, гарантирующие полунепрерывность $P(\xi)$ для этой задачи, рассмотрены в [7].

Вообще, равенство $\inf \overline{II} = \inf \overline{II}'$ всегда выполняется, если функция на L° , сопряженная к ограничению $P'(\xi)$ на S , совпадает с I_{f^*} ; другими словами, если для всякого $y(\cdot) \in L^\circ$ найдется $\sigma(L_{f^*}, L_f)$ -сходящаяся к $y(\cdot)$ последовательность $\{y_\nu(\cdot)\}$ элементов M° такая, что $\bar{I}_{f^*}(y(\cdot)) = \underline{\lim}\, I_{f^*}(y_\nu(\cdot))$. В этом случае мы будем говорить, что M° есть существенное подпространство L° .

Теперь мы докажем последнюю теорему, имеющую отношение ко всем рассмотренным выше проблемам.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены следующие условия:

(I) f удовлетворяет условию (B);

(2) $L \cap E_f$ $\sigma(L_f, L_{f^*})$ - плотно в L;

(3) $\gamma^{-1}(\xi_0) \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$;

(4) M° есть существенное подпространство L°.

Тогда

а) нижние грани в задачах I′ и II достигаются и

$$\min I' + \min \overline{II} = 0;$$

б) если $y_0(\cdot)$ - решение задачи II, то для того, чтобы $\lambda_0 = \{x_0(\cdot), \tilde{\lambda}\}$ было решением задачи I, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t, x_0(t)) + f^*(t, y(t)) = (x_0(t), y_0(t))$$

почти везде и чтобы для всякой $y(\cdot) \in L_{f^*} \cap \mathcal{D}_{f^*}$

$$\langle \gamma'(\tilde{\lambda}), y_0(\,)\rangle \geqslant \langle \tilde{\lambda}, y(\cdot)\rangle,$$

в) если существуют обобщенная последовательность $\{y_\nu(\cdot)\}$ элементов L°, $\sigma(L_{f^*}, L_f)$ - сходящаяся к $y_0(\cdot)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $y_\nu(\cdot) + \varepsilon \cdot B_{f^*} \subset \mathcal{D}_{f^*}$ для всякого ν, то $\tilde{\lambda} = 0$ и, значит, задача I разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) Разрешимость задачи I отмечена в доказательстве предыдущей теоремы. Существование решения в задаче II и равенство

$$\inf I + \min \overline{II} = 0$$

следуют из теоремы 2.I; так как $\inf \overline{II} = \inf \overline{II}'$ (в силу условия (4)), то $\inf I = \inf I'$ и, значит,

$$\min I' = \min \overline{II}$$

б) Сначала отметим одно важное для дальнейшего обстоятельство. Поскольку M° – существенное подпространство L°, то M° $\sigma(L_f^*, L_f)$ – плотно в $L_{\circ}$ и, значит, аннулятор M° в L_f совпадает с L, т.е. $L = M \cap L_f$. Отсюда следует, что для любых двух функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из L_f соотношения $\gamma'(x_1(\cdot)) = \gamma'(x_2(\cdot))$ и $\gamma(x_1(\cdot)) = \gamma(x_2(\cdot))$ эквивалентны, т.е. множество $\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))$ для всякого $\xi \in S$ содержит ровно один элемент S' и для различных $\xi \in S$ соответствующие элементы различны.

Другими словами, $\gamma'\gamma^{-1}$ есть взаимно однозначное отображение S в S'. Кроме того, как легко видеть, $\langle \xi, y(\cdot) \rangle = \langle \gamma'(\gamma^{-1}(\xi)), y(\cdot) \rangle$ для всякой $y(\cdot) \in M^{\circ}$. Поэтому мы можем отождествить S и $\gamma'(\gamma^{-1}(S)) = \gamma'(L_f)$.

Вернемся к доказательству теоремы.

Пусть $\lambda_{\circ} = \{x_{\circ}(\cdot), \tilde{\lambda}\}$ – решение задачи I$'$ и $y_{\circ}(\cdot)$ – решение задачи II. Мы имеем в силу а), что

$$I_f(x_{\circ}(\cdot)) + I_f(\tilde{\lambda}) + I_{f^*}(y_{\circ}(\cdot)) = \langle \xi_{\circ}, y_{\circ}(\cdot) \rangle. \qquad (3)$$

Положим $\xi_1 = \gamma(x_{\circ}(\cdot)) = \gamma'(x_{\circ}(\cdot))$ и покажем, что

$$I_f(x_{\circ}(\cdot)) = P(\xi_1).$$

В самом деле, если $x(\cdot) \in L_f$, $\gamma(x(\cdot)) = \xi_1$ и $\lambda = \{x(\cdot), \tilde{\lambda}\}$, то $\gamma'(\lambda) = \gamma'(x(\cdot)) + \gamma'(\tilde{\lambda}) = \xi_1 + \xi_{\circ} - \xi_1 = \xi_{\circ}$ и, следовательно,

$$I_f(x(\cdot)) + I_f(\tilde{\lambda}) \geq P'(\xi_{\circ}) = I_f(x_{\circ}(\cdot)) + I_f(\tilde{\lambda}),$$

т.е. $I_f(x(\cdot)) \geq I_f(x_{\circ}(\cdot))$ для всякой $x(\cdot) \in \gamma^{-1}(\xi_1)$.

Поскольку функция на S, сопряженная к P, есть ограничение I_{f^*} на L^*, мы имеем

$$P(\xi_1) + I_{f^*}(y_{\circ}(\cdot)) \geq \langle \xi_1, y_{\circ}(\cdot) \rangle \qquad (4)$$

и, следовательно, в силу (3)

$$I_f(\tilde{\lambda}) \leq \langle \xi_{\circ} - \xi_1, y_{\circ}(\cdot) \rangle = \langle \gamma'(\tilde{\lambda}), y_{\circ}(\cdot) \rangle.$$

Пусть $\{y_{\nu}(\cdot)\}$ – обобщенная последовательность из M°, $\sigma(L_{f^*}, L_f)$-сходящаяся к $y_{\circ}(\cdot)$ и такая, что $I_{f^*}(y_{\circ}(\cdot)) = \lim I_{f^*}(y_{\nu}(\cdot))$. Поскольку $\gamma'(\tilde{\lambda}) = \xi_{\circ} - \xi_1 \in S = \gamma'(L_f)$,

$$\langle \gamma'(\tilde{\lambda}), y_{\circ}(\cdot) \rangle = \lim \langle \gamma'(\tilde{\lambda}), y_{\nu}(\cdot) \rangle = \lim \langle \tilde{\lambda}, y_{\nu}(\cdot) \rangle$$

(так как $y_\nu(\cdot)\in M^\circ$). Поэтому для любого $\varepsilon>0$ мы можем найти такой индекс ν, что

$$I_{f^*}(y_\nu(\cdot))\leq\langle\tilde\lambda, y_\nu(\cdot)\rangle+\varepsilon.$$

Тогда

$$I_f(\tilde\lambda)\leq\langle\tilde\lambda, y_\nu(\cdot)\rangle+\varepsilon. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$I_f(\tilde\lambda)=\sup\{\langle\tilde\lambda, y(\cdot)\rangle: y(\cdot)\in\mathcal{D}_{f^*}\cap E_{f^*}\},$$

т.е. $I_f(\tilde\lambda)\geq\langle\tilde\lambda, y_\nu(\cdot)\rangle.$ (6)

Сравнивая (5) и (6), получаем

$$I_f(\tilde\lambda)=\langle\gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle=\sup\{\langle\tilde\lambda, y(\cdot)\rangle: y(\cdot)\in E_{f^*}\cap\mathcal{D}_{f^*}\}. \tag{7}$$

Из (3) и (7), в свою очередь, следует, что в (4) имеет место строгое равенство

$$P(\xi_\circ)+I_{f^*}(y_\circ(\cdot))=I_f(x_\circ(\cdot))+I_{f^*}(y_\circ(\cdot))=\langle\xi_\circ, y_\circ(\cdot)\rangle=\langle x_\circ(\cdot), y_\circ(\cdot)\rangle \tag{8}$$

Однако для всех t, x, y

$$f(t,x)+f^*(t,y)\geq(x,y).$$

Поэтому равенство в (8) возможно тогда и только тогда, когда

$$f(t,x(t))+f^*(t,y_\circ(t))\geq(x_\circ(t), y(t))$$

почти везде. Этим завершается доказательство необходимости утверждения б) теоремы.

Докажем его достаточность. Пусть $y_\circ\in L^\circ$, $\lambda_\circ=\{x_\circ(\cdot),\tilde\lambda\}\in\gamma^{-1}(\xi_\circ)$ и $f(t,x_\circ(t))+f^*(t,y_\circ(t))=(x_\circ(t), y_\circ(t))$ почти везде,

$$\langle\gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle=\sup\{\langle\tilde\lambda, y(\cdot)\rangle: y(\cdot)\in E_{f^*}\cap\mathcal{D}_{f^*}\}.$$

Из последнего равенства в силу леммы 2.I в 3 следует, что

$$I_f(\tilde\lambda)=\langle\gamma'_\circ(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle.$$

Имеем

$$I_f(x_\circ(\cdot))+I_f(\tilde\lambda)\neq I_{f^*}(y_\circ(\cdot))=\langle x_\circ(\cdot), y_\circ(\cdot)\rangle+$$

$$+\langle\gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle=\langle\xi_\circ, y_\circ(\cdot)\rangle,$$

$$I_{f^*}(y_\circ(\cdot))-\langle\xi_\circ, y_\circ(\cdot)\rangle=\inf\mathrm{I\!I}=\inf\mathrm{I\!I}',$$

$$I_f(x_\circ(\cdot)) + I_f(\tilde\lambda) \geq \inf I',$$

$$0 = \inf I' + \inf \mathrm{II}' \leq I_f(x_\circ(\cdot)) + I_f(\tilde\lambda) + I_{f^*}(y_\circ(\cdot)) - \langle \xi_\circ, y_\circ(\cdot)\rangle = 0,$$

откуда

$$I_f(x_\circ(\cdot)) + I_f(\tilde\lambda) = \inf I',$$

что и требовалось.

в) Пусть $\{y_\nu(\cdot)\}$ – обобщенная последовательность, обладающая указанными в условии свойствами. Тогда, поскольку $\gamma'(\tilde\lambda) \in S$,

$$\langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\nu(\cdot)\rangle \to \langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle, \tag{9}$$

с другой стороны, так как M° – существенное подпространство L°, $\langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle = \max\{\langle \gamma'(\lambda), y(\cdot)\rangle : y(\cdot) \in L^\circ \cap \mathcal{D}_{f^*}\}$.
В самом деле, пусть $z_\nu(\cdot) \in M\ \mathcal{D}_{f^*}$ и $z_\nu(\cdot) \to y(\cdot) \in L^\circ \cap \mathcal{D}_{f^*}$ в топологии $\sigma(L_{f^*}, L_f)$. Тогда в силу б)

$$\langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle \geq \lim \langle \tilde\lambda, z_\nu(\cdot)\rangle =$$
$$= \lim \langle \gamma'(\tilde\lambda), z_\nu(\cdot)\rangle = \langle \gamma'(\tilde\lambda), y(\cdot)\rangle.$$

Предположим теперь, что $\gamma'(\tilde\lambda) \neq 0$. Тогда найдется $y(\cdot) \in M^\circ$ с $\|y(\cdot)\| \leq \varepsilon$ такая, что $\langle \tilde\lambda, y(\cdot)\rangle = a > 0$. Но в этом случае, с одной стороны, $y_\nu(\cdot) + y(\cdot) \in \mathcal{D}_{f^*}$ для всех ν и, значит, по доказанному,

$$\langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle \geq \langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\nu(\cdot) + y(\cdot)\rangle$$

для всех ν , а, с другой стороны, в силу выбора $y(\cdot)$ и (9)

$$\lim \langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\nu(\cdot) + y(\cdot)\rangle = a + \lim \langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\nu(\cdot)\rangle =$$
$$= a + \langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle > \langle \gamma'(\tilde\lambda), y_\circ(\cdot)\rangle.$$

Мы пришли к противоречию.

Итак, $\gamma'(\tilde\lambda) = 0$. Тогда $\gamma(x_\circ(\cdot)) = \xi_\circ$ и, поскольку $I_f(\lambda) > 0$ для всякого сингулярного $\lambda \neq 0$,

$$P(\xi_\circ) \leq I_f(x_\circ(\cdot)) \leq I_f(x_\circ(\cdot)) + I_f(\tilde\lambda) = P(\xi_\circ),$$

т.е. $I_f(\tilde\lambda) = 0 = \|\tilde\lambda\|$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ограниченные функции из M° образуют $\sigma(L_{f^*}, L_f)$-плотное подмножество M° , то утверждение в) теоремы может быть ослаблено следующим образом: если сущест-

вуют обобщенная последовательность $\{y_\nu(\cdot)\}$ элементов L°, $\sigma(L_f^*, L_f)$ -сходящаяся к $y_0(\cdot)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\tilde{y}_\nu(\cdot) = y_\nu(\cdot) + y \in dom\, I_f$ для всякого вектора $y \in R^n$ с $|y| \le \varepsilon$, то $x = 0$.

Действительно, в этом случае, если $\gamma'(\tilde{\lambda}) \ne 0$, то (так как $\gamma'(\tilde{\lambda}) \in S$) найдется ограниченная функция $z(\cdot) \in M^\circ$ такая, что $\langle \gamma'(\tilde{\lambda}), z(\cdot) \rangle > 0$. Положим $y(t) = \frac{\varepsilon}{\kappa} z(t)$, где $\kappa = \sup vrai \left\{ \frac{z(t)}{\|z(t)\|} : t \in T \right\}$. Тогда $\langle \gamma'(\tilde{\lambda}), y(\cdot) \rangle = a > 0$ и $y_\nu(\cdot) + y(\cdot) \in dom\, I_f$ для всех ν. Дальнейшие рассуждения дословно те же, что и при доказательстве теоремы.

Литература

1. Иоффе А.Д. и Тихомиров В.М.. О двойственности в задачах вариационного исчисления, ДАН СССР, 1968, 180, № 4, 789-792.
2. Иоффе А.Д. и Тихомиров В.М.. О минимизации интегральных функционалов, Функц. анализ, 1969, 3, 3, 61-70.
3. Иоффе А.Д.. Пространства Банаха, порождаемые выпуклыми интегрантами. Наст. сб., стр.47-86.
4. Morrey Ch.B., Multiple integrals in the calculus of variations. Springer-Verlag, B.-H.-N.Y., 1966.
5. Olech G., Existence theorems for optimal control problems involving multiple integrals. T.Diff. Equat., 6 (1969), 159-180.
6. Rockafellar R.T., Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations.
7. Rockafellar R.T., Existence and duality theorems for convex problems of Bolza.

Поступила в редакцию
15.IX. 1970 г.