1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 3(20)

УДК 513.918.31

ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА ВКЛЮЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

С.С. Кутателадзе

Введение

Под ограничением типа включения понимается условие вида: "искомая фигура содержится в заданной выпуклой фигуре". К задачам с условиями такого типа, как нетрудно видеть, сводится ряд экстремальных задач геометрии выпуклых поверхностей, в которых фигурируют, например, условия на диаметр, толщину, радиус вписанного шара и т.д.

Общий метод решения задач изопериметрического типа, основанный на погружении рассматриваемой задачи в задачу математического программирования в так называемом пространстве выпуклых множеств, был предложен в [1]. В частности, условие включения в многогранник заменялось конечным числом линейных ограничений на опорные расстояния. Непосредственный перенос последнего приема на случай произвольной фигуры приводит к задаче с континуумом ограничений, что до некоторой степени затрудняет ее анализ. В настоящей работе показывается, что подобные ограничения целесообразно учитывать непосредственно как простейшие операторные ограничения в пространстве выпуклых множеств.

В работе предприняты следующие попытки упрощения изложения. Во-первых, критерии оптимальности формулируются сначала для плоских задач, а затем обсуждается (достаточно рутинный) характер их изменения при переходе в пространства большей размерности. Во-вторых, ниже рассматриваются задачи с одним

ограничением общего вида, т.е. на смешанный объем, ибо случай многих ограничений приводит к аналогичным результатам.

Из-за технических трудностей рисунков в работе не содержится. Автор приобрел известные навыки построения критических фигур при анализе решений известных плоских задач, собранных, например, в монографии Боннезена и Фенхеля [2].

Обозначения и определения

Всюду ниже без пояснений используются определения и обозначения из [1], [3].

Внутренняя изопериметрическая задача

Среди фигур, лежащих в фиксированном теле $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру $\bar{\mathfrak{x}}$ наибольшей площади.

В соответствии с общей теорией [4], функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\varphi(\mathfrak{x},\alpha,\mu)=\sqrt{V(\bar{\mathfrak{x}})}\ \sqrt{V(\bar{\mathfrak{x}})}+\alpha(S(\bar{\mathfrak{x}})-S(\mathfrak{x}))+\mu(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}),$$

где $\mathfrak{x}\in\mathcal{H}_2$, $\alpha\in R_+$ и $\mu\in C^*_+(Z_2)$. В силу теоремы Брунна-Минковского и телесности конуса положительных элементов в пространстве непрерывных функций, для поставленной задачи справедлива теорема Куна-Таккера (условие Слейтера, как видно, выполнено). Следовательно, расчленяя седловые неравенства на дифференциальное условие и условие дополняющей нежесткости и вспоминая (см. [5]), что из условия $\mathfrak{x}\underset{T}{\leqslant}\mathfrak{y}$ и $V(\mathfrak{x})=V(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, где $\mathfrak{x}\in\mathcal{H}O_2$, $\mathfrak{y}\in\mathcal{H}_2$, вытекает соотношение $\mathfrak{x}\underset{T}{=}\mathfrak{y}$, получаем следующий результат:

Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением внутренней изопериметрической задачи в том и только том случае, если найдутся (критическая) выпуклая фигура $\mathfrak{x}$ и число $\bar{\alpha}\geqslant 0$, такие что

1. $\bar{\mathfrak{x}}\underset{T}{=}\mathfrak{x}+\bar{\alpha}\,\mathfrak{z}_2$;

2. $\bar{\varkappa}(z)=\varkappa_0(z)$ для всех $z\in S(\varkappa)$.

Через $S(\varkappa)=S(\mu(\varkappa))$ обозначается носитель поверхностной функции фигуры $\varkappa$. Отметим попутно, что коэффициент $\bar{\alpha}$, очевидно, определяется из условия на периметр решения.

Внешняя изопериметрическая задача

Среди фигур, содержащих фиксированную фигуру $\varkappa_0$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру $\bar{\varkappa}$ наибольшей площади.

Техника получения критерия оптимальности для этой задачи абсолютно аналогична развитой для предыдущей задачи.

Допустимое тело $\bar{\varkappa}$ является решением внешней изопериметрической задачи в том и только том случае, если найдутся (критическая) фигура $\varkappa$ и число $\bar{\alpha}\geqslant 0$ такие, что

1. $\bar{\varkappa}+\varkappa \underset{T}{\leqq} \bar{\alpha}\, \mathfrak{z}_2$;
2. $V(\bar{\varkappa})+V(\varkappa,\bar{\varkappa})=\bar{\alpha}\, V(\bar{\varkappa},\mathfrak{z}_2)$;
3. $\bar{\varkappa}(z)=\varkappa_0(z)$ для всех $z\in S(\varkappa)$.

Заметим, что в пункте I фигурирует T-вхождение, а не T-равенство и избавиться от этого, по существу, нельзя. В самом деле, рассмотрим элементарный пример: пусть $\varkappa_1$ есть шар ℓ_∞, $\varkappa_2$ -шар ℓ_1 и $\varkappa$-отрезок оси, тогда $\mu(\varkappa_1)-\mu(\varkappa_2)\in \mathcal{H}^*_{2,\varkappa}$.

Центрально-симметричная фигура максимальной площади, содержащаяся в данной

Допустимое тело $\bar{\varkappa}$ является центрально-симметричным телом максимальной площади, содержащимся в данном, в том и только том случае, если с точностью до переноса $\bar{\varkappa}$ является симметризацией Минковского $\varkappa^s$ некото-

рой (критической) фигуры $\varkappa$ и, кроме того, $\bar{\varkappa}(z)=\varkappa_0(z)$ для всех $z\in S(\varkappa)$.

При доказательстве этой теоремы следует учесть лишь один дополнительный факт из [3] : разность поверхностных функций плоских выпуклых фигур $\varkappa$ и y определяет положительный линейный по Минковскому функционал над центрально-симметричными плоскими выпуклыми компактами в том и только том случае, если симметризация Минковского фигуры y размещается при помощи параллельного переноса в симметризации Минковского фигуры $\varkappa$.

Внутренняя изопериметрическая задача в классе центрально-симметричных фигур

Среди центрально-симметричных фигур, имеющих заданный периметр и лежащих в фиксированном теле $\varkappa_0$, найти фигуру $\bar{\varkappa}$ наибольшей площади.

Допустимое тело $\bar{\varkappa}$ является решением поставленной задачи в том и только том случае, если найдутся фигура $\varkappa$ и число $\bar{\alpha}\geqslant 0$ такие, что

1. $\bar{\varkappa} \underset{T}{=} x^s + \bar{\alpha}\, z_2$;
2. $\bar{\varkappa}(z)=\varkappa_0(z)$ для всех $z\in S(\varkappa)$.

При анализе конкретной задачи уместно сопоставить этот признак с критериями, приведенными для первой и третьей задач.

Изопериметрическая задача с зоной

Среди фигур заданного периметра и таких, что $\varkappa(z)\leqslant x(z)$ для $z\in S\subset Z_2$, где S – некоторый (для удобства) симметричный компакт, найти фигуру наибольшей площади.

В этом случае ограничение следует рассматривать как операторное ограничение из $C(Z_2)$ в $C(S)$. Метод анализа не меняется.

Допустимое тело $\bar{\varkappa}$ является

решением поставленной задачи в том и только том случае, если найдутся (критическая) фигура и число $\bar{\alpha} \geqslant 0$ такие, что

1. $\bar{x} \underset{T}{=} x + \bar{\alpha} z_2$;
2. $s(x) \subset S$;
3. $\bar{x}(z) = x_0(z)$ для всех $z \in S(x)$.

Критерии оптимальности в многомерных пространствах

Для общей изопериметрической задачи, т.е. экстремальной задачи, в которой ограничения и целевая функция задаются смешанными объемами, можно, как правило, получить лишь необходимые условия экстремума. Дело в том, что "изопифанная" задача, например, "выпукла не в ту сторону". В полном объеме предыдущие результаты переносятся на случай квазивогнутых задач типа изопериметра. Таким образом, аналогом внешней изопериметрической задачи будет не внешняя "изопифанная" задача, а внешняя задача Урысона, т.е. задача максимизации объема при заданной интегральной ширине. Напомним попутно, что на плоскости интегральная ширина и периметр фигуры суть пропорциональные функционалы.

Другое принципиальное отличие плоскости от пространств большей размерности состоит в том, что лишь на ней совпадают суммы Бляшке и Минковского. При этом, как видно, в приведенных выше признаках речь идет о функциональных, двойственных условиях, т.е., в частности, о суммах Бляшке. Это означает, что при переформулировке плоских критериев оптимальности на случай многомерных пространств суммы Минковского следует заменять суммами Бляшке. Если, например, речь идет о поиске центрально-симметричной фигуры, то в соответствующем признаке возникнет не симметризация Минковского, а симметризация Бляшке.

Третья важная особенность пространств размерности больше 2 - это наличие неотрицательных, инвариантных относительно сдвигов мер, которые невозможно трактовать как поверхностные функции некоторых выпуклых тел. Это обстоятельство приводит к тому, что в признаке оптимальности фигурирует, как правило,

не критическая фигура, а критическая мера.

И, наконец, последнее свойство - различие отношений T-предшествования (упорядоченности линейно сильнее) [1], [3] и T-вхождения при $n>2$. Поясним это примером.

Пусть $n>2$ и число β выбрано из условия

$$1<\beta<\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}.$$

Определим следующие выпуклые компакты:

$$\mathfrak{x}=2\mathfrak{z}_n;$$

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{z}_n+\gamma\mathfrak{z}_{n-2},$$

здесь $\gamma=\beta^{\frac{1}{n-2}}$. Так как $\gamma>1$, то $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ несравнимы в смысле предпорядка $\underset{T}{\geq}$. С другой стороны, $\mathfrak{x}\underset{T}{\geq}\mathfrak{y}$. В самом деле, замечая, что $V_1(\mathfrak{z}_{n-2},\mathfrak{z})=0$ для любой выпуклой поверхности $\mathfrak{z}$, ввиду полилинейности и монотонности смешанного объема, последовательно имеем:

$$V_1(\mathfrak{y},\mathfrak{z})=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-k}^{k}\gamma^{k}V(\mathfrak{z}_n,\dots,\mathfrak{z}_n,\underbrace{\mathfrak{z}_{n-2},\dots,\mathfrak{z}_{n-2}}_{k},\mathfrak{z})\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-k}^{k}\gamma^{k}V_1(\mathfrak{z}_n,\mathfrak{z})+\gamma^{n-1}V_1(\mathfrak{z}_{n-2},\mathfrak{z})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-k}^{k}\gamma^{k}V_1(\mathfrak{z}_n,\mathfrak{z})\leq(2^{n-1}-1)\beta V_1(\mathfrak{z}_n,\mathfrak{z})\leq$$

$$\leq 2^{n-1}V_1(\mathfrak{z}_n,\mathfrak{z})=V_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}).$$

Приведенные обстоятельства показывают, что двойственное исследование многомерных задач поставленных типов содержит, по существу, лишь одно отличие от плоского случая, именно анализ опорных функций заменяется анализом поверхностных функций. Приведу пример.

Внешняя задача Урысона

Среди тел, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданную интегральную ширину, найти тело максимального объема.

Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением внешней задачи Урысона в том и только том случае, если

найдутся (критическая) неотрицательная мера μ и число $\bar{\alpha} \geqslant 0$, такие что

1. $\mu(\bar{\varkappa}) + \mu << \bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_n)$;
2. $V(\bar{\varkappa}) + \frac{1}{n}\int_{2n}^{L} \bar{\varkappa}\, d\mu = \bar{\alpha} V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{\varkappa})$;
3. $\bar{\varkappa}(z) = \varkappa_0(z)$ для всех $z \in s(\mu)$.

Рассмотрим, например, случай, когда $\varkappa_0 = \mathfrak{z}_{n-1}$. Тогда, как видно, искомым телом является некоторая шаровая линза, а критической мерой – след поверхностной функции шара на дополнение носителя этой линзы.

Заключение

Приводимый выше способ учета ограничений типа включения пригоден для исследования разнообразных экстремальных задач геометрии выпуклых поверхностей. При этом отличительной его особенностью является замена "интуиции" опорных функций "интуицией" поверхностных функций.

В заключении уместно также подчеркнуть, что при решении конкретной задачи приведенные выше и в [I] методы рассуждений целесообразно комбинировать с известными приемами геометрии и математического программирования. Проиллюстрируем это последнее положение достаточно типичным примером: при заданной толщине и интегральной ширине выпуклой поверхности максимизировать ее объем. Прежде всего, по постановке эта задача "выпукла не в ту сторону". Однако нетрудно заметить, что решение лежит в классе центрально-симметричных поверхностей, следовательно, задачу можно переформулировать следующим способом. Найти $\varkappa \in \mathcal{K}_n$ при условиях:

1. $\varkappa \geqslant \Delta\, \mathfrak{z}_n$;
2. $\varkappa(z_0) + \varkappa(-z_0) \leqslant \Delta$;
3. $V_1(\mathfrak{z}_n, \varkappa) = V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{\varkappa})$;
4. $V(\varkappa)$ достигает максимума.

Для последней задачи, являющейся задачей выпуклого программирования, не выполнено условие Слейтера. Однако можно, как и выше, сформулировать достаточный признак оптимальности,

отличающийся от необходимого лишь в случае, если "безусловная" теорема Куна-Таккера не является "условной" . Допустимое тело $\bar{x}$ является решением поставленной задачи, если указаны критическая мера μ и числа $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \geqslant 0$ такие, что

$$\mu(\bar{x}) + \mu \ll_L \bar{\alpha}\,\mu(\mathfrak{z}_n) + \bar{\beta}\,(\varepsilon_{z_0} + \varepsilon_{-z_0})\,;$$
$$V(\bar{x}) + \frac{1}{n}\int\limits_{Z_n} \bar{x}\,d\mu = \bar{\alpha}\,V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{x}) + \frac{1}{n}\bar{\beta}\,(\bar{x}(z_0) + \bar{x}(-z_0));$$
$$\bar{x}(z) = \Delta \qquad \text{для всех} \quad z \in s(\mu).$$

Литература

1. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел, Оптимальное планирование, 14 (1969), 61-80.
2. Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der Konvexen Körper. B. 1934.
3. Кутателадзе С.С., Положительные линейные в смысле Минковского функционалы над выпуклыми поверхностями, ДАН СССР, 192:5 (1970), 984-986.
4. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИИЛ, М., 1962.
5. Кутателадзе С.С., Общее решение плоской изопериметрической задачи, Оптимальное планирование, 17 (1970), 149-152.

Поступила в редакцию
15.IV. 1971 г.