УДК 513.88

ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД ШАРАМИ МИНКОВСКОГО

С.С. Кутателадзе

В настоящей заметке указывается один способ, позволяющий перенести теорему декомпозиции на случай операции пересечения. В дальнейшем без пояснений используются обозначения и результаты [I], [2].

Итак, пусть $S_1, \ldots, S_m$ – выпуклые симметричные относительно нуля тела в n-мерном числовом пространстве R^n. Пинскеровской оболочкой $\mathcal{J}(S_1, \ldots, S_m)$ множеств $S_1, \ldots, S_m$ называют наименьший выпуклый замкнутый конус в пространстве выпуклых множеств $[\mathcal{H}_n]$, содержащий $S_1, \ldots, S_m$ и, кроме того, замкнутый относительно операции ($\vee$) взятия замкнутой выпуклой оболочки объединения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Выпуклая фигура S входит в $\mathcal{J}(S_1, \ldots, S_m)$ в том и только том случае, если

$$S = \bigwedge_{(x_1, \ldots x_p) \neq 0} \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^*} \left[\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^*}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^*}} \right], \qquad (I)$$

где пересечение ($\wedge$) берется по любым ненулевым наборам $x_1, \ldots, x_p \in R^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S представимо в виде (I), то

$$\frac{S}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^*}} \leq \frac{S_1}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^*}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^*}} \qquad (2)$$

и (по [2]) $S \in \mathcal{T}(S_1, \ldots, S_m)$. Наооорот, для каждого $S \in \mathcal{T}(S_1, \ldots, S_m)$ выполнено (2), следовательно,

$$S \leq \bigwedge_{(x_1,\ldots,x_p)\neq 0} \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^*} \left[\frac{S}{\sum_{k=1}^{p}\|x_k\|_{S_1^*}} V \ldots V \frac{S_m}{\sum_{k=1}^{p}\|x_k\|_{S_m^*}} \right] \leq$$

$$\leq \bigwedge_{x\neq 0} \|x\|_{S^*} \left[\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^*}} V \ldots V \frac{S_m}{\|x\|_{S_m^*}} \right] \triangleq \widetilde{S}$$

(знак $\triangleq$ означает "по определению").

Итак, $S \leq \widetilde{S}$. С другой стороны, для каждого ненулевого вектора $z \in R^n$ имеем

$$s(z) \leq \widetilde{S}(z) \leq \|z\|_{S^*} \left[\frac{S_1}{\|z\|_{S_1^*}} V \ldots V \frac{S_m}{\|z\|_{S_m^*}} \right](z) = \|z\|_{S^*} = S(z).$$

Таким образом, $S = \widetilde{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Попутно мы доказали, что каждый элемент $S \in \mathcal{T}(S_1, \ldots, S_m)$ допускает представление

$$S = \bigwedge_{x\neq 0} \|x\|_{S^*} \left[\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^*}} V \ldots V \frac{S_m}{\|x\|_{S_m^*}} \right] \qquad (3)$$

(ниже мы покажем, что класс множеств, определяемый (3), вообще говоря, шире, чем $\mathcal{T}(S_1, \ldots, S_m)$). В частности, отсюда вытекает соотношение

$$S_1 + S_2 = \bigwedge_{x\neq 0} \left[\|x\|_{S_1^*} + \|x\|_{S_2^*} \right] \left[\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^*}} V \frac{S_2}{\|x\|_{S_2^*}} \right] ,$$

которое следует рассматривать, как уточнение соответствующего представления из [3].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть H – замкнутый конус в $\mathcal{K}_n S$ (напомним, что через $\mathcal{K}_n S$ обозначается множество шаров Минковского, т.е. $\mathcal{K}_n S$ содержит симметричные относительно нуля

телесные выпуклые компакты, а также нулевое множество) с любыми двумя элементами, содержащий выпуклую оболочку их объединения и пересечение этих элементов. Тогда H выпуклый конус.

Перейдем теперь к конусам, замкнутым относительно пересечения. Непосредственно применить теорему декомпозиции в этом случае нельзя, т.к. пересечению фигур не соответствует в общем случае поточечный минимум их опорных функций. Однако декомпозиционный подход с некоторыми модификациями проходит и в этом случае. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА I. Пусть M – выпуклый замкнутый конус в $\mathcal{K}_n S$ такой, что множество

$$S_y \triangleq \bigwedge_{s \in M} \frac{S}{s(y)}$$

телесно (здесь y – ненулевой вектор из R^n). Тогда неравенство

$$\sum_{K=1}^{m} S(x_K) \geq S(y)$$

имеет место для всех $S \in M$ в том и только том случае, если найдутся точки $z_1, \ldots, z_m$ такие, что $\sum_{K=1}^{m} z_K = y$ и, кроме того, $S(x_K) \geq S(z_K)$ для всех $S \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы для экономии места рассмотрим только случай, когда множество S_y телесно для любого $y \neq 0$. Итак, нуждается в проверке лишь необходимость сформулированного условия. Положим

$$K \triangleq \max_{x \in S_y} |x|,$$

$$\mathcal{U} \triangleq \{(\nu_1, \nu_2) \in C^*(Z_n) \times C^*(Z_n) : \nu_1 \geq 0, \ \nu_2 \geq 0,$$
$$\|\nu_1\|, \|\nu_2\| \leq K; \quad \int_{Z_n} \ell \, d(\nu_1 + \nu_2) = (\ell, y) \ (\ell \in R^n)\};$$

$$\mu_1 \triangleq |x_1|\, \varepsilon_{\frac{x_1}{|x_1|}}; \qquad \mu_2 \triangleq \sum_{k=2}^{m} |x_k|\, \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}};$$

$$\check{U} \triangleq U + M^* \times M^*.$$

Нетрудно проверить, что $\check{U}$ — непустое выпуклое широко замкнутое множество. Допустим, что $(\mu_1, \mu_2) \bar{\in} \check{U}$, тогда по теореме отделимости найдутся функции $S_1', S_2' \in C(Z_n)$ такие, что

$$\mu_1(S_1') + \mu_2(S_2') < \nu_1(S_1') + \nu_2(S_2') + f_1(S_1') + f_2(S_2') \qquad (4)$$

для всех $\nu_1, \nu_2 \in U$ и $f_1, f_2 \in M^*$. Отсюда следует, что $S_1', S_2' \neq 0$, $S_1', S_2' \in M$. Положим

$$S_1 \triangleq \frac{S_1'}{(S_1' \wedge S_2')(y)}; \qquad S_2 \triangleq \frac{S_2'}{(S_1' \wedge S_2')(y)} .$$

Пусть V - грань в $S_1^* \vee S_2^*$, содержащая y (заметим, что $\|y\|_{S_1^* \vee S_2^*} = 1$). Найдем меру $\bar{\nu}$, сосредоточенную на множестве $ex(V)$ крайних точек V, с барицентром в точке y (см. [4]).

Пусть $V_1 \triangleq ex(V) \cap S_1^*$, $V_2 (\triangleq ex(V) - V_1) \subset S_2^*$. Напомним, что множество $ex(V)$ борелевское, а потому имеет смысл говорить о мерах $\bar{\nu}_1 \triangleq \bar{\nu}/_{V_1}$, $\bar{\nu}_2 \triangleq \bar{\nu}/_{V_2}$. Будем рассматривать каждую функцию $f \in C(Z_n)$ как след соответствующей положительно однородной функции на R^n и положим

$$\nu_1 : f \longmapsto \int\limits_{\|z\|_{S_1^* \vee S_2^*} = 1} f\, d\bar{\nu}_1 ;$$

$$\nu_2 : f \longmapsto \int\limits_{\|z\|_{S_1^* \vee S_2^*} = 1} f\, d\bar{\nu}_2 ;$$

$$\nu \triangleq \nu_1 + \nu_2 .$$

Тогда

$$\|\nu_1\| = \nu_1(1) = \int\limits_{\|z\|_{S_1^* \vee S_2^*} = 1} |z|\, d\bar{\nu}_1 \leq K;$$

$$\|\nu_2\| = \nu_2(1) \leq K,$$

так как $S_1^* \vee S_2^* \subset S_y^*$. Кроме того, для каждого линейного функционала ℓ имеем $\nu_1(\ell) + \nu_2(\ell) = \bar{\nu}(\ell) = (\ell, y)$. Таким образом, $(\nu_1, \nu_2) \in \mathcal{U}$. С другой стороны.

$$\nu(S_1 \wedge S_2) = \bar{\nu}(1) = \bar{\nu}_1(1) + \bar{\nu}_2(1) = \int_{V_1} S_1(z)\, d\bar{\nu}_1 + \int_{V_2} S_2(z)\, d\bar{\nu}_2 = \nu_1(S_1) + \nu_2(S_2).$$

Окончательно из (4) имеем

$$\mu(S_1 \wedge S_2) \leq \mu_1(S_1) + \mu_2(S_2) < \nu_1(S_1) + \nu_2(S_2) = \nu(S_1 \wedge S_2) \leq \mu(S_1 \wedge S_2).$$

Полученное противоречие означает, что $(\mu_1, \mu_2) \in \check{\mathcal{U}}$. Продолжая проведенный процесс по индукции (именно здесь используется сделанная в начале доказательства оговорка), найдем меры $\nu_1, \dots, \nu_m$ такие, что $|x_k|\, \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}} - \nu_k \in M^*$ и, кроме того, $\sum_{k=1}^{m} \nu_k(\ell) = (\ell, y)$ для всех $\ell \in R^n$. Обозначим через z_k точку, представляющую ν_k, т.е. такую, что $\nu_k(\ell) = (\ell, z_k)$. Тогда по теореме декомпозиции $\nu_k(S) \geq |z_k|\, \varepsilon_{\frac{z_k}{|z_k|}}(S) = S(z_k)$ для всех $S \in M$. Таким образом, $z_1, \dots z_m$ - требуемый набор. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Множество $\mathcal{K}(S_1, \dots S_m)$ замкнуто относительно операции взятия пересечения в том и только том случае, если множества $S_1, \dots, S_m$ гомотетичны (т. е. если найдутся $\alpha_k \geq 0$ такие, что $S_1 = \alpha_k S_k$ $(k = 2, \dots, m)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нуждается в проверке лишь необходимость сформулированного условия. Для простоты ограничимся случаем $m = 2$.

Не нарушая общности, можно считать, что множества S_1 и S_2 телесны. Покажем, прежде всего, что при всяком $y \neq 0$ множество

$$S_y \triangleq \bigwedge_{S \in \mathcal{K}(S_1, S_2)} \frac{S}{S(y)}$$

телесно. Пусть для определенности $\|y\|_{S_1^*} \geq \|y\|_{S_2^*}$. Возьмем точку $z' \in S_1 \wedge S_2$, положим

$$z \triangleq \frac{z'}{\|y\|_{S_1^*}}$$

и рассмотрим линейный оператор $y \otimes z : x \longmapsto (y,x)z$.

Заметим, прежде всего, что для всякого линейного оператора $A : R^n \to R^n$ и любого множества $S \in \mathcal{T}(S_1, S_2)$ имеет место интерполяционное свойство (см. [5])

$$\|A\|_S \leqslant \|A\|_{S_1} \vee \|A\|_{S_2} \tag{5}$$

(здесь мы используем символ $\|\cdot\|_S$ для обозначения операторной нормы, порожденной S, т.е. функции $A \longmapsto \|A\|_S \triangleq$ $\triangleq \sup\{\|Ax\|_S : x \in S\}$).

В частности, ввиду того, что

$$\|y \otimes z\|_S = \sup_{x \in S} \|(y,x)z\|_S = \sup_{x \in S} |(y,x)|\,\|z\|_S = \|y\|_{S^*} \cdot \|z\|_S,$$

из соотношения (5) получим

$$\|y\|_{S^*} \cdot \|z\|_S \leqslant \|y \otimes z\|_{S_1} \vee \|y \otimes z\|_{S_2} = \|y\|_{S_1^*} \cdot \|z\|_{S_1} \vee \|y\|_{S_2^*} \cdot \|z\|_{S_2}. \tag{6}$$

Заметим, что по определению y и z справедливы соотношения:

$$\|y\|_{S_1^*} \cdot \|z\|_{S_1} = \|y\|_{S_1^*} \frac{\|z'\|_{S_1}}{\|y\|_{S_1^*}} \leqslant \|z'\|_{S_1 \wedge S_2} \leqslant 1;$$

$$\|y\|_{S_2^*} \cdot \|z\|_{S_2} = \|y\|_{S_2^*} \frac{\|z'\|_{S_2^*}}{\|y\|_{S_1^*}} \leqslant \|z'\|_{S_1 \wedge S_2} \leqslant 1.$$

Таким образом, из (6) получаем, что для всякого $S \in \mathcal{T}(S_1, S_2)$ точка $\|y\|_{S^*} z$ входит в S. Следовательно,

$$\frac{S_1 \wedge S_2}{\|y\|_{S_1^*}} \subset S_y.$$

В предложении I мы фактически доказали, что сопряженный конус $[\mathcal{T}(S_1, S_2)]^*$ есть широкое замыкание конической выпуклой оболочки множества мер вида

$$\mu \triangleq \sum_{k=1}^{p} |x_k|\, \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}} - |y|\, \varepsilon_{\frac{y}{|y|}},$$

где $\mu(S_1) \geqslant 0$, $\mu(S_2) \geqslant 0$. Ввиду телесности множества S_y и замкнутости $\mathcal{T}(S_1, S_2)$ относительно пересечения, применима теорема I и, следовательно, $[\mathcal{T}(S_1^*, S_2)]^*$ есть широкое замыкание конической выпуклой оболочки множества мер вида

$$\bar{\mu} \triangleq |x|\varepsilon_{\frac{x}{|x|}} - |y|\varepsilon_{\frac{y}{|y|}},$$

где $\bar{\mu}(S_1) \geqslant 0$, $\bar{\mu}(S_2) \geqslant 0$.

По теореме декомпозиции, если $\bar{\mu}(f_1) \geqslant 0$, $\bar{\mu}(f_2) \geqslant 0$, то $\bar{\mu}(f_0) \geqslant 0$, где $f_0(x) \triangleq f_1(x) \wedge f_2(x)$. Таким образом, в множество $\mathcal{T}(S_1, S_2)$, в частности, входят все функции вида

$$x \longmapsto \alpha S_1(x) \wedge \beta S_2(x), \tag{7}$$

где $\alpha, \beta \geqslant 0$. Т.к. $\mathcal{T}(S_1, S_2)$ состоит из выпуклых множеств, то все функции вида (7) должны быть сублинейными. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выше мы видели, что сумму множеств S_1 и S_2 из $\mathcal{K}_n$ S можно получить из S_1 и S_2 с помощью операций умножения на положительное число, взятия пересечения и операции взятия выпуклой замкнутой оболочки объединения ограниченного семейства множеств. Из теоремы 2, в частности, следует, что получить из S_1 и S_2 множество $S_1 \wedge S_2$ с помощью операций $\vee$, $+$, $\cdot$ можно не всегда (в противном случае для любых S_1, S_2 множество $\mathcal{T}(S_1, S_2)$ замкнуто относительно пересечения).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Выше (см. формулу (I)) мы видели, что элемент $S \in \mathcal{K}_n$ входит в $\mathcal{T}(S_1, S_2)$ в том и только том случае, если имеет место представление

$$S = \bigwedge_{(x_1, \dots, x_p) \neq 0} \sum_{k=1}^{p} S(x_k) \left[\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{p} S_1(x_k)} \vee \frac{S_2}{\sum_{k=1}^{p} S_2(x_k)} \right].$$

Фактически в [2] установлено несколько большее. Именно, положительно однородная непрерывная функция f является опорной функцией некоторого множества из $\mathcal{T}(S_1, S_2)$ в том и только том случае, если для любых векторов $x_1, \dots, x_p$, $y \in R^n$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{p} S_i(x_k) \geqslant S_i(y) \qquad (i = 1, 2), \tag{8}$$

выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{p} f(x_k) \geqslant f(y)$. Отметим, что ограничиться в (8) только случаем $p = 1$, вообще говоря, нельзя. В самом деле, сопряженный конус к множеству F функций из $C(Z_n)$, являющихся следами функций, удовлетворяющих соотно-

шению $((S_1(x)\geqslant S_1(y)$ и $S_2(x)\geqslant S_2(y)\Rightarrow f(x)\geqslant f(y))$, как легко видеть, является широким замыканием конической выпуклой оболочки мер вида

$$\bar{\mu} \triangleq |x|\,\varepsilon_{\frac{x}{|x|}} - |y|\,\varepsilon_{\frac{y}{|y|}},$$

где $\bar{\mu}(S_1)\geqslant 0, \bar{\mu}(S_2)\geqslant 0$. Если $F=\mathcal{F}(S_1,S_2)$, то, рассуждая стандартным способом, мы получили бы, что $\mathcal{F}(S_1,S_2)$ замкнут относительно операции поточечного минимума функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Выше мы доказали, что элементы из $\mathcal{T}(S_1,\dots,S_m)$ допускают представление (3). Теперь мы уже в состоянии показать, что класс множеств, допускающих такое представление, вообще говоря, шире, чем $\mathcal{F}(S_1,\dots,S_m)$. В качестве примера возьмем

$$S_1 \triangleq \{x\in R^2 : |x_1|+|x_2|\leqslant 1\};\quad S_2 \triangleq \{x\in R^2 : |x_1|\vee|x_2|\leqslant 1\}.$$

Нетрудно проверить, что любое множество S, удовлетворяющее интерполяционному свойству (5), допускает представление

$$S=\bigwedge_{x\neq 0} S(x)\left[\frac{S_1}{S_1(x)}\vee\frac{S_2}{S_2(x)}\right] \qquad (3\ )$$

(для доказательства этого факта достаточно заметить, что крайние точки множества $\|x\|_{S_1^*}S_1^*\wedge\|x\|_{S_2^*}S_2^*$ получаются применением к x некоторых квазипермутаторов [6] и, следовательно, входят в множество $\|x\|_{S^*}S^*$). Таким образом, класс $\mathcal{F}(S_1,S_2)$ множеств, представимых в виде (3), совпадает с классом множеств, удовлетворяющих (5). Последний класс замкнут относительно операции взятия пересечения. Таким образом, $\mathcal{T}(S_1,S_2)$ не совпадает с $\tilde{\mathcal{T}}(S_1,S_2)$, ибо, в противном случае, по теореме 2, S_1 и S_2 гомотетичны.

В заключение отметим, что представляет интерес задача явного представления элементов выпуклых подструктур в полулинеале выпуклых множеств.

Литература

I. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Некоторые классы H-выпуклых функций и множеств, ДАН СССР, 197:6 (1971), 1261-1263.

2. Кутателадзе С.С., Пример на декомпозицию, Оптимальное планирование, I7 (I970), I45-I48.

3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН, 23:6 (I968), 5I-II6.

4. Фелпс Р., Лекции по теоремам Шоке, "Мир", М., I968.

5. Митягин Б.С., Интерполяционная теорема для модулярных пространств, Матем. сб., 66 (I965), 473-482.

6. Глазман И.З., Любич Ю.И., Конечномерный линейный анализ, "Наука", М., I969.

Поступила в редакцию
25.УII. I97I г.