УДК 513.88

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ И СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОПЕРАТОРОВ

С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов

Введение

В 1953 году П.П.Коровкин [1],[2] показал, что в пространстве непрерывных функций $C(Q)$, где Q – отрезок или окружность, существуют трехмерные подпространства L, обладающие следующим свойством $(*)$. Если (A_n)-последовательность линейных положительных операторов, $A_n : C(Q) \to B(Q)$, где $B(Q)$-пространство ограниченных на Q функций, и $A_n x \to x$ для $x \in L$, то $A_n x \to x$ для всех $x \in C(Q)$. П.П.Коровкин полностью описал такие пространства. В работах его учеников рассматривались конечномерные подпространства, обладающие свойством $(*)$, в пространствах $C(Q)$, где Q - некоторые конкретные компактные топологические пространства.

Ю.А.Шашкин [3],[4],[5] дал топологическое описание компактов Q таких, что пространство $C(Q)$ имеет конечномерные подпространства, обладающие свойством $(*)$. Он же [18] отметил связь рассматриваемых вопросов с границей Шоке.

М.Л.Бродский [6] исследовал произвольные (не обязательно конечномерные) подпространства, обладающие указанным свойством.

Наконец, В.К.Дзядык [7] изучил подпространства в пространствах L^p $(1 < p < +\infty)$, обладающие свойством, аналогичным свойству $(*)$.

В работах В.С.Климова, М.А.Красносельского и Е.А.Лифшица

[8] и М.А.Красносельского и Е.А.Лифшица [9] предложено описание некоторых подпространств, обладающих свойством типа $(*)$, в произвольных банаховых полуупорядоченных пространствах.

В заметке Р.К.Васильева [10] существование конечномерных подпространств, обладающих указанным свойством, доказывается с помощью теории K-пространств.

В настоящей работе предлагается новый подход к изучению явления $(*)$, основанный на понятии супремального генератора полуупорядоченного пространства, т.е. такого конуса, что каждый элемент пространства является верхней гранью множества элементов конуса, минорирующих данный. На основе этого понятия удается не только просто описать подпространства, обладающие свойством типа $(*)$, но и указать в известном смысле необходимые и достаточные условия подобного явления. Ввиду ограниченности объема статьи мы сочли возможным указать только на наиболее типичные приложения концепции супремального порождения, не останавливаясь детально на обсуждении способов извлечения основных результатов упоминавшихся выше работ из излагаемой схемы.

Авторы пришли к понятию супремального генератора, отправляясь от теории H-выпуклых функций (см. [11]). Естественно поэтому, что при исследовании некоторых вопросов мы, иногда неявно, используем методы выпуклого анализа. Отметим также, что, по-видимому, впервые связь между конечномерными подпространствами, обладающими свойством $(*)$ (в пространстве $C([a,b])$), и супремальным порождением была замечена В.А.Баскаковым [12].

Изучение супремальных генераторов, по сути дела, является разделом теории K-пространств. Мы поэтому всюду используем язык и результаты этой теории (см. монографии [13], [14]).

Некоторые результаты этой работы анонсированы в [21].

В первом пункте статьи вводится понятие супремального генератора (относительно K-пространства) и устанавливается основная теорема, связывающая это понятие с поведением положительных операторов.

Во втором пункте вводится модификация понятия супремального генератора, именно, определяется супремальный генератор относительно семейства положительных функционалов. Изложенная конструкция позволяет изучать связь явлений типа $(*)$ с так называемыми точками гладкости [8].

Третий пункт посвящен изучению генераторов (относительно $B(Q)$ и относительно семейства функционалов) пространств $C(Q)$.

В четвертом пункте на основе техники декомпозиций Решетняка Люмиса дается характеристика супремального генератора в $C(Q)$ в терминах поведения всех (а не только конечно определенных) операторов на этом конусе.

В пятом пункте изучается сходимость положительных операторов в пространствах измеримых функций на основе изложенных выше конструкций. Полученные результаты аналогичны [8], [9], [10].

В шестом пункте вводится понятие супремального ранга компакта. Обсуждается связь этого понятия с так называемыми обобщенными системами Коровкина [4].

Седьмой пункт посвящен вычислению супремального ранга (первого порядка) компакта. Показано, что этот ранг в точности равен на единицу увеличенной размерности минимального числового пространства, в которое топологически вкладывается данный компакт. В частности, супремальный ранг окружности отличен от ранга отрезка, что показывает преимущество этого понятия по сравнению с понятием порядка минимальной системы Коровкина [3].

В восьмом пункте рассматривается связь супремального генератора и выпуклых функций.

Девятый пункт содержит некоторые простейшие примеры и контрпримеры.

1°. Рассмотрим K-пространство Y. Пусть X - векторное подпространство Y, а H - конус (= выпуклый конус) в X. Будем говорить, что H является супремальным генератором пространства X (относительно Y) или, что H супремально порождает X (относительно Y), если 1) конус H минорантен в X, т.е. для любого $x \in X$ множество $U_x = \{h \in H : h \leq x\}$ непусто, 2) для любого $x \in X$ выполняется соотношение $x = \sup U_x$.

Существование супремальных генераторов тесно связано с поведением последовательностей положительных линейных операторов*). Прежде чем сформулировать соответствующие результаты,

---

*) По-видимому, уместно заметить, что излагаемые ниже результаты переносятся и на случай порождения пространства с помощью операции $\inf$.

условимся о следующем: если V_1, V_2 - упорядоченные векторные пространства, то символом $\mathcal{L}^+(V_1, V_2)$ обозначим совокупность всех линейных положительных операторов $T: V_1 \to V_2$. Если V_2 есть K-пространство, V_1 содержится в некотором K-пространстве Y и H-конус в V_1, то будем говорить, что оператор $T \in \mathcal{L}^+(V_1, V_2)$ перестановочен с операцией sup на конусе H, если для каждого ограниченного сверху множества U из H такого, что $sup\, U \in V_1$, выполняется условие

$$\sup_{h \in U} Th = T(\sup U).$$

Имеет место следующее простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. Пусть H - супремальный генератор векторного пространства X (относительно K-пространства Y), Z - некоторое K-пространство и оператор T из $\mathcal{L}^+(X, Z)$ перестановочен с операцией sup на H. Пусть, далее, последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(X, Z)$ такова, что $(o)-\lim\limits_n T_n h \geqslant Th$ при всех $h \in H$. Тогда $T_n x \xrightarrow{(o)} Tx$ при всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и $h \in U_x$. Тогда $T_n h \leqslant T_n x$, и потому

$$Th \leqslant (o)\text{-}\underline{\lim_n}\, T_n h \leqslant (o)\text{-}\underline{\lim_n}\, T_n x.$$

Используя свойства оператора T и конуса H, имеем:

$$\sup_{h \in U_x} Th = T(\sup U_x) = Tx,$$

откуда следует неравенство

$$Tx \leqslant (o)\text{-}\underline{\lim_n}\, T_n x. \tag{I.I}$$

Рассуждая таким же образом относительно элемента $-x$, получим

$$T(-x) \leqslant (o)\text{-}\underline{\lim_n}\, T_n(-x). \tag{I.2}$$

Неравенства (I.I) и (I.2) показывают, что $Tx = (o)\text{-}\lim\limits_n T_n x$, что и доказывает предложение.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве предложения нигде не используется то обстоятельство, что H - конус.

Рассмотрим положительный линейный оператор $T: X \to Z$ (где, как и выше, Z - некоторое K-пространство). Положительным ростком оператора T на конусе H назовем множество $Spr(T, H)$, определяемое формулой

$$Spr(T,H) = \{T' \in \mathcal{L}^+(X,Z) : T'h \geq Th \quad \forall h \in H\}.$$

Заметим, что $T \in Spr(T, H)$, каков бы ни был конус H. Из предложения (I.I) немедленно вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Пусть конус H супремально порождает X, оператор $T \in \mathcal{L}^+(X, Z)$ перестановочен с операцией $\sup$ на H. Тогда

$$Spr(T, H) = \{T\}.$$

Сформулируем теперь основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ - разложение K-пространства Y (т. е. $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ - полная система попарно дизъюнктных компонент этого пространства); пусть, далее, X - линейное множество в Y, H - минорантный конус в X. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) H - супремальный генератор X.

(2) Для любого $\alpha \in A$ и любой последовательности операторов (T_n) такой, что $T_n \in \mathcal{L}^+(X, Y_\alpha)$ и $(o)\text{-}\underline{\lim}_n T_n h \geq Pr_\alpha h$ при всех $h \in H$, выполняется

$$T_n x \xrightarrow{(o)} Pr_\alpha x$$

при любом $x \in X$.
(Здесь Pr_α - оператор проектирования на компоненту Y_α).

(3) $Spr(\widetilde{P}r_\alpha, H) = \{\widetilde{P}r_\alpha\}$ при любом $\alpha \in A$.
(Здесь $\widetilde{P}r_\alpha$ - сужение оператора Pr_α на X).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (I) $\Rightarrow$ (2) следует из предложения I.I; импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна. Покажем, что имеет место (3) $\Rightarrow$ (I). Предположим, что H не является супремальным генератором. Тогда для некоторого $x' \in X$ выполняется неравенство $\sup U_{x'} < x'$. Определим оператор q, действующий из X в Y, формулой

$$q(x) = \sup U_x .$$

Так как H - (выпуклый) конус, то оператор q положительно однороден ($q(\lambda x) = \lambda q(x)$ для $\lambda \geq 0$ и $x \in X$) и супераддитивен ($q(x_1 + x_2) \geq q(x_1) + q(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X_1)$). Непосредственно из определения следует, что q монотонен. Кроме того, по предположению, $q(x') < x'$. Так как система компонент $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ полна, то найдется $\beta \in A$ такое, что $Pr_\beta q(x') < Pr_\beta x'$. Положим

$$q_\beta = Pr_\beta \circ q .$$

Из свойств операторов Pr_β и q следует, что q_β -монотонный, супераддитивный, положительно однородный оператор.

Рассмотрим в пространстве X подпространство $X' = (\lambda x')_{\lambda \in (-\infty, \infty)}$ и определим линейный оператор $B' : X' \to Y_\beta$ формулой

$$B'(\lambda x') = \lambda q_\beta (x').$$

Покажем, что B' мажорирует оператор q_β на X', т.е. при всех вещественных λ

$$B'(\lambda x') \geq q_\beta (\lambda x'). \tag{I.3}$$

В самом деле, при $\lambda \geq 0$ соотношение (I.3) очевидно. Если же $\lambda < 0$, то, используя супераддитивность и положительную однородность оператора q_β, имеем

$$B'(\lambda x') = |\lambda| (-q_\beta (x')) \geq |\lambda| q_\beta (-x') = q_\beta (\lambda x').$$

Привлекая теперь теорему Хана-Банаха-Канторовича [I4], найдем линейный оператор $B : X \to Y_\beta$, совпадающий с B' на X' и мажорирующий q_β на X (т.е. удовлетворяющий неравенствам $q_\beta(x) \leq Bx$ для всех $x \in X$). Оператор B положителен. Действительно, если $x \geq 0$, то

$$Bx \geq q_\beta (x) \geq q_\beta (0) = 0.$$

Кроме того, для $h \in H$ имеем

$$Bh \geqslant q_\beta(h) = P\tau_\beta \sup U_h = P\tau_\beta h = \widetilde{P}\tau_\beta h.$$

Таким образом, $B \in Sp\tau(\widetilde{P}\tau_\beta, H)$. С другой стороны, поскольку

$$Bx' = B'x' = P\tau_\beta q(x') < P\tau_\beta x' = \widetilde{P}\tau_\beta x',$$

то $B \neq \widetilde{P}\tau_\beta$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Считая, в частности, что A состоит из одного элемента (α) и полагая $Y_\alpha = Y$, можно в условиях (2) и (3) теоремы заменить оператор $P\tau_\alpha$ на оператор вложения $E: X \to Y$.

Введем в пространстве Y топологию $*$, порожденную (o)-сходимостью последовательностей, и покажем, что в некоторых случаях супремальное порождение тесно связано с $(*)$-сходимостью операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3. *Пусть конус H является выпуклой конической оболочкой не более чем счетного числа образующих $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$ и, кроме того, супремально порождает векторное пространство X (относительно Y), Z - некоторое K-пространство; оператор $T \in \mathcal{L}^+(X, Z)$ перестановочен с операцией $\sup$ на H. Пусть, далее, последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(X, Z)$ такова, что при всех k существует $(*)\text{-}\lim\limits_n T_n h_k = b_k$, причем $b_k \geqslant Th_k$. Тогда $T_n x \xrightarrow{(*)} Tx$ при всех $x \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и $(T_{n_i} x)$ -подпоследовательность последовательности $(T_n x)$. Рассмотрим при всех k подпоследовательности $(T_{n_i} h_k)$ и, используя диагональный процесс, найдем такую подпоследовательность $(T_{n_{i_j}})$, что последовательности $(T_{n_{i_j}} h_k)$ (o)-сходятся $(k = 1, 2, \ldots)$. Пусть теперь $h \in U_x$. Тогда $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$, где коэффициенты α_k не отрицательны и лишь конечное число их отлично от нуля. Имеем

$$Th = T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k T h_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k \le$$

$$\le (o)-\lim_j Tn_{i_j} h \le (o)-\underline{\lim_j}\, Tn_{i_j} x,$$

откуда следует, что $Tx \le (o)-\underline{\lim_j}\, Tn_{i_j} x$. Таким же образом проверяется, что

$$T(-x) \le (o)-\underline{\lim_j}\, Tn_{i_j}(-x).$$

Ясно, что $Tx = (o)-\lim_j Tn_{i_j} x$. Таким образом, из последовательности $(Tn_i\, x)$ мы выделили подпоследовательность, сходящуюся к Tx. Это и означает, что $Tx = (*)-\lim_n T_n x$. Предложение доказано.

2^0. В этом пункте мы рассмотрим одну важную модификацию конструкции супремального порождения.

Пусть M – некоторое множество, $Y = R^M$ – пространство всех вещественнозначных функций, определенных на M. Считаем, что в R^M естественным образом введено отношение порядка; заметим, что супремум ограниченного сверху множества функций из R^M совпадает с поточечным супремумом этого множества. Каждую точку $\mu \in M$ можно трактовать как линейный положительный функционал на R^M или, что то же самое, как оператор из R^M в K-пространство R (числовую прямую); говоря о положительном ростке $Spr(\mu, H)$, мы имеем в виду росток соответствующего оператора.

Из теоремы I.I вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Пусть X – векторное подпространство пространства R^M, H – минорантный конус в X. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) H – супремальный генератор X.

(2) Для каждой точки $\mu \in M$ и любой последовательности положительных линейных функционалов (μ_n) такой, что $\underline{\lim_n}\, \mu_n(h) \ge \mu(h)$ для всех $h \in H$, выполняется $\mu_n(x) \to \mu(x)$ $(x \in X)$.

(3) $Spr(\mu, H) = \{\mu\}$ для всех $\mu \in M$.

Рассмотрим теперь локально выпуклое пространство V, упорядоченное (выпуклым) замкнутым воспроизводящим конусом K. Считаем, что топология и порядок в V согласованы таким образом, что любой положительный линейный функционал на V непрерывен. (Это условие заведомо выполнено, если конус K телесен или если V является пространством Фреше.) Пусть M - подмножество пространства V^*, топологически сопряженного к V, состоящее из положительных на K функционалов. Рассмотрим пространство R^M и оператор $\mathcal{T}: V \to R^M$, определенный следующим образом:

$$(\mathcal{T}v)(\mu) = \mu(v) \qquad (\mu \in M, \ v \in V).$$

При любом $v \in V$ функция $\mathcal{T}_v$ непрерывна на M. (Мы считаем, что в M индуцирована топология $\sigma(V^*, V)$). Кроме того, $\mathcal{T}$ - положительный оператор, ядро которого совпадает с нулем тогда и только тогда, когда M разделяет точки из V.

Конус H в пространстве V назовем минорантным, если для любого $v \in V$ множество $U_v = \{h \in H : h \leq v\}$ непусто. (В случае, если V содержится в K-пространстве Y и порядок в V индуцирован из Y, это определение совпадает с данным в I^0).

Пусть M, как и выше, - множество положительных на K функционалов из V^*. Говорят, что конус H является супремальным генератором V (супремально порождает V) относительно множества M, если H минорантен в V и для любого $v \in V$ выполняется условие

$$\mathcal{T}_v = \sup \mathcal{T}(U_v),$$

где супремум берется в пространстве R^M. Таким образом, то обстоятельство, что H - супремальный генератор V относительно множества M означает, что

$$\mu(v) = \sup_{h \in H, \ h \leq v} \mu(h)$$

для всех $v \in V$ и $\mu \in M$.

Если M ограничено (в $\sigma(V^*, V)$), то функция $\mathcal{T}_v$ при любом v ограничена, т.е. входит в пространство $B(M)$ всех ограниченных на M функций. Ясно, что в рассматриваемой

ситуации все приведенные в этом пункте определения не изменятся, если вместо R^M иметь в виду K-пространство $B(M)$. (Это пространство в некоторых отношениях оказывается более удобным).

Условимся символом L^* обозначать конус в V^*, сопряженный к конусу L из V. Если H - конус в V, то для $\nu \in V^*$ положим

$$spr_V(\nu, H) = \{\mu \in V^* : \mu \geq 0,\ \mu - \nu \in H^*\} = K^* \cap (\nu + H^*).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Конус H - супремальный генератор V относительно множества M.

(2) Конус H минорантен; для каждого функционала $\mu \in M$ и любой последовательности (μ_n) такой, что $\mu_n \in K^*$ и $\underline{\lim}_n \mu_n(h) \geq \mu(h)$ при всех $h \in H$, выполняется $\mu_n \to \mu$ (в $\sigma(V^*, V)$).

(3) Конус H минорантен, $spr_V(\mu, H) = \{\mu\}$ для любого $\mu \in M$.

В доказательстве нуждается лишь импликация (3) $\Rightarrow$ (1). Это доказательство можно провести также, как в теореме 1.1, позаботившись лишь о том, чтобы оператор (в нашем случае функционал) B, фигурирующий в этом доказательстве, был непрерывен. Для $\mu \in M$ положим

$$p_\mu(v) = \sup_{h \in H,\ h \leq v} \mu(h). \tag{2.1}$$

Функционал p_μ, определенный на V формулой (2.1), положительно однороден, супераддитивен и монотонен. Если B - линейный функционал, опорный к p_μ (т.е. $B_v \geq p_\mu(v)$ для всех $v \in V$), то B положителен и, стало быть, непрерывен. Это и завершает доказательство.

В некоторых случаях можно освободиться от условия минорантности H, фигурирующего в утверждениях (2) и (3) предложения 2.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть конус K телесен.

Пусть, далее, конус H обладает следующим свойством: найдется функционал $\mu \in K^*$ такой, что $Spr_V(\mu, H) = \{\mu\}$. Тогда H содержит внутреннюю точку конуса $(-K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая, что предложение неверно и применяя теорему отделимости Эйдельгайта, найдем ненулевой функционал $\nu \in V^*$, разделяющий H и $-K$. Последнее означает, что $\nu \in K^* \cap H^*$. Так как $\mu \in K^*$, то и $\mu + \nu \in K^*$, кроме того, $\mu + \nu \in \mu + H^*$. Таким образом, $\mu + \nu \in K^* \cap (\mu + H^*) = Spr_V(\mu, H)$, что невозможно. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения конус H минорантен.

Изложенные в этом пункте соображения можно применить для получения результатов типа [8].

Однако за недостатком места подробнее на этих вопросах мы останавливаться не будем.

3^0. Рассмотрим теперь вопрос о супремальном порождении и сходимости последовательности операторов в некоторых конкретных пространствах.

Прежде всего, рассмотрим пространство $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на компакте Q, и некоторые его подпространства. (Считаем, что $C(Q)$ упорядочено естественным способом и что в этом пространстве введена чебышевская норма).

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть V - подпространство $C(Q)$ и конус H супремально порождает V относительно $B(Q)$; пусть, далее, последовательность линейных непрерывных положительных операторов $T_n : V \to V$ такова, что для всех $h \in H$ существует $\lim_n T_n h \geq h$ (здесь предел понимается в смысле $\|\cdot\|_{C(Q)}$). Тогда $\|T_n v - v\| \to 0$ при любом $v \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in V$, $x \in Q$ и $\varepsilon > 0$. Так как

H супремально порождает V относительно $B(Q)$, то найдутся функции h_x и $\bar{h}_x$ из H такие, что

$$h_x \le v; \quad v(x) < h_x(x) + \frac{\varepsilon}{2};$$
$$\bar{h}_x \le -v; \quad -v(x) < \bar{h}_x(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Найдется открытая окрестность W_x точки x, для элементов которой справедливы неравенства

$$v(y) < hx(y) + \frac{\varepsilon}{2}; \ -v(y) < \bar{h}_x(y) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (y \in W_x).$$

Полагая $b_h = \lim_n Th \ (h \in H)$, для всех $y \in W_x$ получим

$$T_n v(y) - v(y) \ge T_n h_x(y) - h_x(y) - \frac{\varepsilon}{2} \ge T_n h_x(y) - b_{h_x}(y) - \frac{\varepsilon}{2};$$

$$T_n v(y) - v(y) \le -T_n \bar{h}_x(y) + \bar{h}_x(y) + \frac{\varepsilon}{2} \le T_n \bar{h}_x(y) + b_{\bar{h}_x}(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая $n(\varepsilon)$ так, чтобы при $n > n(\varepsilon)$ одновременно выполнялись неравенства

$$\|T_n h_x - b_{h_x}\| < \frac{\varepsilon}{2}; \qquad \|T_n \bar{h}_x - b_{\bar{h}_x}\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

получим

$$\sup_{y \in W_x} |(T_n v)(y) - v(y)| \le \varepsilon.$$

Семейство $(W_x)_{x \in Q}$ образует открытое покрытие компакта Q. Выделяя из этого покрытия конечное подпокрытие, получим требуемое.

Введем теперь несколько определений. Пусть $T \in \mathcal{L}^+(C(Q)), C(Q))$, H -конус в $C(Q)$. Положим

$$spr_{C(Q)}(T, H) = \{T' \in \mathcal{L}^+(C(Q), C(Q)) : T'h \ge Th \quad (h \in H)\}.$$

(Заметим, что каждый оператор из $\mathcal{L}^+(C(Q), C(Q))$ непрерывен). Пусть M - компактное в широкой топологии множество положительных мер[*)] на Q. Через $\Phi(M)$ обозначим совокупность всех непрерывных отображений $\varphi : Q \to M$ (считаем, что в

*) Под мерой мы понимаем меру Радона, т.е. элемент пространства $C^*(Q)$.

M индуцирована "широкая" топология $\sigma(C^*(Q), C(Q))$). Для каждого $\varphi\in\Phi(M)$ определим отображение $T_\varphi : f\to\bar f$, где $\bar f$ - элемент из $C(Q)$, определяемый формулой $\bar f(x)=\varphi(x)(f)$ (здесь $x\in Q$, $f\in C(Q)$). Очевидно, что $T_\varphi\in\mathcal{L}^+(C(Q), C(Q))$. Положим $T(M)=\{T_\varphi : \varphi\in\Phi(M)\}$.

Сформулируем теперь основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 3.2. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Конус H-супремальный генератор $C(Q)$ относительно множества M.

(2) Для каждой меры $\nu\in M$ положительный росток $Spr_{C(Q)}(\nu, H)$ совпадает с $\{\nu\}$.

(3) Для каждого оператора $T\in T(M)$ положительный росток $Spr_{C(Q)}(T,H)$ совпадает с $\{T\}$.

(4) Для каждой меры $\nu\in M$ и любой последовательности (μ_n) положительных мер, такой что $\underline{\lim}_n \mu_n(h)\geq\nu(h)$ для всех $h\in H$, последовательность (μ_n) широко сходится к ν .

(5) Для каждого оператора $T\in T(M)$ и любой последовательности (T_n) положительных линейных операторов $T_n : C(Q)\to C(Q)$ такой, что $\underline{\lim}_n T_n h\geq Th$ для всех $h\in H$ (здесь имеется в виду равномерная сходимость), последовательность (T_n) сильно сходится к оператору T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы можно провести по следующей схеме

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[dl, Rightarrow] & \\
(I) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (4) & (3) \arrow[ul, Rightarrow] \\
 & (5) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Импликации (I) $\Longrightarrow$(4) $\Longrightarrow$(2) $\Longrightarrow$ (I) вытекают из предложений 2.2 и 2.3. Импликация (I) $\Longrightarrow$ (5) может быть дока-

вана с помощью соображений, изложенных при доказательстве теоремы 3.I. Импликация (5) $\Longrightarrow$ (3) очевидна. Покажем, что имеет место (3) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $\nu \in M$ и $\mu \in Spr_{C(Q)}(\nu, H)$. Рассмотрим отображение $\varphi : x \longmapsto \nu$ и оператор $T' : C(Q) \longrightarrow C(Q)$, определенный формулой[ж)]

$$T' f = \mu (f) \mathbb{1} \qquad (f \in C(Q)).$$

Для каждого $x \in Q$ и $h \in H$ справедливы соотношения

$$(T'h)(x) = \mu(h) \geqslant \nu(h) = (T_\varphi h)(x).$$

Таким образом, $T' \in Spr_{C(Q)} (T_\varphi, H)$ и, стало быть, $T' = T_\varphi$.

Для любой функции $f \in C(Q)$ имеем

$$\mu(f) = (T' f)(x) = (T_\varphi f)(x) = \varphi(x)(f) = \nu(f).$$

Мы показали, что $Spr_{C(Q)}(\nu, H) = \{\nu\}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\widetilde{M}$ есть совокупность всех мер таких, что $Spr_{C(Q)}(\mu, H) = \{\mu\}$. Естественно было бы ожидать, что любой оператор $T \geqslant 0$, такой что $Spr_{C(Q)}(T, H) = \{T\}$, входит в $T(\widetilde{M})$. Однако это не так. В самом деле, пусть $Q = [a, b]$ и H есть подпространство $C(Q)$, состоящее из функций, принимающих одинаковые значения в точках a и b. Пусть T - тождественный оператор $T : C(Q) \longrightarrow C(Q)$. Известно [8], что $Spr_{C(Q)}(T, H) = \{T\}$. С другой стороны, $(Tf)(a) = \varepsilon_a (f)$ [жж)] и, кроме того, $\frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \in Spr_{C(Q)}(\varepsilon_a, H)$.

Если же рассматривать операторы со значениями в $B(Q)$ и отказаться от непрерывности φ в определении T_φ, то приведенное выше утверждение будет, понятно, справедливым (ср. с [4]).

В заключение этого пункта отметим связь излагаемых конструкций с так называемым подходом Бишопа-де Лю (см., например, [I5], [I7]). Мы для простоты ограничимся рассмотрением вещественного случая.

ж) Символом $\mathbb{1}$ обозначается функция из $C(Q)$, тождественно равная единице.

жж) Символом ε_z мы обозначаем меру, сосредоточенную в точке z (меру Дирака) : $\varepsilon_z(f) = f(z)$ для всех $f \in C(Q)$.

Пусть H - минорантный конус в $C(Q)$. Говорят, что точка $z \in Q$ (или мера ε_z) лежит в границе Шоке для H, если $Spr_{C(Q)}(\varepsilon_z, H) = \{\varepsilon_z\}$. Граница Шоке для H обозначается через $\delta(H)$. Если H - подпространство, содержащее единицу, то приведенное здесь определение совпадает с общепринятым [15]. Из проведенных выше утверждений легко следует, что H является супремальным генератором относительно множества $\delta(H)$. В известном смысле верно и обратное утверждение, именно, z входит в границу Шоке для H в том и только в том случае, когда H - супремальный генератор относительно множества $\{\varepsilon_z\}$.

Результаты, полученные выше, могут быть применены для исследования ряда вопросов, связанных с использованием границы Шоке. В качестве примера приведем одну теорему Рея (см. [19], [20], [15]), относящуюся к резольвентам. Под резольвентой понимается семейство операторов $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, где $R_\lambda \in \mathcal{L}^+(C(Q), C(Q))$,

$$R_\lambda 1 = \frac{1}{\lambda} 1 \quad (\lambda > 0) \qquad \text{и} \qquad R_{\lambda'} - R_\lambda = (\lambda - \lambda') R_{\lambda'} R_\lambda$$

$(\lambda, \lambda' > 0)$. Легко показать (см., например, [15]), что операторы R_λ имеют общую область значений H и, кроме того, $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R_\lambda h - h\| = 0$ для любого $h \in H$. Из теоремы 3.1 теперь вытекает

ТЕОРЕМА 3.3. *Для любой функции* $f \in C(Q)$ *семейство* $((\lambda R_\lambda) f)_{\lambda>0}$ *сходится при* $\lambda \to \infty$ *к функции* f *равномерно на компактных подмножествах границы Шоке для* H.

Напомним, что замыкание границы Шоке называется границей Шилова. Пример, приведенный в предыдущем замечании, показывает, что и в вещественном случае эти границы, естественно, не обязаны совпадать.

4°. Дальнейшее изучение супремальных генераторов $C(Q)$ относительно $\delta(Q)$ связано с понятием H-выпуклости [11]. Мы приведем некоторые определения и результаты из работы [11], необходимые для дальнейшего.

Пусть H - конус в пространстве $C(Q)$, где Q - компактное топологическое пространство. Непрерывная функция f,

определенная на Q, называется H-выпуклой, если $f = \sup U_f$ (где $U_f = \{h \in H : h \leq f\}$). Здесь $\sup$ означает поточечный супремум, т.е. супремум в пространстве $B(Q)$. Совокупность всех H-выпуклых функций обозначим через $P(H)$. Если Q - выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве V, H - конус в $C(Q)$, состоящий из следов на Q аффинных на V функций, то $P(H)$ совпадает с совокупностью всех непрерывных выпуклых функций, определенных на Q; если H - конус, состоящий из следов на Q функционалов из V^*, то $P(H)$ совпадает с множеством всех сублинейных непрерывных функционалов (точнее, следов этих функционалов на Q). Дальнейшие примеры H-выпуклых функций см. в [II].

Заметим, что H супремально порождает $C(Q)$ относительно $B(Q)$ тогда и только тогда, когда каждая непрерывная на Q функция f является H-выпуклой.

Пусть ν - положительная мера на Q. Разбиением меры ν называется конечное семейство мер $(\nu_1, \dots, \nu_s)$ такое, что $\nu_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{s} \nu_k = \nu$. Если μ, ν - положительные меры, то говорят, что μ H-сильнее ν, и пишут $\mu \underset{H}{\gg} \nu$, если для всякого разбиения $(\nu_1, \dots, \nu_s)$ меры ν найдется разбиение $(\mu_1, \dots, \mu_s)$ меры μ такое, что $\mu_k \in Spr_{C(Q)}(\nu_k, H)$ $(k = 1, 2, \dots, s)$. (Такая конструкция называется декомпозицией Решетняка-Люмиса).

В [II] приведена следующая теорема, описывающая конус $P^*(H)$, сопряженный к $P(H)$.

ТЕОРЕМА 4.I. *Пусть H - замкнутый конус в $C(Q)$. Положительные меры μ и ν обладают свойством $\mu(f) \geq \nu(f)$ для любой $f \in P(H)$ тогда и только тогда, если $\mu \underset{H}{\gg} \nu$.*

Опираясь на эту теорему, приведем еще две характеристики супремальных генераторов $C(Q)$ относительно $B(Q)$. Введем сначала нужные обозначения. Если ν - положительная мера, то положим

$$D(\nu, H) = \{\mu \in C^*(Q) : \mu \underset{H}{\gg} \nu\}.$$

Если T - положительный линейный оператор из $C(Q)$ в $B(Q)$,

то положим[ж)]

$$\mathcal{D}(T,H)=\{T'\in \mathcal{L}^+(C(Q),B(Q)) : T'\underset{H}{\gg} T\}.$$

Здесь запись $T'\underset{H}{\gg}T$ означает, что для всякого разбиения $(T_1,\dots,T_s)$ оператора T $(T_k\in\mathcal{L}^+(C(Q),B(Q)),\ \sum_{k=1}^{s}T_k=T)$ найдется разбиение $(T_1',\dots,T_s')$ оператора $T'(T_k'\in\mathcal{L}^+(C(Q),B(Q))$, $\sum_{k=1}^{s}T_k'=T')$ такое, что $T_k'\in Spr(T_k,H)$ $(k=1,2,\dots,s)$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть H - замкнутый конус в пространстве $C(Q)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(I) H-супремальный генератор $C(Q)$ относительно $B(Q)$.

(2) $\mathcal{D}(\nu,H)=\{\nu\}$ для любой положительной меры ν.

(3) $\mathcal{D}(T,H)=\{T\}$ для любого оператора $T\in\mathcal{L}^+(C(Q),B(Q))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(I) $\Rightarrow$ (2). Так как H супремально порождает $C(Q)$, то $P(H)=C(Q)$ и потому конус $P^*(H)$, сопряженный к $P(H)$, состоит лишь из нуля. Привлекая теорему 4.I, получим, что $\mathcal{D}(\nu,H)=\{\nu\}$ для всякой $\nu\geqslant 0$.

(2) $\to$ (3). Для каждого оператора $T\in\mathcal{L}^+(C(Q),B(Q)$ и каждой точки $x\in Q$ рассмотрим меру T_x, определенную равенством

$$T_x : f\mapsto (Tf)(x) \qquad (f\in C(Q)).$$

Если $T'\underset{H}{\gg}T$, то, как следует непосредственно из определений, $T_x'\underset{H}{\gg}T_x$ при всех $x\in Q$ и потому $T_x'\in\mathcal{D}(T_x,H)$. В силу (2) $T_x'=T_x$ $(x\in Q)$ и, стало быть, $T'=T$.

(3) $\Rightarrow$ (I). Пусть $x\in Q$. Рассмотрим компоненту $\mathcal{Y}_x$ пространства $B(Q)$, порожденную точкой x. ($\mathcal{Y}_x$ состоит из всех функций $y\in B(Q)$ таких, что $y(z)\neq 0$ при $z\neq x$). Пусть $P_{\mathcal{Y}_x}$ - оператор проектирования на компоненту $\mathcal{Y}_x$,

ж) Множества $\mathcal{D}(\nu,H)$ и $\mathcal{D}(T,H)$ называют декомпозиционными ростками.

$\widetilde{P}_{z_x}$ - сужение этого оператора на $C(Q)$. Покажем, что $Spr(\widetilde{P}_{z_x}, H) = \{\widetilde{P}_{z_x}\}$. Пусть $I_1, \dots, I_s$ - разбиение оператора $\widetilde{P}_{z_x}$ (т.е. $\sum_{k=1}^{s} I_k = \widetilde{P}_{z_x}$ и $I_k \in \mathcal{L}^+(C(Q), B(Q))$, $k = 1, 2, \dots, s$). Для $f \in C(Q)$ имеем

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{s} I_k\right)(f)\right](z) = \left[\left(\widetilde{P}_{z_x}(f)\right](z) = \begin{cases} f(x), & z = x, \\ 0, & z \neq x, \end{cases}$$

откуда следует, что существуют положительные меры μ_k такие, что $\sum_{k=1}^{s} \mu_k = \varepsilon_x$ и

$$[I_k(f)](z) = \begin{cases} \mu_k(f), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Так как ε_x-дискретен в пространстве $C^*(Q)$, то найдутся неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, обладающие тем свойством, что $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1$ и $\mu_k = \alpha_k \varepsilon_x$ $(k = 1, 2, \dots, s)$.

Рассмотрим оператор $T \in Spr(\widetilde{P}_{z_x}, H)$ и положим $T_k = \alpha_k T$ $(k = 1, 2, \dots, s)$. Ясно, что $T_k \in \mathcal{L}^+(C(Q), B(Q))$ при всех k и $\sum_{k=1}^{s} T_k = T$. Кроме того, для $h \in H$ выполняются неравенства $T_k h = \alpha_k T h \geq \alpha_k \widetilde{P}_{z_x} h = I_k h$, откуда следует, что $T_k \in Spr(I_k, H)$. Итак, если $T \in Spr(\widetilde{P}_{z_x}, H)$, то по любому разбиению $(I_1, \dots, I_s)$ оператора $\widetilde{P}_{z_x}$ найдется разбиение $(T_1, \dots, T_s)$ оператора T такое, что $T_k \in Spr(I_k, H)$ при всех k. Последнее означает, что $T \in D(\widetilde{P}_{z_x}, H)$ и, стало быть, $T = P_{z_x}$.

Так как система компонент $(\mathcal{Y}_x)_{x \in Q}$ образует разложение K-пространства $B(Q)$, то, в силу теоремы I.I, H супремально порождает $C(Q)$ относительно $B(Q)$.[ж)] Теорема доказана.

5^0. Рассмотрим теперь вопрос о сходимости последовательности положительных операторов в пространствах измеримых функций. Пусть Q -метрический компакт, снабженный непрерывной регулярной мерой μ. Через $S(Q)$ обозначим K-пространство всех измеримых (μ -измеримых) функций, определенных

ж) Установить минорантность H не составляет труда (см. предложение 2.3).

на Q. Пусть H - конус в $C(Q)$, граница Шоке $b(H)$ которого измерима и имеет полную меру (т.е. $\mu(b(H))=\mu(Q)$). Тогда для любых $f\in C(Q)$ и $x\in b(H)$ выполняется соотношение $f(x)=\sup\limits_{h\in H, h\leq f} h(x)$. Последнее означает, что H является супремальным генератором $C(Q)$ относительно $S(Q)$ и, стало быть, относительно любого K-пространства, являющегося нормальным подлинеалом $S(Q)$ и содержащего $C(Q)$.

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть H-конус в $C(Q)$, граница Шоке которого измерима и имеет полную меру. Пусть Z - K-пространство, нормально содержащееся в $S(Q)$ и содержащее $C(Q)$, оператор $T\in\mathcal{L}^+(C(Q),Z)$ перестановочен на H с операцией $\sup$ и последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(C(Q),Z)$ такова, что при всех $h\in H$ существует $(*)\text{-}\lim\limits_n T_n h = b_h$, причем $b_h > Th$. Тогда $T_h x \xrightarrow{(*)} T_x$ при всех $x\in C(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что H - супремальный генератор $C(Q)$ относительно Z. Следовательно, H содержит сильно отрицательный элемент $\bar h$. Так как Q - метрический компакт, то H сепарабельно. Пусть $\{h_1,h_2,\dots,h_k,\dots\}$- счетное всюду плотное подмножество H и H'-коническая оболочка множества $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$. Не умаляя общности, считаем, что $\bar h\in H'$ и потому H'-минорантен. Покажем, что H'-супремальный генератор $C(Q)$ (относительно Z). Пусть E' - оператор из $\mathcal{L}^+(C(Q),Z)$, мажорирующий на конусе H' оператор вложения. Оператор E' (r)-непрерывен (см. теорему УШ.I.2 в [I4]). Так как в $C(Q)$ сходимость по норме совпадает с (r)-сходимостью и конус H' плотен в H, то $E'h > h$ для всех $h\in H$. Поскольку H супремально порождает $C(Q)$ относительно Z, то E' является вложением $C(Q)$ в Z. Отсюда, в силу теоремы I.I, следует, что H' супремально порождает $C(Q)$ относительно Z. Для завершения доказательства осталось сослаться на предложение I.3.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Напомним, что в K-пространстве $S(Q)$ $(*)$-сходимость совпадает со сходимостью по мере. Если Z являет-

ся KB-пространством, то $(*)$-сходимость в Z совпадает со сходимостью по норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Метризуемость компакта Q понадобилась лишь для того, чтобы можно было гарантировать сепарабельность конуса H. Теорема останется справедливой и в том случае, когда Q неметризуем, но конус H сепарабелен.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть Z_1 и Z_2 - банаховы пространства, содержащиеся в $S(Q)$ и содержащие $C(Q)$, причем $C(Q)$ плотно в Z_1 и Z_2 является KB-пространством, нормально вложенным в $S(Q)$. Пусть, далее, H-конус в $C(Q)$, граница Шоке которого измерима и имеет полную меру; оператор $T\in\mathcal{L}^+(Z_1,Z_2)$ перестановочен на H с операцией $\sup$; последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(Z_1,Z_2)$ такова, что $\sup\limits_n\|T_n\|<+\infty$ и при всех $h\in H$ существует $\lim\limits_n T_n h=b_h$, причем $b_h\geqslant Th$ (здесь $\lim$ означает предел по норме Z_2). Тогда $\|T_n x-Tx\|\to 0$ при всех $x\in Z_1$.

Для доказательства надо применить теорему 5.1 к сужениям T' и T_n' операторов T и T_n на $C(Q)$, а затем воспользоваться теоремой Банаха-Штейнхауза.

Заметим, что (o)-сходимость в $S(Q)$ совпадает со сходимостью почти всюду. Поэтому из предложения 1.1 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть конус H и оператор $T\in\mathcal{L}^+(C(Q),B(Q))$ таковы же, как и в теореме 5.1. Пусть, далее, последовательность (T_n) операторов из $\mathcal{L}^+(C(Q),S(Q))$ такова, что $\varliminf\limits_n T_n h\geqslant Th$ при всех $h\in H$ (здесь нижний предел понимается в смысле сходимости почти всюду). Тогда при

всех $x \in C(Q)$ последовательность $(T_n x)$ стремится к Tx почти всюду.

6⁰. Пусть X - векторное подпространство K-пространства Y. Представляет интерес выяснить, когда в X существуют конечные (т.е. натянутые на конечное число образующих) супремальные генераторы.

Прежде всего, установим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть X - подпространство K-пространства Y, являющееся K-линеалом относительно порядка, индуцированного из Y. Тогда если в X содержится минорантный конечный конус H, то X является K-линеалом ограниченных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть конус H, имеет своими образующими элементы $h_1, h_2, \dots, h_n$. Обозначим через u инфимум этих элементов (вычисленный в X). Так как H минорантен, то для любого элемента $x \in X$ найдутся неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \leq x$. Полагая $\sum_{k=1}^{h} \alpha_k = \alpha$, получим, что $\alpha u \leq x$. Таким же образом, для элемента $-x$ найдется число $\beta > 0$, при котором выполняется $\beta u \leq -x$. Итак, для элемента x нашлись числа $\alpha, \beta \geq 0$ такие, что

$$\alpha u \leq x \leq \beta(-u),$$

откуда и следует справедливость предложения.

В условиях предложения 6.1 введем в X стандартным для K-линеала ограниченных элементов способом норму. Если X полно по этой норме, то в силу известной теоремы Крейнов - Какутани [13] можно считать, что это упорядоченное банахово пространство реализовано как пространство $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на некотором компакте Q.

В связи со сказанным мы ограничимся изучением конечных супремальных генераторов пространства $C(Q)$. Введем теперь точные определения.

Пусть M - некоторое ограниченное множество положительных мер из $C^*(Q)$. Мы будем рассматривать конусы H - суп-

ремальные генераторы $C(Q)$ относительно множества M (см.2^0). Если M состоит из всех вероятностных мер, сосредоточенных не более чем в κ точках, и если H-супремальный генератор $C(Q)$ относительно множества M, то говорят, что H супремально порождает $C(Q)$ с порядком κ. Если $\kappa=1$, то M можно отождествить с компактом Q (каждую точку z из Q можно рассматривать как меру Дирака ε_z). В этом случае H супремально порождает $C(Q)$ относительно K-пространства $B(Q)$. Будем в дальнейшем в этой ситуации употреблять оборот " H супремально порождает $C(Q)$ " (и опускать слова "относительно $B(Q)$").

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Для того, чтобы конус H супремально порождал пространство $C(Q)$ с порядком κ, необходимо и достаточно, чтобы для любой $f\in C(Q)$, любого $\varepsilon>0$ и любых точек $x_1,\dots,x_\kappa$ из Q нашлась функция $h\in H$ такая, что

$$h(x)\le f(x)\quad (x\in Q);\qquad h(x_i)>f(x_i)-\varepsilon\quad (i=1,2,\dots,\kappa).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь необходимость. Предполагая, что доказываемое утверждение неверно, найдем $f\in C(Q)$, $\varepsilon>0$ и точки $x_1,\dots,x_\kappa\in Q$ такие, что для каждой функции $h\in H$, удовлетворяющей неравенству $h\le f$, выполняется при некотором j соотношение

$$h(x_j)\le f(x_j)-\varepsilon.$$

Так как $h\le f$, то при $i\ne j$ справедливы неравенства

$$h(x_i)\le f(x_i).$$

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\kappa\ge\delta>0$ - положительные числа, удовлетворяющие лишь условию $\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i=1$. Для меры $\mu=\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i\,\varepsilon x_i$ имеем

$$\mu(h)=\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i h(x_i)\le\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i f(x_i)-\varepsilon\delta=\mu(f)-\varepsilon\delta,$$

откуда следует, что

$$\sup_{h\le f,\ h\in H}\mu(h)\le\mu(f)-\varepsilon\delta.$$

Полученное неравенство противоречит тому, что H супремально порождает $C(Q)$ с порядком κ. Предложение доказано.

Конус, порождающий $C(Q)$ с порядком κ, очевидно, супремально порождает $C(Q)$ с порядком s ($1 \le s \le \kappa$). Кроме того, легко проверить, что на компактном пространстве Q существует конечный супремальный генератор H (относительно $B(Q)$) в том и только том случае, если пространство Q метризуемо и сепарабельно. Ввиду этого обстоятельства всюду ниже мы будем рассматривать лишь такие компактные пространства, не оговариваясь каждый раз особо.

Введем еще несколько полезных определений. Говорят, что семейство функций $(f_1, \ldots, f_m)$ есть супремальный базис порядка κ в пространстве $C(Q)$, если конус $H = \{\sum_{i=1}^{m} d_i f_i, d_i \ge 0\}$ супремально порождает пространство $C(Q)$ с порядком κ.

Если, кроме того, $f_1 = -1$, то функции $f_2, \ldots, f_m$ называются супремальными образующими порядка κ в пространстве $C(Q)$. Минимальное число супремальных образующих порядка κ в пространстве $C(Q)$ называется κ-тым супремальным рангом пространства $C(Q)$ (или компакта Q) и обозначается через $sim_\kappa(Q)$.

Понятие супремального базиса тесно связано с понятием обобщенной системы Коровкина. Среди нескольких равносильных определений этой системы (см. [4]) мы выберем наиболее для нас удобное.

Семейство непрерывных на Q функций $\varphi = (f_1, \ldots f_n)$ называется обобщенной системой Коровкина порядка κ (K_κ-системой) на компакте Q, если любая положительная мера μ, обладающая тем свойством, что $\mu(f_i) = \sum_{j=1}^{\kappa} d_j f_i(x_j)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (здесь $d_j \ge 0$, $x_j \in Q$, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$), совпадает с мерой $\sum_{j=1}^{\kappa} d_j \varepsilon_{x_j}$. Обобщенная система Коровкина порядка 1 называется системой Коровкина. Обозначая через H_φ линейное подпространство $C(Q)$, натянутое на функции из семейства $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, можно сказать, что φ является K_κ-системой тогда и только тогда, если $Spr_{C(Q)}(\mu, H) = \{\mu\}$ для любой положительной меры, сосредоточенной не более чем в κ точках.

Из теоремы 3.2 следует, что семейство φ является K_κ-

системой тогда и только тогда, когда подпространство H_φ супремально порождает $C(Q)$ относительно множества $\widetilde{M}_\kappa$, состоящего из всех положительных мер, сосредоточенных не более чем в κ точках, или, что то же самое, относительно множества M_κ, состоящего из мер $\mu=\sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j \varepsilon_{z_j}$ ($\alpha_j>0$, $z_j\in Q$, $j=1,2,\dots,\kappa$) таких, что $\|\mu\|=1$.

Таким образом, семейство φ является K_κ-системой в том и только том случае, когда подпространство H_φ супремально порождает $C(Q)$ с порядком κ. В частности, K_κ-система φ порождает супремальный базис порядка κ (семейство $(f_1, f_2,\dots,f_n,-\sum_{\kappa=1}^{n} f_\kappa)$).

Нетрудно видеть, что если семейство $\varphi=(f_1,\dots f_m)$ является K_κ-системой на компакте Q, то найдутся функции $g_2,\dots,g_m$ такие, что семейство $\psi=(-1, g_2,\dots,g_m)$ также является K_κ-системой. В самом деле, подпространство H_φ супремально порождает $C(Q)$ с порядком κ; в этом подпространстве содержится сильно отрицательный элемент f_φ (см. предложения 2.2 и 2.3). Выберем в H_φ базис $\varphi'=(f_\varphi, f_2',\dots,f_m')$ (не умаляя общности, считаем, что $\dim H_\varphi=m$). Ясно, что подпространство H_ψ, натянутое на семейство $\psi=(-1, \frac{f_2'}{f_\varphi},\dots,\frac{f_m'}{-f_\varphi})$, также супремально порождает $C(Q)$ с порядком κ и, стало быть, ψ - K_κ-система. В случае супремального порождения конусами такое построение, вообще говоря, невозможно. В силу этого, различие между супремальными базисами и супремальными образующими существенно.

Как обычно, супремальный базис порядка 1, супремальные образующие порядка 1 и 1-ый супремальный ранг называются соответственно супремальным базисом, супремальными образующими и супремальным рангом. При этом используется обозначение $sim(Q)=sim_1(Q)$.

Семейство функций $\{f_1,\dots,f_m\}$ называется κ-разделяющим, если следы функций $f_1,\dots,f_m$ на любое $(m+\kappa+1)$-элементное подмножество Q' компакта Q образуют супремальный базис порядка κ в соответствующем $(m+\kappa+1)$-мерном числовом пространстве $R^{m+\kappa+1}$ (т.е. в $C(Q')$).

Уместно отметить, что введенные понятия являются топологическими инвариантами в очевидном смысле и, кроме того,

наследственными в смысле, понятном из следующего утверждения.

Если $\{f_1,\dots,f_m\}$ есть супремальный базис порядка k в пространстве $C(Q)$, то следы функций $f_1,\dots f_m$ на компактное подмножество $\tilde{Q}$ компакта Q есть супремальный базис порядка не выше k в пространстве $C(\tilde{Q})$.

Из сказанного вытекает одно полезное замечание: если на компакте Q существует базис $\{f_1, f_2,\dots, f_{m+1}\}$ порядка k, такой что $f_1(x)<0$ $(x\in Q)$, то $sim_k(Q)\le m$.

Приведем один признак супремального базиса.

ТЕОРЕМА 6.I. Функции $f_1,\dots f_m$ образуют супремальный базис порядка k в пространстве $C(Q)$ в том и только в том случае, когда семейство $\{f_1,\dots f_m\}$ является k-разделяющим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нуждается в проверке лишь достаточность сформулированного условия.

Рассмотрим отображение $\Psi: Q\longrightarrow R^m$ такое, что

$$\Psi: x\longmapsto (f_1(x),\dots,f_m(x)).$$

Нетрудно видеть, что отображение Ψ является гомеоморфизмом Q и некоторого $A\subset R^m$. При этом, как видно из сделанных выше замечаний, следы на A координатных функций $\varphi_1: x\longmapsto x_1, \dots \varphi_m: x\longmapsto x_m$ образуют k-разделяющее семейство на A. Достаточно проверить, что эти функции образуют супремальный базис порядка k в $C(A)$. Мы воспользуемся теоремой 3.2 и покажем, что $Spr_{C(A)}(\nu, H)=\{\nu\}$ для любой вероятностной меры ν, определенной на A и сосредоточенной не более чем в k точках (здесь H - конус, натянутый на образующие $\varphi_1,\dots \varphi_m$).

Допустим противное, тогда найдутся неотрицательные меры μ, ν на A такие, что $\mu\neq\nu$, $\nu=\sum_{s=1}^{z}\alpha_s\varepsilon_{z_s}$, где $\alpha_s\ge 0$; $\sum_{s=1}^{z}\alpha_s=1$, $z_s\in A$ $(s=1,\dots,z\le k)$ и, кроме того, центр тяжести меры $\mu/\mu(1)$ -вектор y -больше (координатно) вектора $\sum_{s=1}^{z}\alpha_s z_s/\mu(1)$. (По определению, см. [I5], y обладает тем свойством, что $\mu(1)\varphi_i(y)=\mu(\varphi_i)$ $(i=1,2,\dots m)$; заметим, что y входит в выпуклую оболочку $co(A)$ компакта A).

По теореме Каратеодори [15] найдутся точки $y_j \in A$ и числа $\beta_s > 0$, $\sum_{s=1}^{n} \beta_s = 1$ такие, что $n \leq m+1$ и $y = \sum_{s=1}^{n} \beta_s y_s$. Отсюда получим, что

$$\mu(1) \sum_{s=1}^{n} \beta_s y_s \geq \sum_{s=1}^{z} \alpha_s z_s .$$

Если $n = z$, $y = \sum_{s=1}^{z} \alpha_s z_s$ и $\mu(1) = 1$ то, как мы проверим ниже, $\mu = \nu$. В противном случае получается противоречие с условиями теоремы.

Прежде всего, ясно, что носитель вероятностной меры μ лежит в выпуклой оболочке N точек $z_1, \dots z_z$. Кроме того, легко видеть, что ни одна из точек компакта A, отличная от $z_1, \dots z_z$, не лежит в N. Более того, N - симплекс. Отсюда и следует, что $\mu = \nu$, ибо мера, представляющая точку симплекса [15] и сосредоточенная на его крайних точках, единственна.

Аналогично теореме 6.1 получается

ТЕОРЕМА 6.2. *Функции $f_1, \dots f_m$ являются супремальными образующими порядка k пространства $C(Q)$ в том и только том случае, если их следы на любое $m+k$-точечное подмножество Q являются супремальными образующими пространства R^{m+k}.*

Рассмотрим $x_1, \dots x_{m+k+1}$ - различные точки из Q и матрицу

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_{m+k+1}) & \dots & f_m(x_{m+k+1}) \end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

Из теоремы 6.1 мгновенно получаем, что функции $f_1, \dots, f_m$ образуют супремальный базис порядка k в том и только том случае, если никакая положительная комбинация $z \leq k$ строк матрицы (6.1) не мажорируется положительной линейной комбинацией остальных ее строк (ср. с теоремой 2 в [4]).

Используя ту же технику, можно получить некоторые результаты, характеризующие компакт, имеющий супремальные образующие порядка k. Фактически дело сводится к описанию компактов в числовом пространстве, на которых следы координат-

ных функций являются супремальными образующими. Описание же этих компактов, как легко следует из доказательства теоремы 6.I, заключается в выяснении строения их выпуклой оболочки. (Мы не формулируем соответствующих результатов. Для случая обобщенных систем Коровкина они содержатся, по существу, в работе Ю.А.Шашкина [4]).

Из результатов [5] мгновенно получается оценка κ-ого супремального ранга компакта $Q \subset R^n$, именно,*)

$$sim_n(Q) \leq C^{\kappa}_{n+\kappa} + C^{\kappa-1}_{n+\kappa-1} .$$

Мы займемся ниже только вычислением супремального ранга $sim(Q)$. Этот случай, в известном смысле, представляет наибольший интерес. Кроме того, формулируемая ниже теорема 7.I поясняет причины и преимущества рассмотрения супремальных порождений по конусам, а не по подпространствам.

7⁰. ТЕОРЕМА 7.1. Супремальный ранг компакта Q равен $n+1$ в том и только том случае, когда наименьшая размерность евклидова пространства, в которое Q топологически вкладывается, равна n.

Доказательство теоремы опирается на две простые леммы.

ЛЕММА 7.I. Минорантный конус H является супремальным генератором пространства $C(Q)$ в том и только том случае, если H удовлетворяет следующему условию: для любых $\varepsilon > 0$, точки $z \in Q$ и окрестности U точки z найдется функция $h \in H$, "опорная к пике Урысона", т.е. такая, что

$$h(z) > 1-\varepsilon, \quad h(x) \leq 1 \quad (x \in U), \ h(x) \leq 0 \ (x \in Q \setminus U) \tag{7.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь достаточность, ибо необходимость следует из известной теоремы Урысона

*) Эта оценка, по всей видимости, не точна.

о полной регулярности компактного пространства.

Ясно, что соотношение $f(x)=\sup_{h\le f,\, h\in H} h(x)$ $(x\in Q)$ достаточно проверить лишь для функций f, удовлетворяющих условию $f(x)>0$ $(x\in Q)$. В самом деле, для произвольной функции $g\in C(Q)$ найдется $\lambda>0$ такое, что $(g-\lambda f_H)(x)>0$ $(x\in Q)$ (здесь f_H -сильно отрицательный элемент H).

Если $(g-\lambda f_H)(x)=\sup_{h\le g-\lambda f_H,\, h\in H} h(x)$, то $g(x)=\sup_{h\le g,\, h\in H} h(x)$.

Итак, пусть f - сильно положительный элемент пространства $C(Q)$. Так как H - конус, то, не умаляя общности, можно считать, что $f(z)=1$ (здесь z - точка, фигурирующая в условии леммы). Чтобы проверить справедливость леммы, для каждого $\varepsilon\in(0,1)$ укажем функцию $h\in H$ такую, что $h\le f$ и, кроме того, $f(z)<h(z)+\varepsilon$. Пусть U - такая окрестность точки z, что $|f(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x\in U$. По $\frac{\varepsilon}{2}$, z и U найдем функцию $\tilde{h}$, удовлетворяющую условиям (7.I), и положим $h=(1-\frac{\varepsilon}{2})\tilde{h}$. Заметим, что

$$h(z)=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\tilde{h}(z)>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2>f(z)-\varepsilon .$$

Для $x\in U$ выполняется неравенство $h(x)\le 1-\frac{\varepsilon}{2}$, и потому

$$f(x)-h(x)\ge f(x)-1+1-h(x)\ge -\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=0 .$$

Помимо этого, для $x\in Q\setminus U$ имеем $h(x)\le 0$ и, стало быть, $h(x)\le f(x)$. Таким образом, $h\le f$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для систем Коровкина аналог утверждения леммы был получен М.Я.Бродским в работе [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма 7.I представляет из себя утверждение типа теоремы Бишопа-де Лю (см., например, [I5]), дающей описание границы Шоке функциональных алгебр в терминах "опорных к пикам Урысона".

ЛЕММА 7.2. Пусть на компакте Q есть система $(f_1,\dots f_{n+2})$ непрерывных функций такая, что

1) $f_1(x)<0$ $(x\in Q)$,

2) следы функций $f_1,\dots f_{n+2}$ на любое двухточечное подмножество компакта Q образуют супремаль-

ный базис в R^2. Тогда Q топологически вкладывается в R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\Psi: x \mapsto (f_1(x), \dots f_{n+1}(x))$. Ясно, что Ψ есть топологическое вложение Q в R^{n+1}. Покажем, что любой луч, исходящий из нуля, содержит не более чем одну точку множества $\Psi(Q)$. В самом деле, в противном случае для некоторых $x, y \in Q$ найдется число $\alpha > 0$ такое, что

$$f_j(x) = \alpha f_j(y) \qquad (j = 1, 2, \dots, n+1).$$

Кроме того, по крайней мере для одного j выполняется неравенство $f_j(x) < 0$. В этом случае, очевидно, конус $\widetilde{H}$ в R^2, натянутый на точки $(f_j(x), f_j(y))$, $j = 1, 2, \dots, n+2$, не содержит в своем ядре конус $R^2_- \setminus \{0\} = \{(u, v) \in R^2 : u \leq 0,\ v \leq 0,\ |u| + |v| > 0\}$. Последнее, как нетрудно проверить, означает, что $\widetilde{H}$ не является супремальным генератором R^2. Полученное противоречие и показывает, что Q топологически вкладывается в R^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 7.I. В силу леммы 7.2 достаточно показать, что $sim(I_n) \leq n+1$ (здесь I_n есть n-мерный куб). Будем считать, что куб I_n реализован в ядре положительного ортанта пространства R^n. Используя лемму 7.I, нетрудно проверить, что следы функций $x \mapsto x_1, \dots x \mapsto x_n$, $x \mapsto -\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ на куб I_n являются супремальными образующими пространства $C(I_n)$. Отсюда следует, что $sim(I_n) = n+1$. Теорема доказана.

Из теоремы 7.I следует, в частности, что супремальные ранги отрезка и окружности равны, соответственно, двум и трем. Иными словами, наименьшая размерность супремального генератора, имеющего одной из образующих -1, позволяет отличить пространство непрерывных функций, заданных на отрезке от пространства непрерывных функций, заданных на окружности. В то же время минимальный ранг систем Коровкина в этих пространствах, как известно, совпадает (и равен трем). Таким образом, супремальный ранг является более тонкой характеристикой компакта, нежели минимальный ранг систем Коровкина на этом компакте.

8^0. Приведем еще одну характеристику супремального ба-

зиса в пространстве $C(Q)$.

ТЕОРЕМА 8.I. Пусть $f_i \in C(Q)$ $(i=1,2,\dots m)$ и $\Psi: Q \to R^m$ отображение, определенное формулой

$$\Psi: x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)) .$$

Функции $f_1, \dots f_m$ образуют супремальный базис пространства $C(Q)$ в том и только том случае, когда для каждой функции $f \in C(Q)$ найдется монотонный сублинейный функционал $p: R^m \to (-\infty, +\infty]$ такой, что $f = p \circ \Psi$. (Монотонность p означает по определению, что $p(x) \geq p(y)$, если $x \geq y$; считаем, что R^m упорядочено конусом R^m_+ векторов с неотрицательными компонентами).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Покажем, прежде всего, что сублинейный функционал p $(p \not\equiv +\infty)$ монотонен тогда и только тогда, когда существует подмножество A конуса R^m_+ такое, что

$$p(x) = \sup_{a \in A} (a, x) \tag{8.I}$$

(здесь символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в R^m). В самом деле, если p представим формулой (8.I), то его сублинейность и монотонность очевидны. С другой стороны, если p сублинеен, то по теореме Хермандера [I6] найдется множество $A \subset R^m$ такое, что выполнено (8.I). Покажем, что $A \subset R^m_+$. Для $x \geq 0$ имеем $p(-x) \leq p(0) = 0$, и потому

$$\inf_{a \in A} (a, x) = -\sup_{a \in A} [-(a, x)] = -\sup_{a \in A} (a, -x) = -p(-x) \geq 0 ,$$

откуда и следует нужное нам включение.

2) Пусть U - подмножество конуса H, натянутого на образующие $f_1, \dots, f_m$. Положим $A = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in R^m_+ : \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i \leq U\}$ и через p обозначим функционал, построенный по множеству A с помощью формулы (8.I). Доказательство теоремы вытекает теперь из следующей цепочки

$$\sup_{h \in U} h(x) = \sup_{a \in A} (a, \Psi(x)) = (p \circ \Psi)(x) \qquad (x \in Q).$$

Дальнейшие результаты подобного рода могут быть получены с помощью теории H-выпуклых функций. Мы приведем (без

доказательства) один из этих результатов, полученный Н.В. Рутковским на основе техники, разработанной в статье авторов [II].

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть I_m есть m-мерный куб. Тогда любая функция $f \in C(I_m)$ имеет вид

$$f: x \mapsto \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, \sum_{k=1}^{m} x_k^2),$$

где φ - некоторая выпуклая функция $m+1$ переменной.

Отметим еще один факт того же сорта (полученный из других соображений Л.С.Маергойзом [22]). Пусть S - граница строго выпуклого телесного компакта в R^n. Тогда любая функция из $C(S)$ есть след некоторой выпуклой замкнутой функции, определенной на R^n. В самом деле, из теоремы 3.2 следует, что следы координатных функций на S являются супремальными образующими (по подпространству) $C(S)$; точнее, подпространство H, натянутое на эти функции и функцию, тождественно равную единице, является супремальным генератором $C(S)$. Таким образом, каждая функция из $C(S)$ является H-выпуклой, что и требовалось проверить.

Иными словами, ситуация здесь такова, как и в классической теории приближений. Именно, распространить любую непрерывную функцию с компакта до выпуклой можно в том и только в том случае, когда граница Шоке для H совпадает со всем компактом.

9^0. Если в KB-линеале X существует конечный супремальный генератор относительно K-пространства Y, то, как было показано в начале пункта 6^0, X является KB-линеалом ограниченных элементов и, следовательно, может быть реализован как пространство $C(Q)$ на некотором компакте Q. Если Y совпадает с $B(Q)$, то, как было показано выше, компакт Q конечномерен. Если же Y отлично от $B(Q)$, то это утверждение, вообще говоря, неверно. Приведем соответствующие примеры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.I. В пространстве $C((a,b))$ всех непрерывных ограниченных функций, определенных на (a,b), с у-

ществует конечный супремальный генератор H относительно $\hat{C}((a,b))$ (здесь через $\hat{C}((a,b))$ обозначено K-пополнение K-линеала $C((a,b))$; заметим, что $C((a,b))$ вложено в $\hat{C}((a,b))$ с сохранением граней, поэтому конус H, фигурирующий в предложении, обладает тем свойством, что для любой $f\in C((a,b))$ выполняется $f=\sup U_f$, где $U_f=\{h\in H: h\leq f\}$, а $\sup$ понимается в $C((a,b))$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что пространство $C_n((a,b))$ всех непрерывных функций f, определенных на (a,b) и таких, что $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to b-} f(x)$, супремально порождает $C((a,b))$ относительно $\hat{C}((a,b))$. Пространство $C_n((a,b))$ можно рассматривать как $C(Q)$, где Q - окружность, что и завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ I. Пространство $C((-\infty,\infty))$ супремально порождается относительно $\hat{C}((-\infty,+\infty))$ конусом, натянутым на [3] образующих.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Пространство m всех ограниченных последовательностей имеет супремальный генератор относительно самого себя, натянутый на 3 образующих.

Если рассматривать m как пространство ограниченных функций на множестве $\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\dots,\frac{n+1}{n},\dots\}$, то этими образующими являются, например, элементы $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $z=(z_n)$, где $x_n=-\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$, $z_n=-1$ $(n=1,2,\dots)$. (На справедливость этого предложения обратила наше внимание С.Ф.Малыхина).

ЗАМЕЧАНИЕ. Недавно нам стала известной работа [23], посвященная сходимости нерастягивающих (вообще говоря, неположительных) операторов. Излагаемые там и ряд аналогичных результатов могут быть извлечены из теории супремальных генераторов.

Литература

1. Коровкин П.П., О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций, ДАН СССР, 1953, 90, 961-964.
2. Коровкин П.П., Линейные операторы и теория приближений, Физматгиз, М., 1959.
3. Шашкин Ю.А., Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций, ИАН СССР, сер. мат., 1962, 26:4, 495-512.
4. Шашкин Ю.А., Конечноопределенные линейные операторы в пространствах непрерывных функций, УМН, 1965, 20:6, 1085-1094.
5. Шашкин Ю.А., Интерполяционные семейства функций и вложение множеств в евклидовы и проективные пространства, ДАН СССР, 1967, 174:5, 1030-1032.
6. Бродский М.Л., Об одном необходимом и достаточном признаке систем функций, для которых выполняется теорема П.П. Коровкина. В сб. "Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций", М., 1961, 318-323.
7. Дзядык В.К., О приближении функций линейными положительными операторами и сингулярными интегралами, Матем. сб., 1966, 70:4, 508-517.
8. Климов В.С., Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов, Тр. Матем. об-ва, 1966, 15, 55-69.
9. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., К вопросу о сходимости последовательностей положительных операторов в линейных топологических пространствах, УМН, 1968, 23:2, 213-214.
10. Васильев Р.К., Сходящиеся последовательности линейных операторов в полуупорядоченных пространствах, Матем. заметки, 1970, 8:4, 475-486.
11. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., К теории структурной двойственности функций и множеств, Оптимальное планирование, 1970, 17, 96-144.
12. Баскаков В.А., О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов, УМН, 1961, 16:1, 131-134.
13. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГИТТЛ, М.-Л, 1950.
14. Вулих Б.З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, ГИФМЛ, М., 1961.
15. Фелпс Р., Лекции по теоремам Шоке. "Мир", М., 1968.
16. Hörmander L., Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe. Arkiv för Matematic, 3 (1955), 2.
17. Сб. "Некоторые вопросы теории приближений", ИИЛ, М., 1963.

18. Шашкин Ю.А., Граница Мильмана-Шоке и теория приближений, Функц. анализ и его приложения, I967, I:2, 95-96.

19. Ray D., Resolvents, transition functions and strongly markovian processes. Ann. Math. 70 (1959), 43-72.

20. Lion G., Familles resolvents et frontier de Chouquet, C.R., 259 (1964), 4460-4462.

2I. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Супремальные генераторы, ДАН СССР, I99:4 (I97I), 776-777.

22. Майергойз Л.С., Одна краевая задача для выпуклых функций и её приложение к изучению асимптотики функций, ДАН СССР, I97I, I9I:4, 962-965.

23. Шашкин Ю.А., О сходимости нерастягивающих операторов, Matematika (R.S.R.), I969.

Поступила в редакцию
I.II. I97I г.