УДК 513.88

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В.С. КЛИМОВА, М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО И Е.А. ЛИФШИЦА

А.М. Рубинов

Рассмотрим локально выпуклое пространство V, в котором введено отношение предпорядка с помощью конуса (по другой терминологии, выпуклого конуса, клина) K. Точка $v \in K$ называется точкой гладкости конуса K, если существует единственный (с точностью до положительного множителя) функционал μ_v из*) K^* такой, что $\mu_v(v)=0$. Про функционал μ_v говорят, что он проходит через точку v. Данное определение введено (для случая банахова пространства) в работе В.С. Климова, М.А. Красносельского и Е.А. Лифшица [1]. Там же доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть V – банахово пространство, z точка гладкости конуса K и элемент $v \in V$ таков, что $\mu_z(v) \neq 0$. Тогда если последовательность функционалов (μ_n) из K^* такова, что

$$\mu_n(z) \to 0, \quad \mu_n(v) \to \mu_z(v), \quad \sup \|\mu_n\| < \infty,$$

то $\mu_n \to \mu_z$ (в слабой топологии $\sigma(V', V)$).

Установлением сходимости последовательностей положительных операторов и функционалов по поведению этих последовательностей на некотором подпространстве (или, более общо, конусе) H занимались многие авторы. В частности, в работе [2] приводятся необходимые и достаточные условия сходимости в случае, когда конус H минорантен, т.е. для любого $v \in V$ множество $U_v =$

*) Через K^* обозначается конус, сопряженный к K; K^* лежит в пространстве V', сопряженном к V.

$=\{h\in H: h\leqslant v\}$ непусто. Эти условия формулируются в терминах так называемого супремального генерирования. Минорантность представляется весьма естественным условием в случае, если упорядочивающий конус K телесен. В противном случае это условие является весьма жестким и, по-видимому, не отвечающим существу дела. В частности, подпространство H, натянутое на векторы u и z, фигурирующие в теореме А, вообще говоря, неминорантно.

В настоящей заметке приводится некоторое обобщение конструкции супремального порождения, позволяющее рассматривать и неминорантные конусы. Полученные результаты позволяют установить связь между точками гладкости и супремальным порождением, а также включить теорему А в общую схему исследования сходимости последовательностей положительных операторов.

Введем, прежде всего, некоторые определения. Пусть H-конус в V. Для функционала ν из K^* положим, следуя [2],

$$Spr_V(\nu, H)=\{\mu\in V': \mu\geqslant 0, \mu-\nu\in H^*\}=K^*\cap(\nu+H^*).$$

Множество $Spr_V(\nu, H)$ называется положительным ростком функционала ν на конусе H.

Функционал ν назовем H-максимальным, если $Spr_V(\nu, H)=\{\nu\}$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для того, чтобы существовал H-максимальный функционал, необходимо и достаточно, чтобы конус $H+K$ всех элементов, минорируемых конусом H, был плотен в V.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что $\overline{H+K}\neq V$ (здесь и ниже черта означает замыкание). Тогда $(H+K)^*\neq\{0\}$. Заметим, что $(H+K)^*=H^*\cap K^*$, и потому найдется функционал μ такой, что $\mu\in H^*$, $\mu\in K^*$, $\mu\neq 0$. Для любого $\nu\in K^*$ имеем

$$\mu+\nu\in K^*\cap(\nu+H^*)=Spr_V(\nu, H),$$

что противоречит условию.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Если $\overline{H+K}=V$, то $(H+K)^*=H^*\cap K^*=\{0\}$ и потому функционал $\mu=0$ H-максимален. Предложение доказано.

Пусть, как и выше, H-конус в V и $\mu\in K^*$. Рассмотрим функционал $q_\mu: V\to[-\infty,\infty)$, определенный на V формулой

$$q_\mu: v\mapsto \sup_{h\in H,\, h\leqslant v}\mu(h).$$

Если $v \bar{\in} H+K$, то множество $U_v=\{h\in H: h\leq v\}$ пусто и потому $q_\mu(v)=-\infty$. В противном случае, $q_\mu(v)>-\infty$. Так как H - конус, то функционал q_μ супераддитивен ($q_\mu(v_1+v_2)\geq q_\mu(v_1)+q_\mu(v_2)$) и положительно однороден ($q_\mu(\lambda v)=\lambda\mu(v)$, $\lambda>0$). Рассмотрим замыкание $\bar{q}_\mu$ функционала q_μ. (По определению, $\bar{q}_\mu(v)=\sup\limits_{(v_\alpha)}\overline{\lim\limits_\alpha}\, q_\mu(v_\alpha)$, где супремум берется по всем сетям $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ таким, что $v_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} v$). Нетрудно проверить, что функционал $\bar{q}_\mu$ суперлинеен (т.е. супераддитивен, положительно однороден и полунепрерывен сверху).

Конус H, лежащий в пространстве V, назовем обобщенным супремальным генератором V относительно множества M из K^*, если $\bar{q}_\mu=\mu$ для любого $\mu\in M$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть V - локально выпуклое пространство, в котором введено отношение предпорядка с помощью конуса K, и $M\in K^*$. Пусть, далее, H - конус в V. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) H - обобщенный супремальный генератор относительно M.

(2) Для каждого $\mu\in M$ и любой равностепенно непрерывной последовательности (μ_n) такой, что $\mu_n\in K^*$ и $\underline{\lim\limits_n}\,\mu_n(h)\geq\mu(h)$ при всех $h\in H$, выполняется $\mu_n\to\mu$ (в $\sigma(V',V)$).

(3) Каждый функционал $\mu\in M$ является H - максимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) $\Longrightarrow$ (2). Пусть (μ_n) - последовательность, фигурирующая в (2). Для $v\in V$ положим $p(v)=\underline{\lim\limits_n}\,\mu_n(v)$. Функционал p, определенный на V таким образом, супераддитивен и положительно однороден. Так как последовательность (μ_n) равностепенно непрерывна, то найдется окрестность нуля W в пространстве V такая, что $|\mu_n(w)|\leq 1$ для w из этой окрестности. Ясно, что функционал p ограничен на этой окрестночти и, стало быть, непрерывен. Пусть $v\in H+K$. Тогда множество $U_v=\{h\in H: h\leq v\}$ непусто. Если $h\in U_v$, то $\mu_n(h)\leq\mu_n(v)$, а потому

$$\mu(h)\leq \underline{\lim_n}\,\mu_n(h)\leq \underline{\lim_n}\,\mu_n(v),$$

откуда следует, что

$$q_\mu(v) = \sup_{h \in \mathcal{U}_v} \mu(h) \le \varliminf_n \mu_n(v) = p(v).$$

Если $v \bar{\in} H+K$, то $q_\mu(v) = -\infty$ и, стало быть, $q_\mu(v) < p(v)$. Таким образом, $q_\mu \le p$. Так как p непрерывен, то и $\mu = \bar{q}_\mu \le p$. Итак, для любого $v \in V$ имеет место соотношение $\varliminf_n \mu_n(v) \ge \mu(v)$, откуда и следует требуемое.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $\mu \in M$. Суперлинейный функционал $\bar{q}_\mu$ является по теореме Хермандера [3] нижней огибающей опорных к нему линейных функционалов. (Функционал ν опорен к суперлинейному функционалу q, если $\nu(v) \ge q(v)$ при всех $v \in V$). Пусть ν опорен к $\bar{q}_\mu$. Так как $\bar{q}_\mu$ монотонен, то $\nu \in K^*$. Кроме того, для $h \in H$ имеем

$$\nu(h) \ge \bar{q}_\mu(h) \ge q_\mu(h) = \sup_{h' \in H, h' \le h} \mu(h') = \mu(h).$$

Таким образом, $\nu \in Spr_V(\mu, H)$ и, стало быть, $\nu = \mu$. Отсюда следует, что $\bar{q}_\mu = \mu$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из теоремы и предложения 1, если H -обобщенный супремальный генератор в смысле какого-либо множества M, то $\overline{H+K} = V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема А является непосредственным следствием теоремы 1. В самом деле, если (в обозначениях этой теоремы) положить $H = \mathcal{L}(u,z)$ (линейная оболочка точек u и z), то $Spr_V(\mu_z, H) = \{\mu_z\}$.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности распространения тождественного оператора с обобщенного супремального генератора.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть подмножество M конуса K^* разделяет точки из V и H обобщенный супремальный генератор относительно M. Тогда каждый линейный положительный оператор $T: V \to V$, мажорирующий на H, тождественный, совпадает с тождественным на всем V.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in M$. Имеем для $h \in H$

$$\mu(h) \le \mu(Th) = (T^*\mu)(h).$$

Таким образом, функционал $T^*\mu$ мажорирует μ. Кроме того,

$T^*_\mu \geq 0$. Итак, $T^*_\mu \in Spr_V(\mu, H)$ и, по теореме I, $T^*_\mu = \mu$. Это и доказывает теорему.

Подпространство V_0 пространства V назовем насыщенным, если множество функционалов, положительных на K и проходящих через точки гладкости K, лежащие в V_0, разделяет точки V_0. (Для случая банаховых пространств эквивалентное определение насыщенности дано в [I]). Из теоремы 2 следует, что каждый положительный линейный оператор, совпадающий на насыщенном подпространстве с тождественным, совпадает с тождественным всюду. (Для случая банаховых пространств этот результат приведен в [I]).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Излагаемая конструкция позволяет получить (в обобщенной форме) результаты работы [4] .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (I) теоремы I является уточнением теоремы А; на самом деле установлено, что из сходимости равностепенно непрерывной последовательности на конусе к функционалу следует, что на элементе $v \in V$ эта последовательность сходится к $\mu(v)$, в том и только том случае, если $\bar{q}_\mu(v) = \mu(v)$; $\bar{q}_\mu(-v) = \mu(-v)$.

Автор благодарен С.С. Кутателадзе за обсуждение.

Литература

I. Климов В.С., Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов, Труды ММО, I5(I966),55-69.

2. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов. Наст.сб., стр.I20-I53.

3. Hörmander L., Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. Arkiv för Mathematic, 2:3 (1954).

4. Лабскер Л.Г., О слабой сходимости последовательностей линейных положительных функционалов, ДАН СССР,I97:6(I97I),I264-I267.

Поступила в редакцию
29. УII. I97I г.