УДК 513.88

О СУПРЕМАЛЬНОМ РАНГЕ K-ПРОСТРАНСТВ

Н.В.Рутковский

Пусть E - архимедов K-линеал. Выпуклый конус $H \subset E$ называется супремальным генератором [I] K-линеала E, если

I) H минорантен, т.е. $H_x = \{h : h \le x, h \in H\} \ne \emptyset$ для всех $x \in E$;

2) $x = \sup\limits_{h \in H_x} h$ для всех $x \in E$.

Если конус, натянутый на систему $\{f_1, \dots, f_n\}$, является супремальным генератором E, то система $\{f_1, \dots, f_n\}$ называется порождающей системой, а элементы f_i - порождающими.

Минимальное число n такое, что существует порождающая система из n элементов, называется супремальным рангом пространства E в себе и обозначается $Sim(E)$. Пространства, в которых существует конечная порождающая система, называются конечнопорожденными.

Наша цель - дать характеристику конечнопорожденных K-пространств и вычислить их супремальные ранги.

В дальнейшем мы ограничимся пространствами непрерывных функций на хаусдорфовых*) компактах. Дело в том, что любой конечнопорожденный K-линеал изоморфен плотной подструктуре некоторого пространства $C(Q)$, где Q - хаусдорфов компакт.

Рассмотрим теперь пространство $C(Q)$, где Q - хаусдорфов компакт. Обозначим через F_Q булеву алгебру замкнутых, регулярных подмножеств Q и через $C^*(Q)$ - множество всех вещественных функций, заданных, непрерывных и ограниченных на множествах в Q, дополнительных к множествам первой категории.

Функции φ_1 , $\varphi_2 \in C^*(Q)$ называются эквивалентными, если они совпадают на пересечении их областей задания. K -пополнение $\widehat{C(Q)}$ пространства $C(Q)$, как известно [2], описывается как фактор-пространство пространства $C^*(Q)$ по введенному отношению эквивалентности с естественным определением операций и частичного порядка. При этом функциям $f \in C(Q)$ соответствуют классы $[f]$ в $\widehat{C(Q)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. База K-пространства $\widehat{C(Q)}$ изоморфна F_Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in F_Q$. Функция

$$e_A(q) = \begin{cases} 1; & q \in A^\circ \\ 0; & q \in Q \setminus A \end{cases}$$

является элементом $C^*(Q)$, и поскольку $([\mathbb{1}] - [e_A]) \wedge [e_A] = [(\mathbb{1} - e_A) \wedge e_A] = \mathbb{0}$, то $[e_A]$ является единичным элементом K -пространства $\widehat{C(Q)}$. (Здесь $\mathbb{1}$ - функция из $C^*(Q)$, всюду равная I). Очевидно, что отображение $\varphi : A \longmapsto [e_A]$ является изоморфизмом алгебры F_Q в булеву алгебру единичных элементов в $\widehat{C(Q)}$.

Пусть $[e']$ - ненулевой единичный элемент $\widehat{C(Q)}$. Подпространство в $\widehat{C(Q)}$, соответствующее $C(Q)$, является супремальным генератором в $\widehat{C(Q)}$, и поэтому для $[e']$ верна формула:

$$[e'] = \sup_{f \leq e',\, f \in C(Q)} [f] .$$

Так как $e' > \mathbb{0}$, то найдется $f_0 \in C(Q) : 0 < f_0 \leq C'$. В открытом множестве $\{q : f_0(q) > 0,\, q \in Q\}$ рассмотрим некоторое непустое, регулярное, замкнутое подмножество A . Класс $[f_0]$ принадлежит компоненте, порожденной $[e']$. Поскольку для достаточно большого $\lambda > 0$, $\lambda[f_0] \geq [e_A]$, то $e_A \leq e'$. Этим показано, что изоморфизм φ отображает полную булеву алгебру F_Q в полную плотную подалгебру базы $\widehat{C(Q)}$. Отсюда следует [3], что F_Q изоморфна этой алгебре.

Предположим, что система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ является порождающей в пространстве $C(Q)$. Определим отображение $\Phi : Q \to R^n$ по формуле:

$$\Phi(q) = (f_1(q), \ldots, f_n(q)) .$$

Положим $M = \Phi[Q]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Алгебры F_Q и F_M изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение Φ порождает изоморфное вложение пространства $C(M)$ в $C(Q)$ по формуле: $g \mapsto g \circ \Phi$. Ясно, что образ $C(M)$ при этом вложении является супремальным генератором пространства $C(Q)$. Из этого следует, что K-пополнения пространств $C(M)$ и $C(Q)$ изоморфны. Так как базы K-пространств $\widehat{C(M)}$ и $\widehat{C(Q)}$ изоморфны F_M и F_Q соответственно, то F_Q изоморфна F_M.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть F - полная сепарабельная алгебра. Существует компакт N в R^1 такой, что F изоморфна F_N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F' - счетная плотная подалгебра алгебры F. Стоуновский компакт N булевой алгебры F' метризуем и имеет размерность 0. По теореме Менгера-Нобелинга [4] компакт N гомеоморфно вкладывается в R^1. Так как F_N и F имеют изоморфные плотные подалгебры, то F_N изоморфна F [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если K-пространство E имеет два порождающих элемента, то алгебраическая размерность E не больше 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечнопорожденное K-пространство E изоморфно некоторому пространству $C(Q)$, где Q - экстремально несвязный компакт. Пусть $\{f_1, f_2\}$ - порождающая система в $C(Q)$. Поскольку конус H, натянутый на f_1 и f_2, минорантен, то существует строго отрицательная функция $f_0 \in H$. Отображение $f \mapsto -\frac{f}{f_0}$ является автоморфизмом K-пространства $C(Q)$ на себя и, значит, оно переводит порождающую систему $\{f_1, f_2\}$ в порождающую систему $\{-\frac{f_1}{f_0}, -\frac{f_2}{f_0}\}$. Не уменьшая общности, мы будем считать, что порождающая система $\{f_1, f_2\}$ удовлетворяет условию $f_1 + f_2 = -\mathbb{1}$. Отображение $q \mapsto (f_1(q), f_2(q))$ переводит компакт Q в подмножество $M \in R^2$, точки которого удовлетворяют уравнению: $f_1(q) + f_2(q) = -1$. Ясно, что сужения координатных проекторов p_1, p_2 на M являются порождающими в $C(M)$. Поскольку линейные функции достигают макси-

мальных значений в крайних точках множества M, то M состоит не более чем из двух точек.

Предложения 1–4 приводят нас к основному результату.

ТЕОРЕМА. K-пространство ограниченных элементов конечнопорождено тогда и только тогда, когда его база сепарабельна. Если K-пространство конечнопорождено и имеет алгебраическую размерность больше двух, то его ранг равен трем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что алгебра F_M сепарабельна, если M - компакт в R^n. Вследствие предложений 2 и 3 нам достаточно доказать, что если N компакт, содержащийся в отрезке [1,2], то существуют три функции, порождающие $C(N)$. Известно, что таковыми будут, например, функции $\{-1, x, -x^2\}$.

В качестве приложения докажем, что K-пространство ограниченных элементов $L^\infty[0,1]$ не является конечнопорожденным. В самом деле, аналогично доказательству предложения 1, легко показать, что база $L^\infty[0,1]$ изоморфна фактор-алгебре алгебры борелевских множеств в $[0,1]$ по идеалу множеств лебеговой меры 0. Поскольку эта фактор-алгебра не является сепарабельной [3], то $L^\infty[0,1]$ не имеет конечной порождающей системы.

Заметим, что ранг $C(Q)$ может быть отличен от ранга K-пополнения $\widehat{C(Q)}$. Примером таких компактов служат n-мерные кубы I^n.

Литература

1. С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов, Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов, настоящий сборник, стр.120-153.
2. А.И.Векслер, О банаховой и дедекиндовой полноте пространств непрерывных функций, векторных структур и максимальных колец, ДАН СССР, 196:1 (1971), 20-23.
3. Р.Сикорский, Булевы алгебры. "Мир", М., 1969.
4. К.Куратовский, Топология, т.1, "Мир", М., 1966.

Поступила в редакцию
10.V. 1971 г.