Выпуск 30(47) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Численные методы

УДК 519.86

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ И РЕЗУЛЬТАТАХ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

(по итогам работы Первой Новосибирской школы по математической экономике)

В.Л.Макаров, В.А.Васильев, А.Н.Козырев,
В.М.Маракулин

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

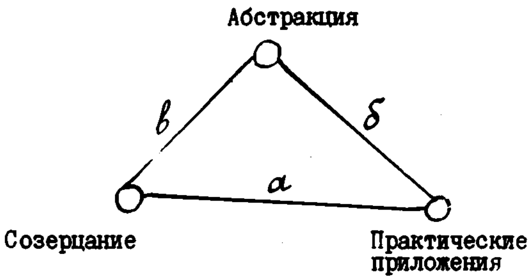
Настоящая работа представляет собой обзор докладов и выступлений, сделанных на Первой Новосибирской школе по математической экономике, проходившей в Академгородке в феврале 1982 г. Авторы старались соблюсти в обзоре единые обозначения и терминологию; кроме того, в обзор включены только те результаты, которые соответствуют некоторой принятой логической схеме. Поэтому в принципе данную работу можно рассматривать и как оригинальную научно-исследовательскую статью, тем более, что значительное число результатов в ней принадлежит самим авторам.

Школа проходила в течение 6 дней (с 1 по 6 февраля 1982 г.). Ежедневно заслушивалось по 5 докладов, которые, как правило, сопровождались оживленной дискуссией по затронутым вопросам. Кроме того, было проведено специальное заседание по обсуждению наиболее перспективных и актуальных направлений математической экономики.

Наряду с Институтом математики СО АН СССР и Институтом экономики и организации промышленного производства СО АН СССР в работе Школы принимали участие следующие организации: Вычислительный центр АН СССР - Н.Н.Моисеев, Ф.И.Ерешко, А.С.Злобин, В.М.Меденников, И.С.Меньшиков, И.Г.Поспелов, А.М.Чабан; Центральный экономико-математический институт АН СССР - В.М.Полтерович, В.И.Данилов; Московский государственный университет - А.С.Ашманов, А.А.Васин; Институт социально-экономических проблем АН СССР - Н.Н.Воробьев, А.М.Рубинов; Институт математики и кибернетики АН Литовской ССР - Э.Й.Вилкас, В.Гералавичюс, А.Сливинскас, В.Чиочис.

Большое внимание участниками школы было уделено ряду методологических вопросов математической экономики. Определяющая роль исследования конкретных механизмов организации, управления и функционирования социалистической экономики - главная тема выступлений В.Л.Макарова, Н.Н.Моисеева, В.М.Полтеровича и других докладчиков. На актуальность исследования различных механизмов кооперации особое внимание было обращено в докладах Н.Н.Моисеева и Ф.И.Ерешко. Ими же указана необходимость развития теории управляемости и наблюдаемости применительно к экономическим системам (подробнее см. §I.I).

Значительный резонанс вызвало обсуждение перспектив развития теории игр и ее приложений к математической экономике, состоявшееся по материалам доклада Н.Н.Воробьева. На конкретных примерах (нефтяной рынок, экологические модели и др.) докладчик проиллюстрировал неприемлемость обособления любой из сторон процесса исследования социально-экономических явлений, условно представимого в виде.



Изоляция отдельных сторон указанного процесса чревата дилетантством (а) , догматизмом (б) или уходом "в науку для науки" (в) - таков основной тезис сообщения, поддержанный всеми участниками Школы. В докладе Н.Н.Воробьева был проанализирован также ряд принципиальных вопросов математического описания конфликтных ситуаций, динамики конфликтов и прогнозирования их исходов[ ].

Важное место в проходивших обсуждениях занимали конкретные вопросы методологии: требования, предъявляемые к принципам оптимальности; обоснование постулатов, положенных в основу исследуемых моделей экономической динамики и равновесия; роль и место численного эксперимента в развитии теоретических концепций и т.д. Отмечалась назревшая необходимость в систематизации накопленного материала, в частности - классификации математических моделей экономики и связанных с ними принципов оптимальности. Этому вопросу была посвящена основная часть сообщения Э.Й.Вилкаса.

Докладчик отметил, что в настоящее время в теории игр и математической экономике исследуется не менее трех десятков различных принципов оптимальности, которые можно разбить на три большие группы:

I) принципы оптимальности, описываемые с помощью функций выбора;

2) упорядочения множества допустимых состояний, в частности упорядочения с помощью функций полезности;

3) принципы оптимальности в операторной форме.

Последнее означает, что на некотором классе игр, образующих функциональное пространство, определяется оператор, сопоставляющий каждой игре, т.е. элементу пространства игр, некоторый вектор в пространстве выигрышей и удовлетворяющий некоторому набору аксиом. В случае конечного числа игроков оператор принимает значения в арифметическом пространстве, размерность которого совпадает с числом игроков. В операторной форме можно записать, например, определение вектора Шепли и арбитражное решение по Нэшу.

В описании принципов оптимальности при всем их различии можно выделить аксиомы, входящие в той или иной форме во все аксиоматики.Если не считать совсем уж общего требования существования решения, то все упомянутые аксиомы можно разбить на семь групп, перечисленных ниже.

I) Доминирование или эффективность (оптимальность по Парето).

2) Симметрия или анонимность.

Обычно эта аксиома формулируется на языке перестановок и означает независимость решения от нумерации игроков.

3) Преобразование пространства состояний или альтернатив.

В частности, сюда входят требования инвариантности решения относительно классов линейных, однородных, монотонных и прочих преобразований множества альтернатив.

4) Присоединение альтернатив (т.е. любые две альтернативы можно сравнивать независимо от всех остальных, в частности, добавление доминируемой альтернативы не меняет решения).

5) Присоединение индивидов.

К этой группе относится аксиома о повторении индивидов, а также аксиома о сепарабельности, которая используется в арбитражных схемах и в играх против природы. Содержательный смысл подобных аксиом состоит в том, что решение игры с "болваном" и без него не должны различаться.

6) Операции над играми.

Сюда относятся аксиомы, используемые для описания принципов оптимальности в операторной форме, в частности аксиома линейности, используемая в определении вектора Шепли.

7) Граничные условия.

К этой группе относятся аксиомы, добавляемые из различных соображений с целью сузить область получаемых решений.

При изучении принципов оптимальности, видимо, следует обращать внимание не на связь отдельных аксиом, а на связь между их группами или представителями различных групп аксиом. Уже имеется ряд работ на эту тему.

Наконец, следует подчеркнуть прикладной характер обсуждаемого направления теории игр. Возможность рассматривать экономику как игру многих лиц еще не означает, что такое рассмотрение оправдано, так как если игра оказывается очень большой, то ее все равно не удается решить. Значительное число общих теоретико-игровых конструкций эффективно при рассмотрении некоторых локальных ситуаций, т.е. при решении тактических вопросов. В моделях с большим числом участников следует рассматривать более специализированные механизмы принятия решений, среди которых основным, безусловно, является механизм общего равновесия.

К числу требований к принципам оптимальности, упомянутых в выступлении Э.Й.Вилкаса (эффективность по Парето, реализуемость и др.), следует добавить, на наш взгляд, и такие как достижимость и информационная устойчивость. Под достижимостью (в широком смысле) имеется в виду следующее свойство принципа оптимальности: если решение C, отвечающее этому принципу, представимо как ядро некоторого естественного бинарного отношения α, то для каждого неоптимального состояния должна существовать монотонная (в смысле α) траектория, аппроксимирующая C. Что касается информационной устойчивости, то здесь речь идет об устойчивости относительно искажений информации об индивидуальных характеристиках участников (как сознательных, так и статистической природы). Подробнее об этих требованиях см. §3.3 настоящей статьи.

Перейдем к краткому описанию содержания работы. В первой главе излагается общая модель экономики, обсуждавшаяся в докладе В.Л.Макарова (§I.I). Здесь же анализируются схемы рационирования, рассмотренные в докладах В.Л.Макарова (§I.2) и В.М.Полтеровича (§I.3). В §I.4 описывается одна модификация понятия договорной экономики, предложенная А.Н.Козыревым. Круг вопросов, связанных с неэффективностью вальрасовских равновесий в экономиках с взаимовлиянием, освещается в докладе В.М.Маракулина, составляющем §I.5. Завершает главу изложение сообщения И.Г.Поспелова, посвященного обоснованию некоторых постулатов, лежащих в основе стандартных моделей равновесия. Вторая глава содержит результаты А.С.Злобина, И.С.Меньшикова, А.А.Чабана по численным экспериментам на моделях международного обмена. Третья глава посвящена изложению некоторых теоретико-игровых концепций, ориентированных на применение к математико-экономическим моделям, рассмотренным в главе I. Содержание ее первых двух параграфов составляет доклад В.А.Васильева, посвященный единому функционально-аналитическому подходу к исследованию c-ядра и вектора Шепли и понятию обобщенного решения Неймана - Моргенштерна. В третьем параграфе рассматриваются проблемы теории группового выбора, затронутые в сообщениях В.И. Данилова (механизм выявления спроса в условиях трансферабельности) и В.А.Васильева (стохастические расширения линейных порядков и парадокс Эрроу). Завершает главу изложение доклада Ф.И.Ерешко по вопросам применения теории иерархических игр к исследованию некоторых математико-экономических моделей. Последняя глава содержит изложение докладов А.М.Рубинова (§4.I), А.С.Ашманова (§4.2) и А.Ж.Жафярова (§4.3) по моделям экономической динамики неймановского типа.

Авторы благодарят участников Школы за предоставленные матариалы и полезные обсуждения основных результатов предлагаемой работы.

ГЛАВА I. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ И ЕЕ КОНКРЕТИЗАЦИИ

§I.I. Об общем определении экономики

Экономика является чрезвычайно сложным образованием. Поэтому математическое понятие, отражающее ее достаточно полно, также является сложным. Настолько сложным, что в общем виде им пользоваться затруднительно. Однако само по себе общее определение полезно во многих отношениях. В частности, оно п.-лезно для классификации и расположения результатов, относящихся к различным частным случаям определения экономики.

Мы здесь формулируем понятие экономики как раз таким образом, что почти все излагающиеся ниже результаты относятся к частным случаям этого понятия.

Описание общей математической модели экономики, обозначаемое далее через $\mathcal{E}$ и называемое просто экономикой, в силу своей универсальности должно состоять из большого числа составляющих элементов, которые удобно разбить на четыре группы. Иными словами, экономикой называется четверка

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{L}, \mathcal{L}, f \rangle ;$$

где $\mathcal{O}$ - описание организационной структуры экономики, $\mathcal{L}$ - описание пространства состояний, $\mathcal{L}$ - совокупность отношений предпочтения или правил выбора, используемых экономическими агентами, и f - описание экономического механизма.

Каждая из перечисленных групп элементов может быть в той или иной степени детализированной в зависимости от конкретного типа рассматриваемых моделей. Так, описание организационной структуры $\mathcal{O}$ в моделях математической экономики обычно состоит из множества номеров экономических агентов $N=\{1,2,\ldots,n\}$ и совокупности допустимых коалиций $\mathcal{G} \subset 2^N$. Возможна и более сложная (в частности, иерархическая) организационная структура. В этом случае элементами множества $\mathcal{G}$ будут не подмножества N, а так называемые древовидные структуры. Древовидная структура γ - это совокупность непустых подмножеств множества N такая, что: (I) для любых S и T из γ либо $T \cap S = \emptyset$, либо $T \supset S \vee S \supset T$; (2) все элементы (подмножества N) структуры γ разбиваются на уровни. Самому нижнему уровню принадлежат множества, не содержащие других множеств. Объединение множеств нижнего уровня дает все множество N. Уровень над нижним образуется из множеств, представляющих собой объединения множеств нижнего уровня. Следующий уровень образуется из множеств, представляющих собой объединения множеств предыдущего уровня, и т.д. Модели с иерархической организацией были представлены в докладе Ф.И.Ерешко (см., например, [12]).

Описание пространства допустимых состояний экономики также может быть достаточно сложным и даже представлять самостоятельный интерес для изучения. Например, во многих работах по математической теории экономической динамики основное внимание уделяется, как правило, чисто технологическим аспектам допустимости.

Уточнения понятия допустимого состояния экономики будут приводиться по мере необходимости. Что касается общей схемы, то всюду в дальнейшем предполагается, что число продуктов, фигурирующих в описании экономики, равно ℓ, множество их номеров $L=\{1,2,\ldots,\ell\}$; каждый участник $i\in N=\{1,2,\ldots,n\}$ характеризуется множеством допустимых для его потребления продуктов $X_i \subseteq R^\ell$, а в некоторых случаях еще и множеством производственных возможностей (по выпуску продуктов) $Y_i \subseteq R^\ell$. Потребление и производство продуктов каждым экономическим агентом описывается векторами, принадлежащими соответствующим множествам. При этом для экономики в целом должен выполняться материальный баланс, т.е. потребление каждого продукта не должно превышать его количество, имеющееся в наличии.

Существенной особенностью большинства рассматриваемых ниже моделей является задание в явном виде предпочтений участников $i\in N$ на множестве допустимых состояний $\mathcal{E}$. Изучение отношений предпочтения и способов их представления составляет предмет теории полезности, одного из наиболее разработанных разделов математической экономики.

В настоящей работе используются несколько способов задания отношений предпочтения. Наиболее общий из них описывается с помощью набора точечно-множественных отображений:

$$P_i : Z \to 2^Z, \quad i\in N,$$

где Z – пространство допустимых состояний экономики $\mathcal{E}$. Произвольному состоянию $x\in Z$ отображение P_i сопоставляет множество состояний более предпочтительных (по сравнению с $\bar{z}$) с точки зрения экономического агента i . Если отношения предпочтения заданы с помощью функций полезности $u=\{u_i\}_{i\in N}$, то

$$P_i(\bar{z})=\{z\in Z \mid u_i(z)>u_i(\bar{z})\},\quad \bar{z}\in Z.$$

Оператор $U=\{u_i\}_{i\in N}$ вместе с множеством допустимых состояний Z и естественным отношением порядка на R^n порождает задачу векторной оптимизации. Последняя приобретает математико-экономическую специфику, если в рассмотрение включается какое-либо описание экономического механизма.

Описание экономического механизма f представляет собой наиболее сложную составную часть общей модели экономики $\mathcal{E}$. Изучению экономического механизма посвящены все последующие параграфы настоящей главы, причем наряду со стандартным механизмом общего экономического равновесия исследуются схемы рационирования, договоры, состояния равновесия при наличии нескольких видов денег и цен. В связи с этим имеет смысл остановиться на некоторых вопросах математического моделирования экономического механизма, затронутых в докладе Н.Н.Моисеева.

Один из основных тезисов этого доклада касается моделирования экономической динамики и состоит в том, что соответствующая теория должна быть кооперативной. Экономику можно рассматривать как очень сложную управляемую систему. При этом надо учитывать, что на развитие экономики оказывают влияние все ее участники и их объединения, преследующие различные, но, как правило, не противоположные цели.

Одним из основных требований, предъявляемых к механизму экономического регулирования, является возможность сознательного управления экономикой с его помощью. Существующая теория управляемости, развитая Калманом и Красовским, предназначена для управления различными техническими устройствами и посвящена почти исключительно линейному случаю. При описании экономических явлений с помощью теории управляемых систем, как правило, возникают нелинейные дифференциальные уравнения. Однако это далеко не единственная трудность в исследовании экономических управляемых систем. Дело еще в том, что управление экономикой, как уже отмечалось, должно осуществляться посредством экономического механизма, учитывающего возможности кооперации экономических агентов, что еще более усложняет задачу [25,26].

§I.2. Экономика с рационированием

Экономика задается с помощью следующей информации:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i', X_i'', Y_i, \omega_i, \alpha_i, P_i\}_{i\in N}, q, Q \rangle .$$

Здесь $N=\{1,2,\dots,n\}$ - множество номеров экономических агентов; $q \in R^l$ - заданный (фиксированный) вектор цен, $Q \subseteq R^l$ - множество возможных векторов цен; произвольный элемент Q обозначается через p.

Таким образом, в $\mathcal{E}$ предполагается наличие двух рынков товаров. На одном рынке действуют фиксированные цены q, а на другом цены p устанавливаются с помощью механизма уравнивания спроса и предложения. (Еще более сложные ситуации рассмотрены в [I9].) Y_i - множество производственных возможностей агента $i \in N$, $Y_i \subset R^l$, где l - число продуктов, фигурирующих в экономике $\mathcal{E}$;

$$Y = \{y \in R^l / y = \sum_{i\in N} (y_i + \omega_i), \quad y_i \in Y_i\}$$

есть множество допустимых выпусков в $\mathcal{E}$. Если $y \geq 0$, то y можно интерпретировать как количество продуктов, имеющихся в $\mathcal{E}$, которые подлежат распределению для потребления среди агентов из N.

Обозначим через $x_i^*(y)$ вектор максимальных объемов продуктов, которые агент i может приобрести по ценам q, если всего произведено продуктов в объемах y. Предполагается, что $x_i^*: Y \to R^l$ есть однозначное отображение. С помощью x_i^* вводится многозначное отображение $X_i': Y \to 2^{R^l}$:

$$X_i'(y) = \{x_i' \in R^l / \; 0 \leq x_{ik}' \leq x_{ik}^*(y), \; x_{ik}^*(y) \geq 0,$$
$$x_{ik}' = x_{ik}^*(y), \; x_{ik}^*(y) \leq 0\}.$$

Здесь x_{ik}' - обозначение для k-й компоненты вектора x_i'.

Множество $X_i'(y)$ интерпретируется как совокупность таких наборов продуктов, которые оказываются доступными для потребления агенту i по ценам q. Далее, X_i'' - множество векторов потребления, доступных агенту i для приобретения по ценам $p \in Q$; ω_i - вектор начальных количеств продуктов, имеющихся в распоряжении агента i.

Множество $\mathcal{Z}$ допустимых состояний экономики $\mathcal{E}$ имеет в данном случае вид:

$$\mathcal{Z}=\{z\in R^{\ell(3n+1)} \mid z=(p,(x_i', x_i'', y_i)_{i\in N}),$$

$$x_i'\in X_i'(y),\ x_i''\in X_i'',\ y_i\in Y_i,\ p\in Q\}$$

Формирование основных денежных доходов y экономических агентов задается с помощью набора функций $(\alpha_i)_{i\in N}$ $\alpha_i:\mathcal{Z}\to R_+$, где $\alpha_i(z)$ – основной денежный доход, который агент i получает в состоянии z. В величине $\alpha_i(z)$ учтена сумма денег, которую агент i получает от реализации своих запасов ω_i.

Суммарный денежный доход, которым располагает агент i в состоянии z для покупки продуктов, складывается из основного дохода $\alpha_i(z)$ и дополнительного дохода $(x_i^*(y)-x_i')(p-q)$. Последний формируется следующим образом: $x_i^*(y)$ есть максимальный набор продуктов, которые агент может купить по ценам q. Если реально ему нужно для потребления только x_i' продуктов, то разницу $x_i^*(y)-x_i'$ он может реализовать по ценам p (если они выше цен q). В результате этой операции получается дополнительный доход, равный по величине

$$(x_i^*(y)-x_i^*)(p-q) \qquad \text{, если } p\geqslant q.$$

Для общего случая формула подсчета дополнительного дохода имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\ell}(x_{ik}^*(y)-x_{ik}')[(p_k-q_k)]^+,$$

где $[a]^+=a$ при $a\geqslant 0$, $[a]^+=0$ при $a\leqslant 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2.I. Здесь сделано довольно сильное и нереалистическое предположение, что каждый агент обязательно пользуется возможностью получить дополнительный доход, т.е. агент i обязательно покупает весь объем $x_{ik}^*(y)$ продукта k, на который он имеет право, по цене q_k, а дальше излишек $x_{ik}^*(y)-x_{ik}'$ продается по цене p_k.

Наконец, $P_i:\mathcal{Z}\to 2^{z_i}$, где $\mathcal{Z}_i=\{z_i\in R^{3\ell} \mid z_i=(x_i', x_i'', y_i), x_i'\in X_i'(y), x_i''\in X_i'', y_i\in Y_i\}$. Множество $P_i(z)$ состоит из всех $\tilde{z}_i$ таких, которые (строго) предпочитаются стратегии z_i в состоянии z агентом i. Таким образом, отображение P_i задает предпочтения или вкусы, или целевую функцию агента i, которым он руководствуется в процессе своей экономической деятельности.

В соответствии с предположением, указанным в замечании I.2.I, бюджетное отображение $B_i : Z \to 2^{Z_i}$ определяется следующим образом:

$$B_i(z) = \{\tilde{z}_i \in Z_i \mid \tilde{x}_i' q + \tilde{x}_i'' p \le \alpha_i(z/\tilde{z}_i) + \sum_{k=1}^{l} (x_{ik}^*(y/\tilde{y}_i) - \tilde{x}_{ik}')[(p_k - q_k)]^+\}.$$

Укажем здесь еще два варианта определения бюджетного отображения:

$$B_i'(z) = \{\tilde{z}_i \in Z_i \mid \tilde{x}_i' q + \tilde{x}_i'' p \le \alpha_i(z/\tilde{z}_i) + \sum_{k=1}^{l} (x_{ik}^*(y) - \tilde{x}_{ik}')[(p_k - q_k)]^+\}$$

и

$$B_i''(z) = \{\tilde{z}_i \in Z_i \mid \tilde{x}_i' q + x_i'' p \le \alpha_i(z) + \sum_{k=1}^{l} (x_{ik}^*(y) - \tilde{x}_{ik}')[(p_k - q_k)]^+\}.$$

В варианте (B_i') предполагается, что при формировании объемов $x_i^*(y)$ происходит запаздывание и текущая стратегия $\tilde{y}_i$ не успевает сказаться на величине дополнительного дохода. В варианте (B_i'') предполагается, что это запаздывание касается формирования не только дополнительного, но и основного дохода.

Состояние экономического равновесия по определению есть вектор $\bar{z} \in Z$ такой, что

$$B_i(\bar{z}) \cap P_i(\bar{z}) = \emptyset,$$

$$E(\bar{z}) = 0.$$

Здесь $E(z)$ - обозначение вектора избыточного спроса, т.е.

$$E(z) = \sum_{i \in N} x_i' + \sum_{i \in N} x_i'' - y.$$

Соответственно вариантам определения бюджетного отображения появляются варианты определения состояния равновесия.

Очевидно, что вариант (B_i'') дает самое широкое множество состояний равновесия W''. Вариант (B_i') дает $W' \subset W''$ и основное определение дает множество W, для которого $W \subset W' \subset W''$.

Мы здесь не указываем максимально общих условий для существования равновесия, чтобы не акцентировать внимание на технических трудностях. Стандартная схема доказательства существования равновесия [16] базируется на использовании теоремы Какутани и подходящим образом сформулированном законе Вальраса. В результате неподвижная точка $\bar{z}$ нужным образом построенного точечно-множественного отображения из Z в 2^Z обеспечивает выполнение условия

$$B_i(\bar{z}) \cap P_i(\bar{z}) = \phi, \quad i \in N,$$

а закон Вальраса дает для этой неподвижной точки равенство спроса и предложения $E(\bar{z}) = 0$. Приведем условия, обеспечивающие применимость указанной схемы.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.2.I. Множество Z является выпуклым компактом.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2.2. Z - выпуклый компакт, если X_i'', Y, Q - выпуклые компакты, а отображения X_i' выпуклы, т.е.

$$\lambda X_i'(y') + (1-\lambda) X_i'(y'') \leq$$
$$\leq X_i'(\lambda y' + (1-\lambda) y'') \quad \text{для любых } y', y'' \text{ и } \lambda \in [0,1].$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.2.2. Отображения B_i непрерывны и имеют для любого z непустой выпуклый образ.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2.3. Для любого z из Z определим множество номеров продуктов $K_z = \{k \in L \mid p_k > q_k\}$. Положим $-K_z = L \setminus K_z$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.2.3. Для любого $z \in Z$ выполнено равенство

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(z) = \sum_{i \in N} \sum_{k \in K_z} x_{ik}^*(y) q_k +$$
$$+ \sum_{k \in K_z} (y^{(k)} - \sum_{i \in N} x_{ik}^*(y)) p_k + \sum_{k \in -K_z} y^{(k)} p_k .$$

Здесь $y^{(k)}$ - обозначение для k-й компоненты вектора y.

Указанное тождество представляет собой закон Вальраса для экономики $\mathcal{E}$ с двумя рынками. Действительно, $\sum_{i \in N} \alpha_i(z)$

представляет собой суммарный основной доход всех участников экономической системы. Этот доход в соответствии с законом Вальраса должен определять стоимость продуктов, идущих на потребление. Таких продуктов имеется y. Однако стоимость y определяется неоднозначно, поскольку имеется две системы цен q и p. В соотвествии с написанным тождеством экономическим агентам выдаются средства, гарантирующие покупку максимально возможных объемов $x_i^*(y)$ по ценам q, т.е. величина $\sum_{i\in N}\sum_{k\in K_z} x_{ik}^*(y) q_k$. При этом учитывается, что если $p_k < q_k$, то продукт k по цене q_k покупаться не будет (поскольку $X_i'(y) \subseteq X_i''$) и, следовательно, покупка продукта k учитывается по цене p_k. Все это составляет в целом сумму $\sum_{k\in K_z} y^{(k)} p_k$.

Оставшиеся из множества K_z продукты составляют объемы

$$(y^{(k)} - \sum_{i\in N} x_{ik}^*(y)), \quad k \in K_z .$$

Эти объемы учитываются по ценам p. Таким образом, продукты y оцениваются в ценах q в максимально возможном объеме, который агенты $i \in N$ могут получить, а остатки оцениваются в ценах p. Однако количество денег, которое должно обращаться в экономике $\mathcal{E}$, больше суммарного дохода $\sum_{i\in N} \alpha_i(z)$ на величину суммарного дохода $\sum_{i\in N}\sum_{k\in K_z} (x_{ik}^*(y) - x_{ik}')(p_k - q_k)$.

Поскольку участники имеют возможность потреблять меньше, чем величина $x_i^*(y)$, то у них появляется дополнительный доход, образующийся благодаря разнице цен p и q. Таким образом, в действительности, в состоянии z имеющиеся для потребления продукты y оцениваются в ценах q и p по-другому, не так, как заложено в рассматриваемом законе Вальраса. А именно, продукты, первоначально купленные по ценам q, а потом перепроданные по ценам p, оцениваются в ценах p. Чем больше объем таких перепродаж, тем больше, естественно, требуется денег в обращении.

Ядро для экономики $\mathcal{E}$ определяется естественным образом при следующих условиях.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.2.4. Отображения P_i определены не на множестве $\mathcal{Z}$, а на множествах $\mathcal{Z}_i$ каждое, т.е. $P_i : \mathcal{Z}_i \to \mathcal{Z}_i$ и его образы не зависят от остальных компонент состояния $z \in \mathcal{Z}$

Данное предположение позволяет выделять подэкономики $\mathcal{E}_s$

экономики $\mathcal{E}$, где s - произвольная совокупность экономических агентов, т.е. $s \in 2^N$.

Пусть σ -обозначение для множества допустимых коалиций экономических агентов. Сбалансированное состояние z из Z (т.е. такое, что $E(z)=0$) блокируется коалицией экономических агентов $s \in \sigma$, если существует состояние $(\tilde{z}_i)_{i \in s}$ подэкономики $\mathcal{E}_s$ такое, что

$$\sum_{i \in s} \tilde{x}_i' + \sum_{i \in s} \tilde{x}_i'' = \sum_{i \in s} \tilde{y}_i' + \sum_{i \in s} \omega_i ,$$

$\tilde{z}_i \in CP(z_i)$, $i \in s$, и для хотя бы одного $i \in s$ справедливо $\tilde{z}_i \in P_i(z_i)$. Здесь $CP_i(z_i)$ - обозначение замыкания множества $P_i(z)$.

Ядро экономики $\mathcal{E}$, обозначаемое через $C(\sigma)$, состоит из множества сбалансированных состояний, которые не блокируются никакой коалицией из σ .

Заметим, что в определении ядра $C(\sigma)$ цены p (и q) никак не участвуют. Поэтому в действительности ядро определено не для сбалансированных состояний z из Z , а для классов состояний с произвольным $p \in Q$.

Понятие ядра, определенное для экономики $\mathcal{E}$, почти ничем не отличается от обычного определения ядра экономики (см., например, [18]). Различие состоит лишь в следующем. В стандартном определении фигурирует вектор потребительских благ x_i для агента i . Здесь же этот вектор x_i разбивается на две части x_i' и x_i'' , $x_i'+x_i''=x_i$. При этом данное разбиение влияет на отношение предпочтения P_i , поскольку P_i задано на (x_i', x_i'', y_i) , а не только на (x_i, y_i) .

Условия, при которых состояния равновесия лежат в ядре $C(\sigma)$, состоят в том, что любая коалиция s из σ имеет возможность полностью отделиться от остальных участников и образовать свою собственную подэкономику $\mathcal{E}_s$ таким образом, что экономические агенты из $-s$ своими действиями не могут повлиять на состояние экономики $\mathcal{E}_s$. Эти условия содержатся в предположении I.2.4, а также в следующем ниже предположении I.2.5.

Введем обозначения:

$y_s = \sum_{i \in s} (y_i + \omega_i)$, $\quad y_s^{(k)}$ - k -я компонента вектора y_s ,

$$Y_s = \{y_s \in R^l \mid y_s = \sum_{i \in S} (y_i + \omega_i),\ y_i \in Y_i,\ i \in S\}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I.2.5. (а) Функции распределения основного дохода α_i определены только на переменных z_i и p не зависят от других компонент состояния $z \in Z$.

(б) Функции рационирования $(x_i^*)_{i \in N}$ удовлетворяют условию: для любой коалиции S из σ и любого $y_s \in Y_s$ имеет место неравенство

$$\sum_{i \in S} x_i^*(y) \leq y_s .$$

(в) Для любой коалиции $S \in \sigma$ и любого $z_s \in Z_s$ и $p \in Q$ выполнено равенство

$$\sum_{i \in S} \alpha_i(z_i, p) = \sum_{i \in S} \sum_{k \in K_{z_s}} x_{ik}^*(y_s) q_k +$$

$$+ \sum_{k \in K_{z_s}} (y_s^{(k)} - \sum_{i \in S} x_{ik}^*(y_s)) p_k + \sum_{k \in -K_{z_s}} y_s^{(k)} p_k .$$

Здесь условие (б) данного предположения говорит о том, что функции $(x_i^*(y))_{i \in N}$ рационирования предметов потребления являются сепарабельными относительно любого разбиения N, $N = S \cup -S$, $S \in \sigma$, в том смысле, что любая коалиция S из σ обеспечивает себе из своего собственного производства y_s максимальные рационы $(x_i^*(y))_{i \in S}$. Это и означает, что заданное рационирование $(X_i)_{i \in N}$ не препятсвует выделению подэкономик $\mathcal{E}_s$. Условие (в) в предположении I.2.5 представляет собой формулировку закона Вальраса для произвольной подэкономики $\mathcal{E}_s$, $S \in \sigma$.

ТЕОРЕМА I.2.I. *В условиях предположений I.2.4, I.2.5 состояние экономического равновесия $\bar{z}$ лежит в ядре $C(\sigma)$, если $\bar{p} \geq q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть существует $S \in \sigma$ и состояние $(\tilde{z}_i)_{i \in S}$, $\sum_{i \in S} (\tilde{x}_i' + \tilde{x}_i'') = \tilde{y}_s$ такие, что $\tilde{z}_i \in CP_i(\bar{z}_i)$ для всех $i \in S$ и для хотя бы одного i из S - $\tilde{z}_i \in P_i(\bar{z})$. Тогда в силу замечания I.2.I о ненасыщаемости экономических агентов для всех $i \in S$

$$\tilde{x}_i' q + \tilde{x}_i'' \bar{p} \geq \alpha_i(\tilde{z}_i, \bar{p}) + \sum_{k \in K} (x_{ik}^*(\tilde{y}_s) - \tilde{x}_{ik}')(\bar{p}_k - q_k),$$

причем для тех i , для которых $\tilde{z}_i \in P_i(\bar{z}_i)$, неравенство строгое. Следовательно, суммируя по $i \in S$ и учитывая условие $\bar{p} \geqslant q$, т.е. $K_{\bar{z}} = L$, получаем

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}'_i q + \sum_{i \in S} \tilde{x}''_i \bar{p} > \sum_{i \in S} \alpha_i(\bar{z}_i, \bar{p}) + \sum_{i \in S} (x_i^*(\tilde{y}_s) - \tilde{x}'_i)(\bar{p} - q).$$

Привлекая закон Вальраса (условие (в) предположения I.2.5), имеем

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}'_i q + \sum_{i \in S} \tilde{x}''_i \bar{p} > \sum_{i \in S} \tilde{x}_i^*(\tilde{y}_s) q + (\tilde{y}_s - \sum_{i \in S} x_i^*(\tilde{y}_s))\bar{p} +$$

$$+ \sum_{i \in S} (x_i^*(\tilde{y}_s) - \tilde{x}'_i)(\bar{p} - q). \qquad (I.2.I)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$\sum_{i \in S} (\tilde{x}_i + \tilde{x}''_i)\bar{p} > \tilde{y}_s \bar{p},$$

что противоречит балансу

$$\sum_{i \in S} (\tilde{x}'_i + \tilde{x}''_i) = y_s.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2.4. Теорема I.2.I имеет место в предположении, что $\bar{p} \geqslant q$. Нижеследующая теорема I.2.2 устанавливает принадлежность равновесия ядру без условия $\bar{p} \geqslant q$, но зато при дополнительном условии, что продукты, полученные по рациону (x'_i) , и продукты, купленные по ценам $\bar{p}(x''_i)$, не различаются для потребителей.

ТЕОРЕМА I.2.2. Пусть выполнены предположения I.2.4–I.2.5. Пусть, кроме того, отображения P_i заданы не на переменных (x'_i, x''_i, y_i) , а на переменных (x_i, y_i) , где $x_i = x'_i + x''_i$. Тогда состояние равновесия $\bar{z}$ лежит в ядре $C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства в точности такая же, как в теореме I.2.I. Разница состоит в применении закона Вальраса. Вместо неравенства (I.2.I) имеем неравенство

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}'_i q + \sum_{i \in S} \tilde{x}'' \bar{p} > \sum_{i \in S} \sum_{k \in K_{\bar{z}}} x_{ik}^* (\tilde{y}_s) q_k +$$

$$+\sum_{k\in K_{\bar z}} (\tilde y_s^{(k)} - \sum_{i\in s} x_{ik}^*(\tilde y_s))\bar p_k + \sum_{k\in K_{\bar z}} \tilde y_s^{(k)} \bar p_k +$$

$$+\sum_{i\in s}\sum_{k\in K_{\bar z}} (x_{ik}^*(\tilde y_s) - \tilde x_{ik}')(\bar p_k - q_k). \qquad (I.2.2)$$

Поскольку по условию теоремы P_i определены на (x_i, y_i) и $X_i' \subseteq X_i''$, то можно считать, что $\tilde x_{ik} = \tilde x_{ik}''$, $\tilde x_{ik}' = 0$ для всех $k \in -K_{\bar z}$. Из предположения о ненасыщаемости по всем агентам и продуктам и определения состояния равновесия непосредственно следует, что $\tilde x_{ik}' = 0$ для $k \in -K_{\bar z}$. Таким образом, во всех слагаемых неравенства (I.2.2) можно принимать во внимание суммирование только по $k \in K_{\bar z}$. Учитывая это обстоятельство, соответствующие упрощения неравенства (I.2.2) приводят к неравенству

$$\sum_{i\in s} \tilde x_i' \bar p + \sum_{i\in s} \tilde x'' \bar p > \tilde y_s \bar p,$$

что противоречит сбалансированности. Теорема доказана

§I.3. Схемы рационирования ресурсов

Обе рассматриваемые ниже схемы рационирования ресурсов и довольно полный обзор литературы по данному вопросу опубликованы в виде отдельной статьи [32], поэтому наше изложение будет предельно кратким, даже конспективным.

Рассмотрим систему из n участников - потребительских групп и производственных единиц. Обозначим через u_i целевую функцию участника i ; она зависит от $(l+1)$ -мерного вектора $x_i = (x_{ik})$, $k = \overline{0,l}$, $i \in N$. Координата x_{ik} указывает суммарное количество ресурса k, приобретаемое (если $x_{ik} > 0$ или поставляемое (если $x_{ik} < 0$) агентом i. Индекс $k = 0$ приписываем специфическому ресурсу - деньгам. Векторы x_i могут выбираться из допустимого множества $X_i \subset R^{l+1}$. Для производственных единиц оно определяется прежде всего технологией и объемами имеющихся невоспроизводимых ресурсов, а также начальным запасом денег. Цены $p = (p_k) \in R^{l+1}$ не предполагаются равновесными, и для обеспечения баланса приходится задавать участникам ограничения $g_i = (g_{ik}) \in R^l$, $h_i = (h_{ik}) \in R^l$ на объемы приобретаемых и поставляемых благ соответственно. Деньги не подлежат рационированию; каждый может тратить их из имеющихся у него запасов или получать от других агентов, оставаясь, однако, в пределах бюджетных неравенств. Цену денег считаем равной единице.

Таким образом, предполагается, что поведение участника i определяется задачей

$$u_i(x_i) \to max, \ px_i \leq a_i x_i \in X_i, \ h_{ik} \leq x \leq g_{ik}, k \in L. \quad (I.3.I)$$

Совокупность векторов $\{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^n$ назовем приемлемым состоянием, если выполнены четыре требования:

(а) $\sum_{i=1}^n x_i^* = 0$ (материальный баланс);

(б) вектор x_i^* является решением задачи (I.3.I) при $g_i = g_i^*$, $h_i = h_i^*$ (рациональность выбора);

(в) $g_i^* \geq 0$, $h_i^* \leq 0$ ("суверенность выбора");

(г) не существует продукта k и участников i, j таких, что одновременно выполняются равенства $x_{ik}^* = g_{ik}^*$, $x_{jk}^* = h_{jk}^*$. (продукты разделены на дефицитные и недефицитные).

Будем называть ресурс k дефицитным в состоянии $\xi = \{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^n$, если для некоторого участника i достигается верхнее ограничение по этому ресурсу, т.е. $x_{ik}^* = g_{ik}^*$. Если $x_{jk}^* = h_{jk}^*$ при каком-либо j, то продукт k называется неходовым, а если $h_{ik}^* < x_{ik}^* < g_{ik}^*$ для всех i, то сбалансированным. В силу (г) три введенных множества продуктов попарно не пересекаются. Комментарии к требованиям (а) и (б) излишни, комментарий к (в) есть в [32].

Допустим теперь, что между участниками может происходить обмен ресурсами, причем взаимные расчеты ведутся по фиксированным ценам p. Непосредственно из условий (б)-(г) вытекает справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3.I. *Пусть в результате обмена количество дефицитных ресурсов участника i не возрастает, а количество неходовых - не убывает. Тогда целевая функция u_i не увеличивается. Если же u_i строго квазивогнута, то изменение состояния при таких условиях приводит к ее уменьшению.*

Пусть цены p и натуральные ограничения g_i, h_i фиксированы. Назовем пассивным спросом участника i совокупность решений задачи (I.3.I) как функцию от p, g_i, h_i. В силу (а) пассивный спрос в приемлемом состоянии всегда сбалансирован и, следовательно, не содержит информации о дефицитности ресурсов. Поэтому целесообразно ввести понятие активного спроса.

Рассмотрим задачу (I.3.I), отбросив ограничения $h_{ik} \leqslant x_{ik} \leqslant g_{ik}$ при некотором фиксированном k. Множество значений координаты k оптимального вектора в модифицированной таким образом задаче (I.3.I) обозначим через $D_i^k(p, g_i, h_i)$, $k \in L$. Отображение

$$D_i(p, g_i, h_i) = \{d_i = (d_{ik}) \in R^l \mid d_{ik} \in D_i^k(p, g_i, h_i)\}$$

назовем активным спросом участника i.

Сформулированные выше принципы (а)-(г) привлекательны потому, что они, с одной стороны, оставляют значительные возможности децентрализованного принятия решений и с другой - определяют состояния, обладающие некоторыми оптимальными свойствами. Однако приемлемых состояний может быть много, и одно из них может быть лучше, чем другое, для всех участников В литературе исследовались различные пути решения возникающей здесь проблемы выбора. Ниже описываются две схемы рационирования ресурсов, отражающие некоторые черты реальных экономических систем.

Наряду с качественным принципом (г) могут быть заданы количественные правила распределения прав на покупку дефицитных товаров между покупателями и прав на продажу неходовых товаров между продавцами. Будем называть такие правила схемами рационирования. В дальнейшем схемы рационирования различаются между собой как мягкие и жесткие. Жесткая схема описывается двумя наборами функций f_{ik} и $\varphi_{ik}, k \in L, i \in N$. Функция $f_{ik}(\xi_k)$ указывает лимит на потребление ресурса k участником i, если сумма всех выделяемых лимитов равна неотрицательному числу ξ_k. Точно так же функция $\varphi_{ik}(\eta_k)$ задает лимит на продажу ресурса k участником i, если сумма всех лимитов равна неположительному числу η_k. Примером может служить равномерная схема рационирования.

Теперь наряду с принципами (а)-(г) введем следующее требование:

(д) ограничения на любой ресурс k должны быть согласованы со схемой рационирования, т.е.

$$g_{ik}^* = f_{ik}\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ik}^*\right), \qquad h_{ik}^* = \varphi_{ik}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ik}^*\right).$$

Ситуации, когда цены жестко фиксированы, являются не столь уж частыми. Как правило, имеется некоторый диапазон возможного изменения цен. Чтобы учесть подобные обстоятельства, зададим верхний $\bar{\bar{p}}_k$ и нижний $\bar{p}_k$ уровни цен на ресурсы, $\bar{\bar{p}}_k \geqslant \bar{p}_k \geqslant 0$. Естественно потребовать, чтобы выбираемые в этом диапазоне цены удовлетворяли следующему условию:

(е) цена денег $p_0^* = 1$; $\bar{p}_k \leqslant p_k^* \leqslant \bar{\bar{p}}_k$, $k \in L$;
цена ограниченного по спросу товара находится на максимальном уровне, а цена товара, ограниченного по предложению, - на минимальном, т.е. если $x_{ik}^* = g_{ik}^*$ при каком-либо i, то $p_k^* = \bar{\bar{p}}_k$; если $x_{ik}^* = h_{ik}^*$ при каком-либо i, то $p_k^* = \bar{p}_k$.

Совокупность векторов $(p^*, \{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^{n})$ называется рационируемым равновесием первого рода, если состояние $\{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^{n}$ приемлемо при ценах p^* и выполнены условия (д), (е).

Следующие предположения будут по мере необходимости использоваться в дальнейшем.

AI. Множества $X_i \subset R^{l+1}$ замкнуты, выпуклы, ограничены снизу, содержат нуль-вектор и представимы в виде

$$X_i = \{x_{i0} \mid x_{i0} \geqslant -\omega_{i0}\} \times \mathfrak{X}_i,$$

где $\mathfrak{X}_i \subset R^l$, а ω_{i0} - запас денег у участника i.

А2. Функции u_i определены на X_i, непрерывны, полустрого квазивогнуты и не убывают по x_{i0}.

А3. Начальные запасы денег строго положительны.

А4. Для каждого продукта k найдутся участник i (зависящий от k) и вектор $\tilde{x}_i \in X_i$ такие, что $\tilde{x}_i \leqslant 0$, $\tilde{x}_{ik} < 0$, а функция u_i строго возрастает по x_{i0}.

А5. Для каждого продукта k найдется участник i (зависящий от k) такой, что u_i строго возрастает по x_{ik}, а множество X_i содержит k-ю полуось $e_k = \{x_i = (x_{ij}) \mid x_{ij} = 0,\ j \neq k,\ x_{ik} \geqslant 0\}$.

А6. Функция u_i строго возрастает по x_{i0}.

ТЕОРЕМА 1.3.I. *Пусть выполнены предположения* AI-А3, *а функции* $f_{ik}, \varphi_{ik}, i \in N, k \in L$, *определены на* R_+^1 *и* R_-^1 *соответст-*

венно, непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ik}(\xi_k)=\xi_k, \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ik}(\eta_k)=\eta_k, \quad f_{ik}\geqslant 0, \quad \varphi_{ik}\leqslant 0,$$
$$f_{ik}(\xi_k)\longrightarrow +\infty \quad \text{при } \xi_k \longrightarrow +\infty,$$
$$\varphi_{ik}(\xi_k)\longrightarrow -\infty \quad \text{при } \eta_k \longrightarrow -\infty.$$

Тогда рационируемое равновесие первого рода существует.

Если в задаче (I.3.I) какое-нибудь ограничение не достигается, то в силу AI, A2 его можно отбросить вовсе. Если для всех участников выполнены строгие неравенства $h_{ik}^* < x_{ik}^* < g_{ik}^*, k\in L$, то рационируемое равновесие совпадает с "классическим".

ТЕОРЕМА I.3.2. Пусть выполнены условия AI–A5 и $\bar{p}=0$. Найдется число π такое, что при $\bar{\bar{p}}_k \geqslant \pi, k\in L$, для произвольного рационируемого равновесия $(p^*, \{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^{n})$ все продукты сбалансированы, т.е. $h_{ik}^* < x_{ik}^* < g_{ik}^*$, $k\in L$, $i\in N$.

Эта теорема гарантирует существование равновесия в классическом смысле при довольно слабых предположениях.

Использованное выше понятие схемы рационирования непригодно для описания таких систем, где объем выделяемых лимитов зависит от заявок участников. В связи с этим представляет интерес другой подход, излагаемый ниже. Как и раньше, цены не предполагаются фиксированными, а могут меняться в заданных пределах. Процесс рационирования зависит от величины предельных значений цен, благодаря чему удается найти приемлемое состояние, согласованное с заданной гибкой схемой.

Обозначим через d_{ik} величину заявки участника i по ресурсу k. Положительное значение d_{ik} соответствует заявке на потребление, а отрицательное – заявке на поставку. Пусть $\Delta_k=(d_{1k},\dots,d_{nk})$ – вектор заявок по продукту k, $\Delta_k\in R^n$. Для произвольного числа a введем обозначение $a^-=min\{0,a\}$, $a^+=max\{0,a\}$. Базовой схемой рационирования назовем набор функций $F_{ik}(\Delta_k)$, $k\in L$, $i\in N$, определенных и непрерывных на R^n и удовлетворяющих следующим условиям при любых Δ_k :

В1. $d_{ik}^- \leq F_{ik} \leq d_{ik}^+$.

В2. $\sum_{i=1}^{n} F_{ik} = 0$.

В3. Если $d_{ik} \sum_{j=1}^{n} d_{jk} \leq 0$, то $F_{ik} = d_{ik}$.

Гибкой схемой рационирования назовем набор функций

$$G_{ik}(p_k, \Delta_k), \quad H_{ik}(p_k, \Delta_k), \quad i \in N, \quad k \in L,$$

определенных на $R_+^1 \times R^n$, непрерывных и таких, что для некоторой базовой схемы рационирования F_{ik}, $i \in N$, $k \in L$, тождественно по p_k, Δ_k выполнены условия

В4. $G_{ik} \geq F_{ik}^+$, причем $G_{ik} = F_{ik}^+$ тогда и только тогда, когда $p_k \geq \bar{p}_k$; $H_{ik} \leq F_{ik}^-$, причем $H_{ik} = F_{ik}^-$ тогда и только тогда, когда $p_k \leq \underline{p}$.

Поясним введение определения. Будем исходить из предположения о том, что каждый участник потребляет (поставляет) не более, чем заявлено и чем разрешено рационирующей схемой. При этом базовая схема указывает объемы затрат и выпуска, которые должны быть реализованы. Согласно В1, они имеют тот же знак, что заявки, и не превосходят последние по абсолютной величине. В силу В2 рекомендуемые объемы сбалансированы. Если спрос не превосходит предложение, то заявки на потребление не удовлетворяются; если предложение не превосходит спрос, то должны быть удовлетворены заявки на поставки (см.В3).

Гибкие схемы рационирования позволяют осуществлять распределение, пропорциональное заявкам или соответствующее заданному порядку приоритетов. В [32] описан общий метод построения гибких схем, включая два указанных частных случая.

Как и выше, обозначим через $D_i(p, g_i, h_i) \subset R^l$ совокупность векторов активного спроса при ценах p и ограничениях g_i, h_i. Если $d_i = (d_{ik}) \in D_i(p, g_i, h_i)$, то, по определению, число d_{ik} является k-й компонентой решения модифицированной задачи (I.3.I); модификация заключается в удалении ограничения $h_{ik} \leq x_{ik} \leq g_{ik}$ на продукт k.

Набор $(p^*, \{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^n)$ называется рационируемым равновесием второго рода, если состояние $\{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^n$ приемлемо, выполнено (е) и сверх того имеет место условие

$$(\text{д}') \; g_{ik}^* = G_{ik}(p_k^*, d_{1k}, \ldots, d_{nk}^*), \; h_{ik}^* = H_{ik}(p_k^*, d_{1k}^*, \ldots, d_{nk}^*)$$

для всех i, k и некоторого набора векторов

$d_i^* = (d_{ik}^*) \in \mathcal{D}_i\,(p^*, g_i^*, h_i^*),\ i \in N,\ k \in L.$

В этом определении заявки участников отождествляются с их активным спросом на данный продукт, зависящим от цен и ограничений на все продукты. В свою очередь ограничения через систему рационирования определяются ценами и размерами заявок.

ТЕОРЕМА I.3.3. Пусть выполнены условия AI–A3, A6, $p_k > \bar{p}_k > 0,\ k \in L$. Тогда для любой гибкой схемы существует рационируемое равновесие второго рода.

По-видимому, справедлив также аналог теоремы I.3.2, согласно которому при выполнении A4, A5 при $\bar{p} = 0$ и при достаточно больших верхних ограничениях на цены любое рационируемое равновесие второго рода оказывается равновесием в классическом смысле.

Если возможность регулирования некоторых цен отсутствует ($\bar{\bar{p}}_k = \bar{p}_k$ для некоторых k), то введенное определение гибкой схемы теряет смысл. Можно модифицировать его, заменив в условии B4 неравенство $p_k > \bar{p}_k$ другим естественным критерием дефицитности $\sum_{i=1}^{n} d_{ik} > 0$; при этом вместо $p_k < \bar{\bar{p}}_k$ используем неравенство $\sum_{i=1}^{n} d_{ik} < 0$. Нетрудно доказать, что тогда существует состояние, удовлетворяющее всем требованиям, предъявляемым к рационируемому равновесию второго рода, кроме условия (г), которое нарушается для сбалансированных продуктов: если $\sum_{j=1}^{n} d_{jk}^* = 0$, то необходимо ограничивать и потребление, и поставки ресурса k. Более того, если $d_{jk}^* = 0$, то участник j должен ощущать и верхние, и нижние пределы. В частности, в классическом равновесии ограничиваются и поставщики, и потребители всех ресурсов. Устранение такого феномена возможно лишь за счет нарушения непрерывной зависимости равновесных значений g_i^* и h_i^* от исходных параметров модели; при малых флуктуациях сбалансированный продукт может стать и дефицитным, и неходовым, значит, ограничения должны меняться скачком. Это характерно для рационируемого равновесия первого рода. Таким образом, классическое равновесие является особым состоянием среди рационируемых равновесий.

Выше неявным образом предполагалось, что участники формируют свои заявки, ориентируясь на ограничения g_i, h_i, навязанные извне. В действительности, возможно (и фактически наблюдается) гораздо более сложное поведение. Естественно считать, что, имея ту или иную информацию о системе, они будут составлять заявки так, чтобы в результате действия схемы рационирования оказаться в наиболее выгодном положении. Однако и в рамках простых моделей, которые были описаны выше, возникает ряд важных и трудных проблем. К их числу относится задача выбора оптимальной в том или ином смысле схемы рационирования. Ее решение зависит от того, какие приемлемые состояния считаются наилучшими. Обсуждению этого вопроса уделено много внимания в [32], здесь мы ограничимся кратким изложением.

Из всей совокупности приемлемых состояний естественно выбирать неулучшаемые в смысле Парето относительно функций u_i. К сожалению, множество приемлемых состояний обычно невыпукло, и охарактеризовать его парето-оптимальные точки эффективным образом не удается. В связи с этим возникает вопрос об изучении подклассов приемлемых состояний, обладающих теми или иными просто проверяемыми оптимальными свойствами.

Пусть $\eta=\{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^n$ – приемлемое состояние при ценах p. Определим множество $Q(\eta)$ наборов $\{x_i\}_{i=1}^n$ системой неравенств

$$\sum_{i=1}^n max\{0;x_{ik}\}\leq-\sum_{i=1}^n min\{0;x_{ik}^*\},\, k\in\{j>0|\exists i:x_{ij}^*=g_{ij}^*\}, \tag{I.3.2}$$

$$-\sum_{i=1}^n min\{0;x_{ik}\}\leq\sum_{i=1}^n max\{0;x_{ik}^*\},\, k\in\{j>0|\exists i:x_{ij}^*=h_{ij}^*\}, \tag{I.3.3}$$

$$x_i\in X_i;\quad p\sum_{i=1}^n x_i\leq 0. \tag{I.3.4}$$

Ограничения (I.3.2) задают всевозможные перераспределения суммарного выпуска дефицитных ресурсов, соответствующего данному состоянию η. Точно так же неравенства (I.3.3) определяют множество всевозможных распределений между участниками прав на продажу неходовых ресурсов при том же их суммарном объеме, что и в состоянии η. Неравенство (I.3.4) представляет собой совокупное бюджетное ограничение.

Пусть цены p фиксированы. Приемлемое состояние $\eta=$ $=\{x_i^*, g_i^*, h_i^*\}_{i=1}^n$ назовем квазиоптимальным, если набор векторов $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ парето-оптимален на множестве $Q(\eta)$. Квазиоптимальное состояние нельзя улучшить за счет перераспределения доходов ω_{io} между участниками, и перепродажа благ по любым ценам не приводит к выигрышу.

В [32] показано, что квазиоптимальные состояния существуют при весьма общих предположениях. Там же приводится пример с двумя приемлемыми состояниями, одно из которых квазиоптимально, а другое – не квазиоптимально.

§I.4. Договорные и вполне договорные состояния в экономике чистого обмена

Экономикой чистого обмена или рынком обычно называют четверку

$$\mathcal{E} = \langle N, R_+^l, a, \succsim \rangle,$$

где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков (торговцев), l – число наименований продуктов, $a = \{a_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов $a_i \in R_+^l$, описывающий начальное распределение товаров, а $\succsim = \{\succsim_i\}_{i=1}^n$ – набор отношений предпочтения на R_+^l. Можно рассматривать и более общий случай, когда отношения предпочтения $\succsim_i$ для всех $i \in N$ определены на $R^{l \times N}$ или на множестве всех допустимых распределений товаров

$$X = \{x = \{x_i\}_{i=1}^n \in R^{l \times N} \mid \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i\}.$$

Как обычно, предполагается, что $x \succ_i y$, если $x \succsim_i y$ и $y \not\succsim_i x$.

Стандартный способ определения ядра рынка заключается в том, что на множестве всех допустимых распределений товаров определяют отношения доминирования $\succ_S$ по каждой коалиции $S \in 2^N$ и называют ядром рынка совокупность всех состояний $x \in X$, не доминируемых ни по одной коалиции. Описанную схему можно несколько видоизменить. Для этого с каждым допустимым состоянием рынка можно связать некоторые новые объекты, называемые системами договоров, и определить отношения доминирования по коалициям на множестве систем договоров. Каждая система договоров, не доминируемая ни по одной коалиции, определяет некоторое допустимое распределение товаров, которое называется договорным состоянием рынка. В данном случае этот подход применяется для определения множеств договорных и вполне договорных состояний рынка, которые являются аналогами ядра, но в отличие от обычного ядра одинаково естественно определяются для рынка с отношениями предпочтения, заданными как на R_+^l , так и на $R_+^{l\times N}$ или X . Понятие договора и системы договоров введены В.Л.Макаровым [17]. Там же определены множества договорных состояний для абстрактной экономики с производством. Подход, используемый в настоящей работе, несколько отличается от принятого в [17], но терминология сохраняется.

Договором V называется пара $(x(V), S(V))$, где $S(V)\in 2^N$, а $x(V)\in R^{l\times N}$, причем $x_i(V)=0$ для $i\notin S(V)$ и $\sum_{i=1}^{N} x_i(V)=0$.

Системой договоров называется конечное семейство договоров $\mathcal{V}=\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, причем векторы $x(V_\xi)$ и $x(V_{\xi'})$ при различных ξ и ξ' могут совпадать, а коалиции $S(V_\xi)$ и $S(V_{\xi'})$ полностью или частично пересекаться.

С каждой системой договоров $\mathcal{V}$ связан ln -мерный вектор $x(\mathcal{V})$, определяемый равенством

$$x(\mathcal{V})=\sum_{\xi\in\Xi} x(V_\xi).$$

Если $x(\mathcal{V})+a\in X$, то система договоров $\mathcal{V}$ называется сбалансированной. Если $\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi x(V_\xi)+a\in X$ для любого набора $\{\alpha_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ коэффициентов $0\leqslant\alpha_\xi\leqslant 1$, то система договоров $\mathcal{V}=\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ называется абсолютно сбалансированной. В дальнейшем рассматриваются только абсолютно сбалансированные системы договоров, что позволяет несколько упростить изложение.

Из заданной системы договоров $\mathcal{V}$ любая коалиция $S\in 2^N$ может получать новые системы договоров, заключая новые договоры и разрывая часть старых. При этом естественно считать, что для разрыва любого договора достаточно желания одного из его участников, а для заключения нового договора - всех его будущих участников. Описанные выше ограничения можно записать более формально. Произвольная система договоров $\tilde{\mathcal{V}}$, которая получается из системы договоров $\mathcal{V}=\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ путем заключения новых договоров между участниками коалиции S и разрыва части старых договоров с их участием, может быть записане в виде $\tilde{\mathcal{V}}=\{V_\xi\}_{\xi\in\tilde\Xi}$, где $\tilde\Xi\neq\Xi$, но возможно $\tilde\Xi\cap\Xi\neq\emptyset$. Чтобы формально описать соотношение между множествами Ξ и $\tilde\Xi$, свяжем с каждым из них пару множеств

$$\Xi(s)=\{\xi\in\Xi \mid s(V_\xi)\subset s\},\quad \Xi^*(s)=\{\xi\in\Xi \mid s(V_\xi)\cap s\neq\emptyset\}$$

и соответственно

$$\tilde{\Xi}(s)=\{\xi\in\tilde{\Xi} \mid s(V_\xi)\subset s\},\quad \tilde{\Xi}^*(s)=\{\xi\in\tilde{\Xi} \mid s(V_\xi)\cap s\neq\emptyset\}.$$

Построенные множества должны удовлетворять соотношениям

$$\Xi \setminus \Xi^*(s) = \tilde{\Xi} \setminus \tilde{\Xi}^*(s) \tag{I.4.I}$$

и

$$\Xi^*(s)\setminus \Xi(s) \supset \tilde{\Xi}^*(s)\setminus \tilde{\Xi}(s). \tag{I.4.2}$$

Действительно, соотношение (I.4.I) означает, что коалиция s не может повлиять непосредственно на договоры с индексами из множества $\Xi \setminus \Xi^*(s)$, т.е. на договоры, в которых не задействован ни один участник коалиции s. Соотношение (I.4.2) означает, что договоры с участием торговцев, не входящих в коалицию s, можно только разрывать. Совокупность всех систем договоров вида $\tilde{\mathcal{V}}$, удовлетворяющих условиям (I.4.I) и (I.4.2) при заданных $\mathcal{V}$ и s, обозначим через $F(\mathcal{V},s)$.

Система договоров $\mathcal{V}$ доминируема по коалиции s, если найдется $\bar{\mathcal{V}}\in F(\mathcal{V},s)$, такая, что

$$x(\bar{\mathcal{V}})+a \underset{i}{\succ} x(\mathcal{V})+a \tag{I.4.3}$$

для каждого $i\in s$. В частном случае, когда соотношения $\underset{i}{\succ}$ для всех $i\in N$ определены на R_+^l, условие (I.4.3) для каждого $i\in s$ следует заменить на $x_i(\bar{\mathcal{V}})+a_i \underset{i}{\succ} x_i(\mathcal{V})+a_i$.

Система договоров $\mathcal{V}$, не доминируемая ни по одной коалиции, называется квазиустойчивой, а соответствующее ей распределение товаров $x(\mathcal{V})+a$ – договорным состоянием.

Помимо операций заключения и разрыва договоров введем операцию разбиения заданной системы договоров. Для этого определим формальную операцию умножения договора на скаляр, положив $\alpha V=(\alpha x(V), S(V))$, и назовем разбиением системы договоров $\mathcal{V}=\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ систему договоров $\mathcal{V}'=\{\alpha_\xi V_\xi\ (1-\alpha_\xi)V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, где $0\leqslant\alpha_\xi\leqslant 1$ для всех $\xi\in\Xi$.

Система договоров $\mathcal{V}$, каждое разбиение которой квазиустойчиво, называется устойчивой, а соответствующее ей состояние $a+x(\mathcal{V})$ – вполне договорным.

Имеет смысл привести еще одно определение устойчивой системы договоров, более близкое по форме к определению недопустимого состояния. Для этого рассмотрим множество

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}, s) = \bigcup_{\mathcal{V}'} F(\mathcal{V}', s),$$

где объединение берется по совокупности всевозможных разбиений исходной системы договоров $\mathcal{V}$. Система договоров $\mathcal{V}$ доминируема по коалиции $s \in 2^N$, если найдется система договоров $\bar{\mathcal{V}} \in \mathcal{F}(\mathcal{V}, s)$ такая, что

$$x(\bar{\mathcal{V}}) + a \underset{i}{>} x(\mathcal{V}) + a$$

для каждого $i \in s$. Система договоров $\mathcal{V}$, не доминируемая в указанном смысле ни по одной коалиции, называется устойчивой, а соответствующее ей состояние $x(\mathcal{V}) + a$ – вполне договорным.

Множество всех договорных состояний обозначим через $\mathcal{D}_0(\mathcal{E})$, а множество вполне договорных – через $\mathcal{D}_1(\mathcal{E})$. Если отношения предпочтения $\underset{i}{>}$ для всех $i \in N$ заданы на R^l_+, то для рынка $\mathcal{E}$ можно определить обычное ядро, которое обозначим через $C(\mathcal{E})$. Далее, через $W(\mathcal{E})$ обозначим множество вальрасовских состояний рынка $\mathcal{E}$, которое может быть и пустым.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.4.I. Если отношения предпочтения $\underset{i}{>}$ для всех $i \in N$ строго монотонны, то выполняются включения

$$C(\mathcal{E}) \supset \mathcal{D}_0(\mathcal{E}) \supset \mathcal{D}_1(\mathcal{E}) \supset W(\mathcal{E}).$$

Для классических рынков [35], т.е. при отношениях предпочтения, индуцированных монотонно возрастающими, непрерывными и строго вогнутыми на R^l_+ функциями полезности, можно указать более тесную связь между множествами $\mathcal{D}_1(\mathcal{E})$ и $W(\mathcal{E})$. Если обозначить через $\mathcal{E}^z$ z-реплику рынка $\mathcal{E}$, то справедливы следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ I,4.2. Если $n = 2$, то $W(\mathcal{E}^z) = \mathcal{D}_1(\mathcal{E}^z)$ для $z > 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.4.3. Если для некоторого $i_* \in N$ отношение предпочтения индуцировано дифференцируемой на $\operatorname{int} R^l$ функцией полезности и для всех $x \in C(\mathcal{E})$ выполняется условие $x_i \in \operatorname{int} R_+^l$, то $W(\mathcal{E}^k) = D_1(\mathcal{E}^k)$ для $k > 1$.

В заключение этого параграфа заметим, что существуют примеры рынков $\mathcal{E}$, не удовлетворяющих условиям утверждения I.4.3, для которых $D_1(\mathcal{E}^k) \neq W(\mathcal{E}^k)$ при всех $k = \overline{1,\infty}$.

§I.5. Равновесие в условиях взаимовлияния экономических агентов

Хорошо известно, что в классических моделях типа Эрроу - Дебре экономическое равновесие всегда эффективно [29,33]. Однако в таких моделях обычно предполагается (помимо прочего), что предпочтения экономических агентов определены на собственном потреблении. Таким образом, "удовольствие" агента не зависит от того, что потребляют (или производят) другие. Если агент - производитель, тогда его функция полезности - величина прибыли.

Значительно более реалистично считать, что агентам не безразлично, что потребляют (или производят) другие участники экономики (см., например, [20]). Следовательно, появляется необходимость рассматривать такие модели, где предпочтения участников определены на состояниях экономики в целом.

Однако нетрудно привести примеры моделей экономики [20], в которых классическое равновесие находится вне границы Парето. Возникает вопрос, не являются ли такие модели патологическими, нельзя ли при подходящих предположениях, существенно не сужающих класс рассматриваемых моделей, установить, что равновесие эффективно. Ответ на это дает формулируемая ниже теорема, в которой утверждается, что равновесие, как правило, неэффективно [22].

Из работ других авторов на аналогичную тему отметим результаты П.Дубея [44,45]; доказательство формулируемой теоремы в идейном плане имеет с ним много общего. В [44] рассматриваются многообразия игр, в [45] - экономик со специальным механизмом распределения.

Опишем интересующий нас класс моделей

$$\mathcal{E} = \langle N, (X_i, Y_i)_{i \in N}, u \rangle, \quad u \in \mathcal{U}^N,$$

где $N, X_i, Y_i, i \in N_9$ фиксированы и имеют тот же смысл, что и в §I.2, а $\mathcal{U}$ - некоторый выделенный класс функций полезности

$u:\prod_{i=1}^{n} X_i\times Y_i\to R$, характеризующих предпочтения участников $i\in N$. Таким образом, конкретную экономику из нашего класса будем отождествлять с набором $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $u_i\in\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.I. Состояние $\bar z=(\bar z_1,\bar z_2,\dots,\bar z_n)\in Z=\prod_{i=1}^{n}X_i\times Y_i$ будем называть состоянием равновесия экономики $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, если найдется такой вектор цен $\bar p\in R^l$, $\bar p\neq 0$, что

а) $u_i(\bar z)=\max\{u_i(\bar z/z_i)\,|\,x_i\bar p\leq y_i\bar p\}$, $i\in N$;

б) $\sum_{i=1}^{n}\bar x_i=\sum_{i=1}^{n}\bar y_i$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ.

I.5.I. X_i - ограниченный многогранник, $\operatorname{int}X_i\neq\emptyset$.

I.5.2. Y_i - многогранный конус, $\operatorname{int}Y_i\neq\emptyset$.

I.5.3. $Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ таково, что $Y\cap(-Y)=\{0\}$.

I.5.4. $\mathcal{U}=C^2(\tilde Z,R^n)$, где $\tilde Z$ - открытая окрестность Z, а в $\mathcal{U}$ наводится стандартная топология равномерной сходимости (вместе с производными) на компактах. Пусть $\eta(u)$ - совокупность всех состояний равновесия, а $\mathcal{E}(u)$ - эффективные состояния экономики u .

ТЕОРЕМА I.5.I. Существует открытое всюду плотное $G\subset\mathcal{U}$ такое, что для всех $u\in G$

I) $\operatorname{int}Z\cap\eta(u)$ конечно;

2) $\operatorname{int}Z\cap\eta(u)\cap\mathcal{E}(u)=\emptyset$.

Пусть $z_i=(x_i,y_i)\in Z$. Обозначим через $\Gamma_p(x_i)$, $\Gamma_p(y_i)$ грани X_i и Y_i такие, что $x_i\in\Gamma_p(x_i)$, $y_i\in\Gamma_p(y_i)$, и пусть $l(x_i)$, $K(y_i)$ - соответствующие им коразмерности. Положим

$$T=\{z\in Z\,|\,\exists i_0\in N,\ \operatorname{int}(\Gamma_p(x_{i_0})+\Gamma_p(y_{i_0}))\neq\emptyset\},$$

$$T'=\{z\in Z\,|\,\sum_{i=1}^{n}(l(x_i)+K(y_i))+l+n\leq 2nl\}.$$

ТЕОРЕМА I.5.2. Существует массивное (счетное пересечение открытых всюду плотных) $\bar G\subset\mathcal{U}$ такое, что для всех $u\in\bar G$

I) $T\cap\eta(u)$ конечно;

2) $T\cap T'\cap\eta(u)\cap\mathcal{E}(u)=\emptyset$.

Таким образом. сформулированные выше результаты показывают, что необходимо другое понятие равновесия в экономиках, где действия одних агентов влияют на полезность других.

На данный момент известны два естественных способа определения такого понятия. Первый состоит в рассмотрении информационного расширения модели, когда предполагается, что агенты торгуют не только физическими товарами, но и информацией о собственном потреблении. Таким способом введенное равновесие [16,18] оказывается эффективным. Изложим другой подход, основанный на общественном расширении модели; равновесие, которое при этом получается, назовем "коллективным". Отметим, что эти понятия равновесия определяют одни и те же состояния экономики, хотя при этом они имеют разную экономическую интерпретацию.

Для упрощения изложения рассмотрим стандартную модель обмена, допуская "взаимовлияния" агентов:

$$\mathcal{E} = \langle N, (\omega_i, u_i)_{i\in N} \rangle,$$

где, как и выше, функции u_i определены на $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^{l_n}$.

Опишем общественное расширение модели $\mathcal{E}$. С этой целью рассмотрим экономику с общественными товарами

$$\mathcal{E}' = \langle N, (\hat{X}_i, \hat{\omega}_i, \hat{u}_i)_{i\in N}, L, (Y_j)_{j\in L} \rangle,$$

где

$M = L \times N$ - номенклатура общественных товаров;

$\hat{X}_i = X_i \times \mathbb{R}_+^{l_n}$ - потребительское множество участника $i\in N$;

$\hat{\omega}_i = (\omega_i, 0) \in \hat{X}_i$ - первоначальные запасы продуктов (запасы общественных товаров отсутствуют);

$\hat{u}_i : \hat{X}_i \to \mathbb{R}$ - полезность участника $i \in N$, заданная по формуле $\hat{u}_i(x_L^{(i)}, x_M^{(i)}) = u_i(x_M^{(i)})$;

$L = \{1,\dots,l\}$ - производители экономики (нумеруются теми же индексами, что и частные товары);

$Y_j = \{(y_j, y_N^{(j)}) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^n \mid y_j + \sum_{i\in N} y_i^{(j)} \leq 0\}$

- конус производственных возможностей производителя $j \in L$. Агрегированный производственный конус имеет вид

$$Y = \{(y_L, y_N^{(1)}, y_N^{(2)}, \dots, y_N^{(l)}) \in \mathbb{R}_-^l \times \mathbb{R}_+^{l_n} \mid (y_i, y_N^{(j)}) \in Y_j, j \in L\}$$

(здесь y_T - вектор, координаты которого заиндексированы элементами из T).

Введем обозначение $(y_N^{(1)}, \dots, y_N^{(l)}) = y_N^L = y_M$. Состояние экономики $\mathfrak{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, y_L, y_M)$ называется достижимым, если справедливы балансы:

1) $\sum_{i\in N} x_L^{(i)} = y_L + \sum_{i\in N} \omega_i$ - баланс по частным товарам;

2) $x_M^{(i)} = y_M$ для всех $i \in N$ - баланс по общественным товарам.

В данной модели стандартным образом определяется линдалевское равновесие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.2. Достижимое состояние $\bar{z}$ экономики $\mathcal{E}'$ называется равновесием, если существует вектор цен $\bar{p} = (\bar{p}_L, \bar{p}^{(1)}, \ldots, \bar{p}^{(n)}), \bar{p}_L \in \Sigma_L$, такой, что

I) $\hat{u}_i(\bar{z}_i) = max\{\hat{u}_i(z_i) / z_i \in \hat{X}_i, \bar{p}_L x_L^{(i)} + \bar{p}^{(i)} x_M^{(i)} \leq \bar{p}_L \omega_i\}$ для всех $i \in N$;

2) $\bar{y} = (\bar{y}_L, \bar{y}_M)$ максимизирует доход $\bar{y}_L \bar{p}_L + \sum_{i \in N} \bar{p}^{(i)} \bar{y}_M$ на Y.

Предполагая стандартным образом, что u_i для любого $i \in N$ - вогнутая, непрерывная, неубывающая функция без насыщения на некоторой окрестности множества достижимых состояний, получаем

СЛЕДСТВИЕ I.5.I. В состоянии равновесия

I) $\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_j^{(i)} \leq \bar{p}_j\, \ell_N$, причем $(\bar{p}_j \ell_N - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_j^{(i)}) \bar{y}_N^{(j)} = 0, j \in L$;

2) $\bar{z}_L^{(i)} = 0, \; i \in N$.

(Здесь $\ell_N = (1, 1, \ldots, 1)$.)

Из достижимости состояния $\bar{z}$ следует, что $-\bar{y}_L = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, т.е. частные товары полностью расходуются на производство общественных, и фактически $\bar{z}$ - состояние экономики $\mathcal{E}$. Однако поскольку $\bar{z}$ эффективно в экономике $\mathcal{E}'$ (свойство линдалевского равновесия), оно будет эффективно и в экономике $\mathcal{E}$, так как $\mathcal{E}'$ - расширение $\mathcal{E}$. Состояние $\bar{z}$ и принимается в качестве коллективного равновесия.

Дадим теперь определение коллективного равновесия без обращения к общественным товарам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.3. Коллективным равновесием модели обмена $\mathcal{E}$ называется сбалансированное состояние $\bar{z} \in R_+^{\ell n}$, рыночная цена $\bar{p} \in \Sigma_L$, система индивидуальных цен $\bar{p}^{(i)} \in R_+^{\ell n}$, $i \in N$, удовлетворяющая свойствам:

I) $u_i(\bar{z}) = max\{u_i(z) / z\bar{p}^{(i)} \leq \bar{p}\omega_i, z \in R_+^{\ell n}\}$;

2) $\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{jk}^{(i)} = \bar{p}_j, \; k \in N, \; j \in N$.

Когда говорят о вальрасовском равновесии, имеют в виду не только состояние экономики, но и механизм достижения его (нащупывания - *tâtonnement*), имитирующий торговые процессы, происходящие на реальных рынках. Цена товара при этом действительно существует в своем денежном выражении, и в каком-то смысле она определяется самим этим процессом. Таким образом, вальрасовское равновесие,пусть грубо, но отражает экономическую реальность. Резонно поставить тот же круг вопросов относительно коллективного равновесия, рассмотреть механизмы его достижения, дать экономическую интерпретацию индивидуальных цен у каждого агента на потребление товара другими агентами экономики.

Что же такое цена $p^{(j)}_{mi}$ товара m, потребляемого агентом $i \in N$ относительно $j \in N$ в состоянии равновесия? Заметим, что если агенту j безразлично, в каком количестве i потребляет товар m, она при естественных предположениях нулевая. Если же j заинтересован в том, чтобы i потреблял товар m (т.е. полезность $u_i(x)$ возрастает по координате x_{mi}), тогда цена положительна и агент j как бы соглашается нести расходы $p^{(j)}_{mi} x_{mi}$ по потреблению товара m агентом i и наоборот. Таким образом, цена выражает степень заинтересованности агентов в потреблении товаров всеми участниками экономики.

Что касается механизма достижения коллективного равновесия, то поскольку на данное равновесие можно смотреть как на линдалевское в общественном расширении модели, механизмы достижения такого равновесия можно использовать для достижения коллективного. В свою очередь, линдалевское равновесие достигается с помощью механизма референдума [58], следовательно, с помощью референдума можно достичь и коллективного равновесия. Представляется нереалистичным, чтобы в экономике проводился референдум по поводу потребления таким-то агентом такого-то товара. С другой стороны, если принять гипотезу ограниченной рациональности поведения агентов, можно считать, что число агентов, которые могут оказать существенное влияние на полезность фиксированного индивидуума невелико, ибо отдельный агент не имеет физической возможности обозреть все состояние экономики. Таким образом, принимается гипотеза о локальных внешних влияниях. В этой ситуации референдум уже не обязан включать всех участников экономики, в чем и состоит главное достоинство метода.

Дадим формальное описание такого механизма. Для простоты изложения предположим, что в экономике один продукт. Пусть $\mathcal{G} \subset 2^N \setminus \{\emptyset\}$ – некоторая совокупность непустых подмножеств N.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.4. Совокупность коалиций $\mathcal{G}$ сбалансирована, если существует набор положительных коэффициентов $\{\lambda_s\}_{s \in \mathcal{G}}$ такой, что $\sum_{s \in \mathcal{G}} \lambda_s e_s = e_N$. Сбалансированной коалиционной структурой назовем семейство $\mathcal{T} = \{(s, \lambda_s)_{s \in \mathcal{G}}\}$.

Каждый агент вкладывает в фонд коалиций, в которых он участвует, количество товара в размере $\lambda_s \omega_i$ (членские взносы). Один агент является членом многих коалиций. Суммарное количество товара, которым обладает коалиция $s - \omega^s = \lambda_s \sum_{i \in s} \omega_i$, перераспределяется между ее членами. Перераспределение внутри каждой из коалиций $s \in \mathcal{G}$ происходит с учетом того, что назначено для потребления агентам коалициями $\mathcal{G} \setminus \{s\}$, механизм этого перераспределения подобен механизму коллективного равновесия и, следовательно, референдуму.

Пусть $x_s \in R^n_+$, $\sum_{j \in s} x_{s,j} = \omega^s$, $x_{s,j} = 0$ $(j \notin s)$ – перераспределение товара в коалиции s, $\bar{x}_s \in R^n_+$, $\bar{x}_{s,j} = 0 (j \notin s)$ – назначение товара для потребления членам коалиции s коалициями $\mathcal{G} \setminus \{s\}$, $\bar{x}_{\bar{s}} \in R^n_+$, $\bar{x}_{s,j} = 0 (j \in s)$ – потребление товара, назначенное агентам из $N \setminus s$. Тогда перераспределение товара в экономике имеет вид: $x = x_s + \bar{x}_s + \bar{x}_{\bar{s}}$. (Ясно, что $\sum_{j \in N} x_j = \sum_{j \in N} \omega_j$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.5. Распределение $x \in R^n_+$, $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \omega_i$ называется достижимым в структуре $\mathcal{T}$, если каждой коалиции $s \in \mathcal{G}$ можно сопоставить $x_s \in R^n_+$ так, что $\sum_{s \in \mathcal{G}} x_s = x$.

Рассмотрим, в умозрительном плане, как функционирует предлагаемый механизм. Коалиция s распределяет между своими членами количество товара ω^s при заданном потреблении $\bar{x}_s + \bar{x}_{\bar{s}}$, назначенном участникам экономики без участия коалиции s. Коалиция s способна лишь увеличить потребление товара своим членам в общем объеме на ω^s, в остальном повлиять на ситуацию не может. Можно считать, что в коалиции s заключается договор $v(s) = x_s - \omega_s$ между ее членами, однако в отличие от §I.4 мы конкретизируем способ, по которому члены коалиции приходят к заключению договора.

Этот способ состоит в следующем. Для каждого агента определяется индивидуальная цена $p_s^{(i)}$, действующая в пределах данной коалиции, $p_s^{(i)} \in (R^{|S|})^*$. Бюджетное множество i -го агента определяется следующим образом:

$$B_i^s(\bar{x}_s, p_s^{(i)}, \beta_s^{(i)}) = \{x' \in R_+^{|S|} \mid p_s^{(i)}(x' + \bar{x}_s) + \beta_s^{(i)} \leq \omega_i\}.$$

Здесь $\beta_s^{(i)}$ – агрегированный платеж агента i участникам экономики из $N \setminus S$; предполагается, что величина $\beta_s^{(i)}$ известна агенту i из участия в других коалициях.

Мы говорим, что в коалиции S найдено "оптимальное перераспределение продукта" или "перераспределение, оптимально согласующее интересы участников коалиции" $\tilde{x}_s$, если выполняются условия:

$$\text{I)}\ \tilde{x}_s + \bar{x}_{\bar{s}} + \bar{x}_s \in \underset{x' \in B_i^s(\bar{x}_s, p_s^{(i)}, \beta_s^{(i)}) + \bar{x}_{\bar{s}} + \bar{x}_s}{\arg\max} u_i(x' + \bar{x}_{\bar{s}} + \bar{x}_s),\ i \in S;$$

$$2)\ \sum_{i \in S} p_s^{(i)} = e_s - \alpha_s .$$

Здесь $\alpha_s \in R_+^{|S|}$, $\alpha_s \leq e_s$, $\alpha_{s,j}$ – агрегированная степень возмещения затрат на потребление j -го агента участниками экономики, не попавшими в коалицию S. Предполагается, что величина $\alpha_{s,j}$ известна агенту j из участия в других коалициях.

Таким образом, $\bar{x}_{\bar{s}}$, $\bar{x}_s$, $\beta_s(x)$, $\alpha_s(x)$ – внешние параметры для задачи "оптимального согласования интересов участников коалиции S ".

Пусть $x \in R_+^n$ – распределение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.6. x – оптимальное распределение в структуре $\mathcal{T}$, если $x = \sum_{s \in \mathcal{G}} x_s$, где x_s – оптимальное распределение продукта в коалиции S при внешних пареметрах $\bar{x}_{\bar{s}}$, $\bar{x}_s$, $\beta_s(x)$, $\alpha_s(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.5.I. В этом определении не конкретизируется вид отображений $\beta_s(x)$ и $\alpha_s(x)$, которые могут быть, вообще говоря, достаточно произвольными. Эти отображения полностью будут определяться для одного частного случая.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.5.I. Коллективное равновесие экономики $\langle \mathcal{E}, x, \{p^{(i)}\}_{i \in N} \rangle$, достижимое в структуре $\mathcal{T}$, оптимально относительно этой структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \sum_{s \in \mathcal{G}} x_s$, где $\sum_{j \in S} x_{s,j} = \omega^s$, $x_s \geq 0$, $x_{s,j} = 0$, если $j \notin S$. Определим внешние параметры коалиции S :

$$\bar{x}_{\bar{S},j} = \sum_{\substack{s' \in \sigma \\ j \notin s}} x_{s',j}, \qquad \bar{x}_{s,j} = \sum_{\substack{s' \in \sigma \setminus \{s\} \\ j \in s'}} x_{s',j},$$

$$\beta_s^{(i)}(x) = \rho^{(i)} \bar{x}_{\bar{S}}, \quad \alpha_s^{(i)}(x) = \sum_{j \in N \setminus s} \rho_i^{(j)}, \quad i \in s.$$

Очевидно, такой выбор внешних параметров гарантирует оптимальность x в структуре $\mathcal{T}$.

Пусть O_ε $-\ \varepsilon$ окрестность нуля в R^n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.7. Коалиция $s \in \sigma$ охватывает агента i в точке $x \in R^n$, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $y \in O_\varepsilon$ справедливо $u_i(x+y) = u_i(x+y_s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.5.2. Для $y \in R^{n i}$ через y_s обозначается вектор

$$(y_s)_j = \begin{cases} y_j, & j \in s; \\ 0, & j \notin s. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5.8. Распределение x неособенное в структуре $\mathcal{T}$, если для любого $i \in N$ существует охватывающая коалиция $s^i \in \sigma$.

Пусть x - неособенное распределение в структуре $\mathcal{T}$. Положим $\beta_s^{(i)}(x) = \rho_{s^i}^{(i)} \bar{x}_{s(i)}$, где $s^i \in \sigma$ - охватывающая для агента i коалиция, $\alpha_s^{(i)}(x) = \sum_{j \in N \setminus s} \rho_{s^i_j, i}^{(j)}$, здесь $s^i \in \sigma$ - охватывающая i коалиция.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.5.2. Пусть x - неособенное оптимальное в структуре $\mathcal{T}$ распределение, $x = \sum_{s \in \sigma} x_s$, $x_s \geqslant 0$, $s \in \sigma$, а $u_i(\cdot)$ - дифференцируемы для всех $i \in N$; $\beta_s^{(i)}(x)$ и $\alpha_s^{(i)}(x)$ определены, как указано выше. Тогда x - коллективное равновесие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$x = x_s + \bar{x}_s + \bar{x}_{\bar{S}} \in \underset{x' \in B_i^s(\bar{x}_s, \rho_s^{(i)}, \beta_s^{(i)}) + \bar{x}_s + \bar{x}_{\bar{S}}}{\arg\max} u_i(\bar{x}),$$

причем $x_s \geqslant 0$ и $u_i(\cdot)$ дифференцируемы для любого $i \in N$. Из необходимых условий экстремума получаем $\rho_s^{(i)} = \lambda_s (\operatorname{grad} u_i(x))_s$. Учитывая вид $\beta_s^{(i)}(x)$ и $\rho_s^{(i)}$, из того, что s^i - охватывающая агента i в точке x, имеем $p^{(i)}_{s^i} = \lambda\, grad\, u_i(x)$. Положим $p^{(i)} = p^{(i)}_{s^i}$ для любого $i \in N$. Непосредственно проверяется, что все условия коллективного равновесия при такой системе цен выполняются.

ЗАМЕЧАНИЕ I.5.3. Не вызывает сомнений, что сформулированное выше утверждение можно было бы доказать и в более общей ситуации. Однако мы не ставили перед собой такой задачи. Наша цель состояла в том, чтобы показать, что возможно формальное описание механизма распределения товаров в экономике, где коалиции функционируют подобно отдельному агенту в общей схеме вальрасовского равновесия, но получаемое при этом равновесие - коллективное. Формально мы могли бы свести ситуацию к игре, где игроки - коалиции, но есть выделенный игрок (как в случае сведения классической модели экономике к игре [2I]), который согласует их деятельность.

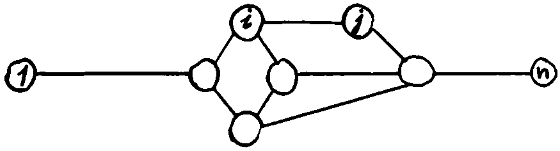
Принципиально важным в предложенной интерпретации представляется принятие гипотезы о локальных внешних влияниях.

§I.6. Микроописание экономических процессов

При доказательствах теорем существования равновесия обычно постулируется поведение экономических агентов. Если агент - потребитель, тогда из тех наборов продуктов, которые он может купить, он выбирает наилучший с точки зрения собственного отношения предпочтения. Если это - производитель, тогда из доступных ему технологических вариантов производства он выбирает тот, который максимизирует прибыль.

Таким образом, если поведение потребителя описывается максимально общими характеристиками, то производители подчиняются частному стандарту. В чем причина такого различия и, вообще, почему существуют цены? Микроописание рынка должно объяснять, а не постулировать такие эмпирические закономерности.

Ниже предпринимается попытка построить динамическую модель поведения участников рыночного обмена, объясняющую, каким образом формулируются интересы торговцев и производителей. Имеется n участников, два товара - некоторый продукт и деньги. Первый участник - производитель, он имеет запас продуктов и нуждается в деньгах, n-й участник - потребитель, он имеет деньги и нуждается в продукте. Прямой контакт между ними невозможен, товар обменивается через торговых посредников, которыми являются остальные $n-2$ участника. Каждый агент $i \in N$ описывается двумя параметрами: $Q_i(t) \geq 0$ – запас продуктов, $D_i(t)$ – задолженность в деньгах, на которую начисляется процент по единой форме γ. Возникшая ситуация наглядно изображается графически:



Вершины графа – участники, дуги соединяют тех из них, между которыми возможны сделки. Приведем уравнения, описывающие функционирование системы. Допустимые состояния системы задаются величинами $Q_2, D_2, \ldots, Q_{n-1}, D_{n-1}$, причем $Q_i \geq 0$, $i=\overline{2,n-1}$ (без производителя и потребителя). Через R_{Q^+} обозначается фазовое пространство. Предполагается, что встречи участников случайны, поэтому нельзя указать точно состояние в момент t.

Пусть $F(t, s_2, \ldots, s_{n-1})$ – плотность вероятности в $R_{Q^+}(s:=\{Q_i, D_i\})$. Уравнение, которому должно удовлетворять F, следующее:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \gamma \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\partial D_k F}{\partial D_k} + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(F - c_{ij}) = 0.$$

Здесь λ_{ij} – средняя частота встреч участников i и j,

$$c_{ij} = \int d\Pi'_{ij} F(t, s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s'_j, s_{j+1}, \ldots, s_{n-1})\, \mathcal{P}_{ij}(t, \Pi'_{ij} \to \Pi_{ij}),$$

где Π_{ij} – пара состояний s_i и s_j, $\mathcal{P}_{ij}(t, \Pi'_{ij} \to \Pi_{ij})$ – условная вероятность того, что, находясь в состояниях Π'_{ij}, участники i, j заключают сделку, которая переведет их в состояния Π_{ij} (на $\mathcal{P}_{ij}$ накладываются естественные ограничения, гарантирующие реальность сделок). Таким образом, это уравнение определяет распределение F, если известны распределения $\mathcal{P}_{ij}$ и F в момент t_0.

По распределению F можно вычислить вероятность $f_k(t, s_k)$ того, что в момент t k-й посредник окажется в состоянии s_k, по формуле

$$f_k(t,s_k)=\int F\,ds_2,\dots,ds_{k-1},ds_{k+1},\dots,ds_{n-1}.$$

Если предположить, что участники действуют попарно-независимо, т.е. что $F(t,s_2,\dots,s_{n-1})=f_2(t,s_2)\cdot f_3(t,s_3)\cdot\ldots\cdot f_{n-1}(t,s_{n-1})$, тогда уравнения, определяющие f_k, примут вид:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+\gamma\frac{\partial}{\partial D_k}D_k f_k=-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}[f_k-\int d\Pi'_{ik}\,ds_i\,Q_{ik}(t,\Pi^{\circ}_{ik}\to\Pi_{ik})f_i(t,s_i')f_k(t,s_k')].$$

Пусть $W_k(t,s_k)$ - вероятность разорения k-го торговца, находящегося в момент t в состоянии s_k. Получено следующее уравнение на W_k:

$$\frac{\partial W_k}{\partial t}+\gamma D_k\frac{\partial W_k}{\partial D_k}=2\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}\int d\Pi'_{ik}\,ds_i[W_k(t,s_k)-W_k(t,s_k')]Q_{ik}(t,\Pi^{\circ}_{ik}\to\Pi'_{ik})f_i(t,s_i).$$

Можно считать, что объективная цель торговца - минимизировать вероятность разорения W_k. Это следует из предположения, что всякое иное поведение приводит к быстрому исчезновению торговца с рынка, следовательно, не будет наблюдаться в реальности. В качестве функции полезности при заключении сделки можно принять величину $\Delta W_k(s_k')=W_k(t,s_k)-W_k(t,s_k')$, которая может изменяться во времени и зависит от состояний других торговцев. Таким образом, можно считать, что распределение $Q_{ij}(t,\Pi^{\circ}_{ij}\to\Pi_{ij})$ сосредоточено на множестве

$$E_{ij}(t,\Pi^{\circ}_{ij})=\{\Pi_{ij}\,|\,\Pi_{ij}\in T(t,\Pi^{\circ}_{ij}),\ \Lambda_{ij}(t,\Pi_{ij})=\varnothing\},$$

где $T(t,\Pi^{\circ}_{ij})$ - множество не худших, чем Π°_{ij}, состояний для обоих торговцев, $\Lambda_{ij}(t,\Pi_{ij})$ - множество лучших, чем Π_{ij}, состояний для обоих торговцев. $E_{ij}(t,\Pi^{\circ}_{ij})$ есть не что иное, как граница Парето.

Реализуемость описанной выше схемы обосновывается тем, что она фактически диктует участникам простые правила поведения, которые могут быть выработаны на основе опыта, обучения и отбора.

В результате исследования модели в простейшем варианте (с одним торговцем посредником) были получены следующие результаты:

I. Динамическое описание механизма прямых сделок может объяснить важнейшие закономерности рыночного обмена, существование цены продукта, стремление торговцев к максимуму прибыли.

2. В модели находят естественное формальное описание такие экономические категории как кредитоспособность, меновая стоимость, торговая прибыль, цена фирмы, оборотные фонды.

3. Оптимальное поведение торговца достаточно просто (но нетривиально) и может быть описано субъективно различными способами, в числе которых максимизация прибыли или более дальновидная максимизация средней по последовательностям сделок прибыли.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНОГО ОБМЕНА

§2.I. Точки равновесия в линейных моделях обмена: классификация и опыт вычисления

Рассматривается экономика, состоящая из взаимодействующих регионов. Модель региона i $(1 \le i \le n)$ линейна:

$$A^i x_i + G^i e_i + H^i m_i + c_i f_i \le b_i, \qquad (2.I.I)$$

где A^i, G^i, H^i – заданные матрицы c_i, b_i – фиксированные векторы соответствующей размерности, x_i – вектор внутренних переменных региона (выпуски отраслей производства, макроэкономические показатели), e_i – вектор экспорта, m_i – вектор импорта, f_i – скалярная величина, являющаяся показателем качества функционирования экономики региона.

Равновесием в модели обмена назовем совокупность

$$\{p, x_i, e_i, m_i, f_i;\ i = \overline{1,n}\},\ p \in R^l_+, \qquad (2.I.2)$$

такую, что при данном p набор $\{x_i, e_i, m_i, f_i\}$ является решением задачи $f_i \to max$ при ограничениях (2.I.I) и условии

$$p(e_i - m_i) \ge 0,$$

причем выполнены условия баланса

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (2.I.3)$$

Основным инструментом исследования является следующая параметрическая задача:

$$\rho \to \max \left\{ \begin{array}{l} A^i x_i + G^i e_i + H^i m_i + c_i f_i \leq b_i \\ \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \\ f = \nu\rho \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \eta_i(\nu) \\ q(\nu \\ \xi(\nu), \end{array} \right.$$

где параметром является вектор ν , а справа приведены обозначения для соответствующих двойственных оценок. Кроме того,

$$f = (f_i)_{i \in N}, \quad \xi = (\xi_i)_{i \in N}.$$

Связь равновесного состояния и оптимального решения параметрической задачи устанавливает

ТЕОРЕМА 2.I.I. Вектор f^* описывает равновесные выигрыши тогда и только тогда, когда существует оптимальное решение параметрической задачи при $\nu^* = f^* / \sum_{i=1}^{n} f_i^*$ такое, что

$$q(\nu^*)(e_i(\nu^*) - m_i(\nu^*)) = 0 \qquad (2.I.4)$$

для любого оптимального решения прямой задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I.I. Условие (2.I.4) эквивалентно условию

$$\eta_i(\nu^*) b_i - f_i(\nu^*) \xi_i(\nu^*) = 0. \qquad (2.I.5)$$

Приведенная теорема показывает, что для того чтобы исследовать равновесные состояния, нужно изучить зависимость двойственного решения (см. условие (2.I.5)) от параметра ν . Эта зависимость является кусочно-дробно-линейной и может быть представлена в следующем виде:

$$\rho(\nu) = 1/\xi_j \nu, \quad q(\nu) = q_j/\xi_j \nu, \quad \xi(\nu) = \xi_j/\xi_j \nu, \quad \eta_i(\nu) = \eta_{ij}/\xi_i \nu, \quad j \in J,$$

где J - индексы ограничений множества допустимости, которое в данном случае представимо в виде

$$\{f \mid \xi_j f \leq 1\}.$$

Если лишь одно неравенство обращается в равенство, то на данной грани двойственное решение единственно и представимо приведенной выше формулой. Если для нескольких индексов $j \in J$ происходит обращение в равенство, то приведенные формулы описывают крайние точки множества оптимальных двойственных решений.

Оказывается, что исходная модель взаимодействия регионов в смысле отыскания равновесий эквивалентна следующей модели чистого обмена, где товары получают индексы $j \in J$:

$$f_i c_i + \rho_i \leq a_i ,$$

и при этом $a_{ij} = \gamma_{ij} b_i$, $c_{ij} = \xi_{ij}$ $(j \in J)$.

ТЕОРЕМА 2.I.2. Векторы f и ρ определяют равновесие в модели взаимодействия регионов тогда и только тогда, когда (f, ρ) - равновесие в модели чистого обмена, причем

$$\rho = \sum_{j \in J} \rho_j q_j .$$

Эта теорема позволяет применить теорему 2.I.I теперь уже к модели чистого обмена и в результате получить модель равновесия, заданную с помощью функции избыточного спроса:

$$f = \frac{\rho A}{\rho c} , \quad c f \leq a ,$$

где $A = (a_{ij})$, $c = (c_{ij})$, $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Для этой модели выполнены некоторые обычные свойства, например закон Вальраса, однако нет условия ненасыщаемости спроса при стремлении к нулю одной из цен, и потому равновесия, как правило, будут попадать на границу симплекса, что не позволяет, по крайней мере непосредственно, применить известную технику, связанную с подсчетом индекса особенностей вспомогательного отображения. Тем не менее может быть получена достаточно простая и полезная классификация точек равновесия:

I) одна ненулевая компонента вектора цен: $f = V_j \overset{def}{=} \left(\frac{a_{ij}}{c_{ij}}\right)$;

2) n ненулевых компонент вектора цен: система линейных уравнений для ρ ;

3) две ненулевых компоненты вектора цен: ρ_1 - корень многочлена степени $n-1$;

4) $n-1$ ненулевых компонент вектора цен: f_1 - корень многочлена степени $n-1$;

5) остальные случаи: система многочленов от f и ρ, каждый из которых может быть во второй степени.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I.2. Коэффициенты системы линейных уравнений, а также многочленов вычисляются в явном виде, поэтому равновесия типов I–4 могут быть эффективно вычислены на ЭВМ. Способы нахождения равновесий типа 5 пока не известны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I.3. Численные эксперименты по отысканию равновесий проводились с агрегированным вариантом мировой межотраслевой модели, которая была создана проф. В.Леонтьевым по заказу ООН. В этом агрегированном варианте всего 4 региона и поэтому равновесия типа 5 отсутствуют, а следовательно, в принципе могут быть найдены все равновесные состояния.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I.4. Кратко перечислим наиболее интересные результаты счета по модели 4х6. В этой модели четыре региона условно обозначены СА, ЕВ, ЛА, АА; обмен ведется по четырем отраслям: сельское хозяйство, добыча, легкая и тяжелая промышленность, по двум отраслям обмен не ведется.

Для того чтобы получить все типы возможных по классификации равновесий, из исходных четырех регионов выбирались всевозможные комбинации по два и по три региона, а также в некоторых случаях производилась модификация исходной информации.

Отметим, что первоначально вычисления производились по алгоритму А.Г.Рубинштейна, который сводится к итерациям по параметру ν :

$$\nu_i^{t+1}=f_i(\nu^t)+\frac{h}{\xi_i(\nu^t)}\left[q(\nu^t)(e_i(\nu^t)-m_i(\nu^t))\right].$$

С использованием условия (2.I.5) этот алгоритм можно переписать в виде

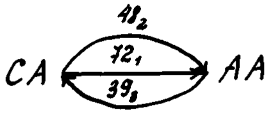
$$\nu^{t+1}=\nu^t+h\,(V_j^t-\nu^t),$$

где вектор V_j^t получен нормировкой из вектора V_j. Таким образом, если шаг алгоритма является целым $(h=1)$, то алгоритм "прыгает" по конечному множеству векторов V_j, значит, он либо найдет равновесие за конечное число шагов, либо зациклится, либо произведет "выброс" в недопустимую область. Применение дробного шага $(0 \leqslant h \leqslant 1)$ не дает ничего нового. Таким способом могут быть получены только равновесия типа I.

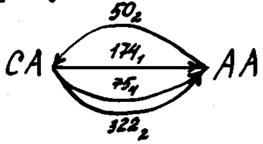
Несмотря на это, описанный алгоритм в силу его простоты и удобства при машинной реализации (нужно решать последовательность задач линейного программирования) был запрограммирован в системе ЛП-БЭСМ-6 ВЦ АН СССР. Этот алгоритм позволил за очень малое машинное время отыскать равновесия почти для всех коалиций и в настоящее время демонстрирует свою работоспособность на задачах существенно большей размерности, для которых применение реализованного в ВЦ АН СССР переборного алгоритма, основанного на полученной выше классификации, весьма затруднительно.

Вернемся к модели 4х6.

<u>Эксперимент</u> CA⟷AA . Здесь были несколько уменьшены возможности региона CA по производству добычи. В данном варианте существует единственная точка равновесия, в которой весь дополнительный выигрыш от обмена получает регион CA (выигрыш региона AA равен автаркическому). Приведем схему равновесного обмена по отраслям (индекс показывает номер отрасли, а стрелка - движение товара).



Далее на регион AA накладывалось дополнительное ограничение, состоящее в том, что экспорт добычи не может превосходить 50 (усл. ед.). Это привело к следующим интересным результатам: помимо старой точки равновесия возникло еще две новых. В обеих точках равновесный экспорт добычи региона AA вырос с 48 до 50, причем в той из двух точек, которая принадлежит к типу I, равновесные цены на добычу резко возросли по сравнению со старым равновесием, и почти весь выигрыш от торговли получил регион AA. Третья точка равновесия принадлежит к типу 2 и является промежуточной: выигрыш от обмена делится между регионами CA и AA примерно поровну. Равновесные схемы обмена в новых двух приведены ниже:



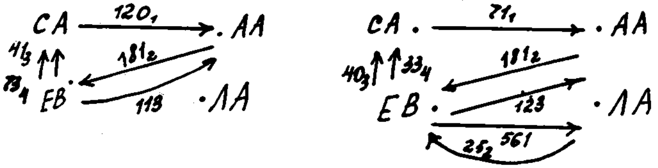
Какой точке равновесия следует отдать предпочтение с экономической точки зрения?

В некоторых случаях при модификации исходной информации получалось, что не существует равновесия типа I. В частности, для регионов ЕВ и AA существует единственное равновесие типа 2, а в одном варианте для четырех регионов - единственное равновесие типа 3. Для этого случая БЭСМ-6 нашла коэффициенты кубического уравнения:

$$1-3,1907\rho-0,05759\rho^2+0,003\rho^3=0,$$

и его единственный корень ρ = 0,311457 на отрезке $[0,1]$.

Интересно также отметить случаи точного совпадения равновесных цен и выигрышей при разном составе участников. Так, например, равновесные цены и выигрыши для коалиции СА, ЕВ, АА совпадают с теми, что получаются для коалиции СА, ЕВ, ЛА, АА, хотя регион ЛА получает выигрыш больше автаркического и по внешнему виду активно участвует в торговом обмене:



Возможность совпадения равновесных цен и выигрышей в линейных моделях обмена легко объяснить с формальной точки зрения, но трудно было предвидеть заранее. Можно ли придать этому эффекту содержательный смысл?

§2.2. Локально-равновесные траектории в модели мировой экономики

Формально в этом параграфе речь идет о задачах описания торгового обмена между регионами, экономика которых задана линейными многоотраслевыми моделями леонтьевского типа, правда, существенно большей размерности. Рост размерности привел к изменению акцентов исследования и об этом следует упомянуть.

Существуют разные подходы к моделированию: имитация, оптимизация, равновесие. Можно считать, что это только разные способы использования имеющейся числовой информации. Когда говорят об оптимизации в модели мировой экономики, то это не значит, что отыскивается "мировой оптимум". Точно так же вычисленное на ЭВМ равновесие не есть некое мифическое устойчивое положение мировой экономики. Когда идет речь об имитации, имеется в виду, что все связи заданы функционально в виде уравнений. Однако не обязательно все ограничения модели должны быть выражены функционально.

Так, при оптимизации вводятся критерии эффективности регионов и из них получается некий компромиссный критерий для всей модели в целом. При поиске равновесий вместо компромиссного критерия вводится требование сбалансированности платежных балансов регионов.

Имитация предполагает разработку сценариев. Но точно так же сценарии (способы фиксации экзогенных параметров) нужны и для оптимизации, и для равновесия. Цель математиков, опирающихся в своих исследованиях на вычислительный эксперимент, разобраться, какие требуются для этого средства, и создать их. Фактически, плодотворный диалог с экономистами по поводу результатов расчетов возможен лишь тогда, когда появляется возможность управлять моделью в режиме оптимизации и равновесия, так же как это делается при имитации.

В настоящее время в ВЦ АН СССР ведется работа с агрегированным вариантом модели (I0xI0) мировой экономики, рассмотренной в §2.I. В ООН эта модель в ее полном объеме использовалась для многочисленных расчетов, была усовершенствована и там же для ВЦ АН СССР был получен агрегированный вариант.

Модель является динамической и состоит из трех временных ступеней: 1980,1990 и 2000 гг. Для каждого из 10 регионов связь будущего с прошлым осуществляется через капиталы и инвестиции. Число отраслей в этом варианте модели существенно меньше, чем в полном варианте (45), однако макроэкономика каждого региона (I5 уравнений) оставлена практически в полном объеме.

Агрегирование требовалось для того, чтобы проводить более сложные вычисления: осуществить оптимизацию и поиск равновесий. К настоящему времени удалось построить локально-равновесную траекторию модели. Говоря кратко, осуществить переход от равновесия 1980 г. к равновесию 1990 г. и затем от него - к равновесию 2000 г. При этом оказалось целесообразным использовать следующий сценарий, который реализован на диалоговом варианте пакета ДИ-БЭСМ-6.

Сначала идет имитация 1980 г. Полученные из нее выпуски отраслей используются для правых частей ограничений на производство первичных отраслей для оптимизационного варианта. Оптимизация повторяется до тех пор, пока не будет найдено равновесие. От равновесия 1980 г. с некоторыми темпами роста ВВП (по оценкам проф. С.М.Меньшикова) делается шаг имитации к 1990 г. Данные имитации 1990 г. используются для оптимизации 1990 г. и, аналогично, для 2000 г.

Таким образом, один и тот же массив экономической информации попеременно используется во всех трех режимах: имитации, оптимизации и равновесия.

ГЛАВА 3. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРИНЦИПОВ ОПТИМАЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Как уже отмечалось, наиболее известным и хорошо изученным понятием оптимальности в математической экономике является понятие экономического равновесия по Нэшу - Эрроу - Дебре. Оно базируется на принципе индивидуально-рационального поведения учатников экономической системы. Один из главных вопросов состоит в следующем: когда индивидуально-рациональное поведение приводит к состояниям, являющимся оптимальными в том или ином смысле? "Оптимальность" состояний экономики может быть определена многими способами. Однако все эти способы базируются на некоторых принципах коллективно-рационального поведения. Скажем, оптимальность по Парето определяется коллективной рациональностью поведения участников экономической системы как единой коалиции.

На Школе определению и анализу состояний, вытекающих из принципов коллективно рационального поведения, было уделено очень большое внимание. Такому анализу, по существу, посвящены и предшествующие §I.2-I.5. По-видимому, можно констатировать, что это направление в математической экономике бурно развивается. Кроме того, следует отметить, что это направление характеризуется наиболее тесной связью с теорией кооперативных и бескоалиционных игр.

Ниже обсуждается ряд принципиальных понятий теории игр, ориентированных на приложения в математико-экономических моделях, и рассматриваются некоторые перспективные направления исследований в этой области.

§3.I. Ядро и аналоги вектора Шепли

Одно из важных достижений в области приложения теории игр к математической экономике состоит в установлении тесной связи между распределениями Шепли и равновесными состояниями в моделях чистого обмена. В этом направлении получен ряд интересных результатов, дающих описание кооперативных механизмов формирования индивидуально-рациональных состояний в экономике [I,54]. Отмеченный факт стимулировал появление цикла работ, посвященных различным обобщениям вектора Шепли и аксиоматической характеристике соответствующих механизмов распределения (особо следует выделить работы по вероятностным аналогам функции Шепли [46,56]). Была установлена также внутреняя характеризация ядра кооперативной игры (к.и.) в терминах ее H-дележей, что позволило развить единый функционально-аналитический подход к исследованию двух различных принципов оптимальности: C-ядра и значения к.и. [3,4,7]. Ниже излагаются некоторые свойства H-дележей: класса аналогов вектора Шепли, основанных, в отличие от [46], на его детерминистской интерпретации [50] (см. также [2]).

Зафиксируем некоторое конечное множество N (множество игроков) и через $V = V(N)$ обозначим совокупность всех вещественно-значных функций v на 2^N, удовлетворяющих условию $v(\emptyset)=0$. Функции $v \in V$ и будем в дальнейшем отождествлять с к.и. $\Gamma=(N,v)$. Вводимые аналоги основаны на следующей формуле для вектора Шепли:

$$(\varphi(v))_i = \sum_{\omega / i \in \omega} p^{\varphi}_{i,\omega} \cdot v_\omega ,$$

где $p^{\varphi}_{i,\omega} = 1/|\omega|$, $|\omega|$ - мощность ω, а v_ω - компоненты решения системы линейных уравнений

$$v(S) = \sum_{\omega \subseteq S} v_\omega , \quad S \subseteq N . \tag{3.I.I}$$

Положим

$$P = \{ [p_{i,\omega}]^{\omega \subseteq N}_{i \in \omega} / p_{i,\omega} \in R_+ , \ \sum_{i \in \omega}' p_{i,\omega} = 1, \ \omega \subseteq N \}$$

и для к.и. $v \in V$ зададим функцию $x_v : P \to R^N$:

$$(x_v(p))_i = \sum_{\omega / i \in \omega} p_{i,\omega} \cdot v_\omega, \quad i \in N,$$

где v_ω определяется из решения системы (3.I.I).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I.I. Элементы множества $A(v)=\{x_v(p) / p \in P\}$ будем называть H-дележами к.и.

Понятию H-дележа можно придать следующую интерпретацию. В распоряжении каждой группы $\omega \subseteq N$ имеется некоторая величина v_ω общей собственности (это может быть и общий долг ω), подлежащей разделу между участниками ω. Пропорции $p_{i,\omega} \in [0,1]$ $(\sum_{i \in \omega} p_{i,\omega} = 1)$, в которых делится величина v_ω, определяются каждой группой самостоятельно. В результате определяется общая величина собственности $x_i = \sum_{\omega / i \in \omega} p_{i,\omega} \cdot v_\omega$, получаемой каждым участником $i \in N$. Совокупность достижимых таким образом распределений совпадает, очевидно, с множеством H-дележей к.и. $v(S) = \sum_{\omega \subseteq S} v_\omega$, $S \subseteq N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I.2. H-дележи к.и. v "не хуже" тех, что входят в $I(v) \setminus A(v)$. Именно, справедливо соотношение

$$I(v) \setminus A(v) \prec_v A(v),$$

где $\prec_v$ - классическое отношение доминирования в $\Gamma = (N, v)$, $\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}_1 \exists y \in \mathcal{D}_2 (x \prec y)$, а $I(v)$ - множество всех индивидуально-рациональных дележей Γ [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I.3. Допуская возможность распределения величин v_ω не только между индивидуумами $i \in \omega$, но и между их объединениями $\omega' \subseteq \omega$, удовлетворяющими некоторым ограничениям, получаем полиномиальные дележи [2], описывающие возможные распределения при фиксации тех или иных форм коллективной собственности. Введенное на этом пути понятие полиномиального ядра к.и. может быть использовано для классификации игр по степени их допустимой "децентрализации".

Дадим аксиоматическое описание многозначного отображения $v \mapsto A(v)$, $v \in V$. Обозначим через $V_+ = \{v \in V / v_\omega \geq 0, \omega \subseteq N\}$ и $V_- = -V_+$ конусы положительных и отрицательных элементов V и для каждого $v \in V$ положим $v^+ = v \vee 0$, $v^- = -v \vee 0$, $|v| = -v \vee v$. Элементы $u, v \in V$, для которых $|u| \wedge |v| = 0$, как обычно, будем называть дизъюнктными. Положим $Supp\, v = \{T \subseteq N / v(S) = v(S \cap T), S \subseteq N\}$ и для $i \in N$, $v \in V$ определим функцию

$$v_i(S)=\begin{cases} v(S\setminus\{i\})+v(N)-v(N\setminus\{i\}), & i\in S,\\ v(S), & i\notin S.\end{cases}$$

Смысл модификации v_i в том, что участник $i\in N$ получает в свое распоряжение всю дополнительную полезность, приносимую им в коалицию N.

ТЕОРЕМА 3.I.I [4]. Отображение $v\mapsto A(v)$ и только оно удовлетворяет следующим независимым условиям:

(I) для всех $v\in V$ множество $A(v)$ выпуклое;

(II) $A(u+v)=A(u)+A(v)$ для дизъюнктных u и v;

(III) $A(V_+)\subseteq R^N_+$, $A(V_-)\subseteq R^N_-$;

(IV) $A(v_i)\leq A(v)$ для всех $i\in N$, $v\in V$;

(V) $x(T)=v(N)$ для всех $x\in A(v)$, $T\in Supp\, v$.

Полезную дополнительную информацию об H-дележах дает описание многогранника $A(v)$ в форме неравенств. Интересно, что это описание удается получить в теоретико-игровых терминах. Положим $v_2(S,S')=v(S\cup S')-v(S)-v(S')$.

ТЕОРЕМА 3.I.2 [4]. Для каждого $v\in V$ справедлива формула

$$A(v)=\{x\in R^N / \sum_{i\in N} x_i=v(N),\ \sum_{i\in S} x_i\geq v_H(S),\ S\subseteq N\},$$

где

$$v_H(S)=v(S)-v_2^-(S,N\setminus S),\quad S\subseteq N.$$

Напомним, что множество $C(v)=\{x\in R^N / \sum_{i\in N} x_i=v(N), \sum_{i\in S} x_i\geq v(S), S\subseteq N\}$ называется C-ядром к.и. v. Из теоремы 3.I.2 вытекает, что все элементы C-ядра к.и. v являются H-дележами. Более точно, полагая $v_{(1)}(S)=\sum_{i\in S} v(\{i\}), S\subseteq N$, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I.I. [4]. Для всех $v\in V$ справедливо включение $C(v)\subseteq A(v)$. При этом $C(v)=A(v)$ в том и только в том случае, если $v-v_{(1)}\in V_+$.

Более тонкую характеристику внутреннего строения C-ядер удается получить на основании характеризации линейных операторов $H_p : V \to \mathbb{R}^N$, действующих по формуле

$$H_p(v) = x_v(p), \quad v \in V. \qquad (3.I.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I.2. Линейный оператор $H: V \to \mathbb{R}^N$ представим в виде (3.I.2) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

HI. Монотонность: $H(V_+) \subseteq \mathbb{R}^N_+$;

H2. Сохранение носителей: $\forall T \in Supp\, v$ $(H(v)(T) = v(N))$.

(См. [6], где установлен бесконечномерный аналог этого утверждения.)

Если условие HI заменить на более сильное:

HI$'$. $H(BV_+) \subseteq \mathbb{R}^N_+$,

где BV_+ – конус всех монотонных функций из V, то на основании предложения 3.I.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.I.I. Оператор $H: V \to \mathbb{R}^N$ тогда и только тогда удовлетворяет условиям HI$'$, H2, когда он представим в виде (3.I.2) и определяющие его параметры $[p_{i,\omega}]$ удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{\omega' \subseteq N \setminus \omega} (-1)^{|\omega'|} \cdot p_{i,\omega \cup \omega'} \geq 0, \quad i \in \omega \subseteq N. \qquad (3.I.3)$$

Используя эти результаты, получаем следующее уточнение предложения 3.I.I.

ТЕОРЕМА 3.I.3. Для выпуклых игр и только для них справедливо равенство

$$C(v) = \{ H_p(v) \mid p \in P_0 \}, \qquad (3.I.4)$$

где P_0 – совокупность всех $p \in P$, удовлетворяющих неравенствам (3.I.3).

Отметим еще, что для P_0 имеет место представление

$$P_0 = \{ p \in P \mid \exists q_{i,\omega} \geq 0 \; (p_{i,\omega} = \sum_{\omega' \mid \omega \subseteq \omega'} q_{i,\omega'}) \},$$

позволяющее явным образом выписывать элементы этого многограничка.

Представляет интерес выделение новых классов игр, для которых справедлив аналог формулы (3.I.4), основанной на подходящем выборе ограничений типа (3.I.3). Далее, многие из вышеизложенных результатов допускают естественные бесконечномерные обобщения в пространстве $r V(Q)$ регулярных игр на метрическом компакте Q [2,6,7]. В связи с этим особого внимания заслуживает проблема характеризации вальрасовских распределений бесконечных рынков $\mathcal{E}$ с помощью H -дележей ассоциированной к.и. $v_{\mathcal{E}}$. Здесь, в отличие от известной схемы Аумана [43], варьируются не функции полезности участников, а элементы множества P , что позволяет, по-видимому, снять ряд обременительных технических ограничений на $\mathcal{E}$.

Рассмотрение H -дележей кооперативной игры v позволило установить регулярный способ разбиения $I(v)$ на такие множества $I_1(v)$ и $I_2(v)$, что $I_1(v) \prec_v I_2(v)$ (замечание 3.I.2). Естественно было бы продолжить этот процесс применительно к $I_2(v) = I(v) \cap A(v)$ и т.д. Итогом такого процесса должно стать некоторое внутренне устойчивое подмножество $I(v)$. Ниже предлагается формализация этой идеи в виде обобщения известного решения Неймана - Моргенштерна (НМ-решения).

§3.2. Обобщенные решения Неймана - Моргенштерна

Напомним, что НМ-решение - первое понятие оптимальности для кооперативных игр - было введено в основополагающей работе Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна [28] в 1944 году. Вопрос о его существовании был одной из важнейших проблем теории игр в течение двух последующих десятилетий. Появление известного примера игры 10 лиц, не имеющей НМ-решения [52], стало одной из причин возникновения ряда принципиально новых понятий оптимальности: M -устойчивого множества, $\mathcal{K}$-ядра, $\mathcal{N}$ -ядра и др. [9,31]. Вместе с тем, разработка актуальных для последнего времени вопросов формирования устойчивых (в смысле приведенных принципов оптимальности) дележей привела к необходимости рассмотрения процессов последовательного улучшения в достаточно общем виде. Это обстоятельство стимулировало новый подъем интереса к понятию НМ-решения и различным его обобщениям, отражающим те или иные аспекты указанной динамики [57,59].

Ниже предлагается и исследуется вариант такого обобщения, основанный на принципе последовательного выметания доминируемых альтернатив. Основные определения и конструкции даются в терминах так называемых абстрактных игр [57], что позволяет использовать вводимые понятия не только в традиционных рамках кооперативных игр, но и для анализа любого принципа оптимальности, основанного на том или ином естественном отношении доминирования (в частности, для рассматриваемых в настоящей работе договорного множества экономики, вальрасовского и линдалевского равновесий и др.).

Приведем необходимые определения. Пусть A - некоторое множество, α -бинарное отношение на A. Систему $\Gamma=(A,\alpha)$ будем называть абстрактной игрой (а.и.).

Пусть $\Gamma=(A,\alpha)$ - некоторая а.и. Следуя [28], будем говорить, что $A_0 \subseteq A$ - внутренне (внешне) устойчивое, если

$$\forall x,y \in A_0 [(x \neq y) \Rightarrow (x,y) \notin \alpha]$$
$$(\forall x \notin A_0 \exists y \in A_0 [(x,y) \in \alpha]).$$

Множество A_0 будем называть слабо внешне устойчивым, если оно внешне устойчиво относительно транзитивного замыкания α (последнее определяется по формуле $\alpha_* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ *)).

Введем основное для этого пункта понятие обобщенного решения Неймана - Моргенштерна (оНМ-решение).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.I. Внутренне устойчивое множество $A_0 \subseteq A$ называется оНМ-решением игры $\Gamma=(A,\alpha)$, если оно слабо внешне устойчивое.

Таким образом, множество A_0 тогда и только тогда является оНМ-решением а.и. $\Gamma=(A,\alpha)$, когда выполняются следующие условия:

I) если $x,y \in A_0$ и $x \neq y$, то $(x,y) \notin \alpha$;

2) если $x \notin A_0$, то найдется конечная последовательность элементов $\{x_m\}_{m=1}^{n} \subseteq A$ такая, что $x_1 = x$, $x_n \in A_0$ и $(x_i, x_{i+1}) \in \alpha$ для всех $i=1,\dots,m-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.I. Напомним, что множество $A_0 \subseteq A$ называется НМ-решеним, если A_0 - внутренне и внешне устойчивое [28]. Поэтому если отношение α транзитивное, то всякое

---

*) Как обычно $\alpha' \cdot \alpha'' = \{(x,y) \in A^2 / \exists z \in A [(x,z) \in \alpha', (z,y) \in \alpha'']\}$, $\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha$, $n=1,\dots$

оНМ-решение игры является и НМ-решением этой игры.

Для проивольной а.и. $\Gamma=(A,\alpha)$ и множеств $A', A''\subseteq A$ введем обозначения: $A'\alpha A'' \Leftrightarrow \mathcal{D}om_\alpha A''\supseteq A'$, где $\mathcal{D}om\, B = \{x\in A \mid \exists y\in B[(x,y)\in\alpha]\}$.

В ряде случаев более удобной является следующая эквивалентная формулировка определения 3.2.I.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.I . Внутренне устойчивое множество $A_0\subseteq A$ называется оНМ-решением а.и. $\Gamma=(A,\alpha)$, если $A\setminus A_0$ допускает счетное разбиение $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ такое, что

$$A_{m+1}\,\alpha \bigcup_{i=0}^{m} A_i\,,\quad m=0,1,\ldots \tag{3.2.I}$$

Если A_0 - оНМ-решение а.и. Γ, то одно из разбиений $A\setminus A_0$, удовлетворяющее (3.2.I), можно построить следующим каноническим способом:

$$\tilde{A}_{m+1}=(\mathcal{D}om_\alpha \bigcup_{i=0}^{m}\tilde{A}_i)\setminus\bigcup_{i=0}^{m}\tilde{A}_i\,,\quad m=0,1,\ldots(\tilde{A}_0=A_0).$$

Особый интерес представляет случай, когда для некоторого n имеют место соотношения $\tilde{A}_n\neq\emptyset,\ \tilde{A}_{n+1}=\emptyset$. Это означает, что $A\setminus A_0$ допускает конечное разбиение, удовлетворяющее (3.2.I), причем $r(A_0)=n$ - минимальное возможное число непустых элементов в таких разбиениях.

В описываемой ситуации множество A_0 будем называть финитным оНМ-решением Γ, а величину $r(A_0)$ - рангом этого решения. Положим $r(\Gamma)=\min\{r(A_0)/A_0$ - финитное оНМ-решение $\Gamma\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.2. Будем говорить, что а.и. Γ финитного типа, если она имеет финитное оНМ-решение. Величину $r(\Gamma)$ будем называть НМ-рангом Γ.

Понятие финитного оНМ-решения наиболее отчетливо отражает идею последовательного выметания доминируемых альтернатив: если $r(\Gamma)=1$ (игра имеет обычное НМ-решение), такое выметание можно осуществить за один шаг; если $r(\Gamma)=n>1$, полное выметание требует не менее n шагов:

$$A_n\,\alpha\bigcup_{i=0}^{n-1}A_i,\ A_{n-1}\,\alpha\bigcup_{i=0}^{m-2}A_i,\ \ldots,\ A_1\,\alpha\, A_0\,.$$

Существует ли а.и. любого наперед заданного НМ-ранга? Оказалось, что соответствующие примеры можно обнаружить лишь в классе бесконечных а.и., поскольку всякая конечная а.и. ($|A| < \infty$) с точностью до некоторого множества доминируемых альтернатив имеет обычное НМ-решение.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Если Γ – конечная а.и., то $\tau(\Gamma) \le 2$.

Что касается игр, у которых $\tau(\Gamma) > 2$, надлежащие примеры дает следующая серия. Пусть $A = \mathbb{N}^l$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^l_+$, m – произвольное натуральное число из интервала $[1, l]$, $\prec_m$ – бинарное отношение на $\mathbb{N}^l$, определяемое по формуле

$$x \prec_m y \Leftrightarrow \exists i [(x_i < y_i)] \& [|\{j / x_j \le y_j\}| \ge m].$$

Положим $\Gamma_{m,l} = (\mathbb{N}^l, \prec_m)$. Доказательство приводимой ниже теоремы основано на конечности всех внутренних устойчивых множеств игр $\Gamma_{m,l}$.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Для любых натуральных l и $m = l-1$ справедлива формула

$$\tau(\Gamma_{m,l}) = l. \tag{3.2.2}$$

Пример игры, у которой существуют оНМ-решения и все они не финитные, дает а.и. $\Gamma = (\mathbb{R}^l_+, \prec_\Sigma)$, где

$$x \prec_\Sigma y \Leftrightarrow [\forall j (\sum_{i=1}^{l} y_i \ge x_j)] \& [\exists i (x_i < y_i)].$$

Наконец, случай, когда а.и. не имеет оНМ-решения, демонстрирует известная бесконечная кооперативная игра Калиша – Неринга – Оуэна $\Gamma = (\Sigma^\infty, \prec_v)$, где

$$\Sigma^\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ / \sum_{i=0}^{\infty} x_i = 1\},$$

$$v(S) = \begin{cases} 1, & |\mathbb{N} \setminus S| < \infty, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(x \prec_v y) \Leftrightarrow \exists S \subseteq \mathbb{N}\ \forall i \in S [(x_i < y_i) \& (\sum_{i \in S} y_i \le v(S))].$$

В самом деле, ясно, что $\prec_v$ транзитивно. Поэтому, допуская существование оНМ-решения, получаем, в силу замечания 3.2.1, противоречие с известным фактом отсутствия обычного НМ-решения в этой игре [9].

Среди вопросов, связанных с применением понятия оНМ-решения в различных типах математико-экономических моделей, можно выделить следующие:

1) существование и характеризация оНМ-решений;

2) существование оНМ-решений в специальных классах внутренне устойчивых множеств (особый интерес представляет C - ядро и его аналоги);

3) оценки для $r(\Gamma)$.

Достаточно общие условия существования оНМ-решения в классе кооперативных игр без побочных платежей дает следующая

ТЕОРЕМА 3.2.3. *Пусть $\Gamma=(N,U)$ - произвольная кооперативная игра лиц без побочных платежей. Если множества $U(S)$ замкнуты и ограничены сверху для всех $S\subseteq N$, то Γ имеет оНМ-решение и при этом*

$$r(\Gamma)\leq 2^{n}-n-2.$$

В качестве прямого следствия теоремы 3.2.3 можно получить теоремы о существовании оНМ-решений для широкого класса абстрактных экономик с кардинальными предпочтениями и стандартным отношением доминирования. Более сложным является вопрос о существовании для договорных экономик (см. §I.4), где отвечающее $\mathcal{E}$ бинарное отношение $\prec_{\mathcal{E}}$ уже не совпадает с фигурирующим в вышеуказанных моделях. Отношение $\prec_{\mathcal{E}}$ определяется для договорной экономики $\mathcal{E}$ на семействе систем договоров $\mathcal{V}=\{x^{r}(S)\}$ (и отвечающих им состояний) следующим образом: сбалансированная система договоров $\tilde{\mathcal{V}}=\{(\tilde{x}_i^{r,S})_{i\in S}\,/\,r\in R_{S},\ \tilde{v}=\{1,\ldots,n_{S,\tilde{v}}\},\ S\subseteq N\}$ доминирует сбалансированную систему договоров $\mathcal{V}=\{(x_i^{r,S})_{i\in S}\,/\,r\in R_{S,v}=\{1,\ldots,n_{S,v}\},\ S\subseteq N\}$ (сокращенно $\mathcal{V}\prec_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{V}}$) в том и только в том случае, если найдутся $S_0\subseteq N$, $\lambda_S^{r}\in[0,1]$ и договор $\tilde{x}^{n_{S_0,v}+1}(S_0)$ такие, что $R_{S_0,\tilde{v}}=R_{S_0,v}\cup\{n_{S_0,v}+1\}$, $R_{S,\tilde{v}}=R_{S,v}$ $(S\neq S_0)$, $\lambda_S^{r}=1$ $(S\cap S_0=\emptyset)$ $\tilde{x}^{r}(S)=\lambda_S^{r}\cdot x^{r}(S)$ $(S\subseteq N,\ r\in R_{S,v})$, и при этом

$$u_i(w_i+\sum_{S,r\in R_{S,\tilde{v}}/i\in S}\tilde{x}_i^{r,S})>u_i(w_i+\sum_{S,r\in R_{S,v}/i\in S}x_i^{r,S}),\quad i\in S_0.$$

Выбирая подходящую параметризацию состояний договорной экономики, удается и в этом случае получить аналог упоминавшихся теорем существования.

ТЕОРЕМА 3.2.4. Пусть $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w_i, u_i\}_{i \in N} \rangle$ – произвольная (договорная) экономика обмена. Если множества $X_i \subseteq R_+^\ell$ замкнуты, а функции u_i полунепрерывны сверху, то $\mathcal{E}$ имеет оНМ-решение относительно $<_{\mathcal{E}}$.

Такие оНМ-решения естественно называть вполне договорными. Это тем более справедливо, что общая часть вполне договорных оНМ-решений рассматриваемой экономики $\mathcal{E}$, как можно показать, совпадает с ее вполне договорным множеством $\mathcal{D}_1(\mathcal{E})$.

Касаясь второго из выделенных вопросов, отметим, что, как показывают уже простейшие примеры кооперативных игр 3-х лиц с побочными платежами, c-ядро, как правило, является лишь предельным оНМ-решением в определяемом ниже смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.3. Пусть $\Gamma = (A, \prec)$ – а.м., причем A наделено некоторой топологией $\mathcal{T}$. Внутренне устойчивое множество $A_0 \subseteq A$ будем называть предельным оНМ-р шем Γ, если любая $\mathcal{T}$-окрестность A_0 является слабо внешне устойчивым множеством Γ.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.2. Упоминавшаяся игра Калиша – Неринга – Оуэна такое решение уже имеет.

Большое практическое и теоретическое значение, на наш взгляд, представляет разработка различных аналогов понятия предельного оНМ-решения и установление достаточно общих условий совпадения c-ядра и предельного оНМ-решения игр, порожденных различными моделями и принципами оптимальности математической экономики (и прежде всего рассматриваемыми в этой главе договорными экономиками и теми или иными схемами рационирования и кооперации).

§3.3. Эффективный групповой выбор

Перспективной областью применения игровых методов является теория группового выбора. Известный парадокс в этой области состоит в том, что всякая достаточно универсальная ситуация коллективного выбора при некоторых естественных условиях допускает лишь диктаторскую форму принятия решения [23,41]. Наряду с исследованием различных вариантов этого явления (начиная с парадокса Эрроу [41]) большое внимание в современной теории группового выбора уделяется изучению ситуаций, характеризующихся возможностью не диктаторского эффективного выбора. Наиболее продвинутым является направление, исследующее механизм такого выбора, основанного на возможности компенсации индивидуальных уступок посредством так называемых побочных платежей. Наряду с принципиальной возможностью выбора особый интерес представляет сама конструкция общей процедуры, обеспечивающей реализацию такого выбора в условиях, когда игрокам известны лишь собственные предпочтения и допустимы различные формы искажения информации.

Достаточно общая модель группового выбора с трансферабельностью (или, что то же, с побочными платежами) имеет следующий вид [48]. Группе участников $N=\{1,\dots,n\}$ предстоит сделать выбор из некоторого множества альтернатив Y. Участники имеют возможность перераспределять между собой некоторый специальный товар, компенсируя возможные отклонения группового выбора от индивидуально-оптимальных. Формально, полное множество альтернатив, из которых предстоит сделать групповой выбор, имеет вид: $A = Y \times T$, где $T=\{t\in R^n / \sum_{i\in N} t_i \leq 0\}$ – множество допустимых платежей*). Величины t_i измеряют количество блага, передаваемого ($t_i > 0$) участнику $i\in N$ или забираемого ($t_i < 0$) у него. Индивидуальные предпочтения участников $i\in N$ описываются функциями полезности u_i: $A\to R$, удовлетворяющими условиям:

а) u_i зависит лишь от y и t_i;

б) u_i строго возрастает по t_i;

в) для любых $y, y'\in Y$ и $t\in R^n$ существует $t'\in R^n$, для которого $u_i(y,t)=u_i(y',t')$;

г) если $u_i(y,t)=u_i(y',t')$, то для любого $\alpha\in R^n$

$$u_i(y,t+\alpha)=u_i(y',t'+\alpha).$$

Множество всех таких функций полезности обозначим через $\mathcal{A}$. Можно показать [48], что предпочтения, определяемые функция-

---

*) Предполагается, что участники не имеют возможности увеличивать количество трансферного товара.

ми из $\mathcal{A}$, представимы в виде $u_i(y,t)=w_i(y)+t_i$, причем $w_i(y)-w_i(y^*)=\mu_i(y;y^*,t_i)$, где $\mu_i(y;y^*,t_i)$ – функция склонности к платежу, измеряющая наибольшее количество блага, которое агент i заплатил бы, чтобы передвинуться от альтернативы y^* к альтернативе y из состояния (y^*,t) [ж].

В терминах функций w_i легко описываются оптимальные по Парето состояния из A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.1 [48]. Состояние $a^*=(y^*,t^*)$ оптимально по Парето тогда и только тогда, когда

а) $\sum\limits_{i\in N} t_i^*=0$,

б) y^* максимизирует $\sum\limits_{i\in N} w_i(y)$ по $y\in Y$.

Таким образом, эффективные альтернативы y^* характеризуются тем, что они максимизируют суммарную склонность к платежу за движение от произвольного $y\in Y$.

Предположим, что участники $i\in N$ сообщают не свои функции полезности u_i, а некоторые оценки имеющихся альтернатив $m_i: Y\to R$, при этом $m_i(y')-m_i(y)$ интерпретируются как количество блага, которое участник i готов заплатить за переход из y в y'. В этой ситуации естественно считать, что i "говорит правду", если для всех $y, y'\in Y$ выполняется соотношение $m_i(y')-m_i(y)=w_i(y')-w_i(y)$, где, как и ранее, w_i определяется его истинным предпочтением в A. Может оказаться, что при данном правиле группового выбора $F: \mathcal{M}^n\to A$ ($\mathcal{M}=\{m: Y\to R\}$ – пространство сообщений участников) комулибо из $i\in N$ будет выгодно искаженно представлять свою оценку выбора $y\in Y$. Долгое время считалось, что такое положение вещей будет иметь место при любом выборе F. Недавнее открытие "механизмов выявления спроса" опровергло это представление [48]. В указанных механизмах $F(m)=(y^*(m),t^*(m))$, где $y^*(m)$ – альтернатива, доставляющая максимум функции $\sum\limits_{i\in N} m_i(y)$ на Y, а трансферные правила $t_i^*(m)$ имеют вид

$$t_i^*(m)=\sum_{j\neq i} m_j(y^*(m))-\beta_i(m_{J\setminus i}),^{**)}$$

где β_i – вещественная функция от $n-1$ сообщения $m_j (j\neq i)$,

---

ж) Формально $(y,t/t_i)\succ(y',t/t_i-v_i)$.

жж) $m_{J\setminus i}\triangleq(m_1,\dots,m_{i-1},m_{i+1},\dots,m_n)$.

удовлетворяющая условию

$$\sum_{i\in N} \beta_i (m_{N\setminus i}) \geq (n-1) \sum_{i\in N} m_i (y^*(m)), \quad m \in \mathcal{M}^n.$$

Дадим точную формулировку того, что понимается под "правдивостью" поведения участников при функционировании "механизма выявленного спроса".

Пусть истинные предпочтения участников $i \in N$ задаются функциями w_i°, $i \in N$, а правило группового выбора ρ определяется некоторым "механизмом выявления спроса". Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma = (w^\circ, \rho)$, участники которой составляют множество N, множество стратегий каждого из них $\mathcal{M}$, а функции выигрыша f_i имеют вид

$$f_i(m) = w_i^\circ(y^*(m)) + t_i^*(m), \quad m \in \mathcal{M}^n,$$

где $(y^*(m), t^*(m)) = \rho(m)$. Справедлива

ТЕОРЕМА 3.3.1 [49]. Для каждого участника $i \in N$ игры Γ стратегия $w_i^\circ \in \mathcal{M}$ будет наилучшей независимо от выбора остальных игроков. Более того, набор $m^* = (m_1^*, \ldots, m_n^*) \in \mathcal{M}^n$ является равновесием доминантных стратегий игры $\Gamma(w^\circ, \rho)$ в том и только в том случае, когда $m_i^* = w_i^\circ + const$ для всех $i \in N$ *).

К сожалению, "правдивые" стратегии $(m_i = w_i^\circ + c)$ не всегда являются оптимальными по Парето в игре $\Gamma(w^\circ, \rho)$. В последнее время появился ряд работ, где предлагается несколько подходов для преодоления этой трудности. Перечислим основные: сужение пространства сообщений $\mathcal{M}$, иной способ построения правила побочных платежей, расширение пространства $\mathcal{M}$, позволяющее участникам сообщать, кроме "спроса", также и "цены", использующиеся в определении их платежей [47,49].

Большой интерес представляет спецификация параметров манипулирования и механизмов группового выбора применительно к экономическим моделям [47]. Отметим также тесную связь указанной проблематики с вопросами устойчивости различных экономических механизмов относительно возмущений информации, опре-

---

*) Напомним, что набор $(m_1^*, \ldots, m_n^*)$ является равновесием доминантных стратегий, если $g_i(m/m_i^*) \geq g_i(m/m_i')$, $m \in \mathcal{M}^n$, $m_i' \in \mathcal{M}$, $i \in N$.

делящей исследуемую модель [33].

Возвращаясь непосредственно к парадоксу Эрроу, приведем один из возможных способов его устранения. Имеется в виду следующий вариант этого парадокса. Рассматривается конечное множество $N=\{1,\dots,n\}$ носителей интересов, определяющихся линейными порядками на некотором конечном множестве альтернатив A. Обозначим через $\mathcal{L}=\mathcal{L}(A)$ совокупность всех линейных порядков на A и введем некоторые естественные требования для функций группового выбора $g:\mathcal{L}^n\to\mathcal{L}$.

a1. Независимость от посторонних альтернатив

$$\forall A'\subseteq A\ \forall\hat{\mathcal{L}},\hat{\mathcal{L}}'\in\mathcal{L}^n[(\hat{\mathcal{L}}_{A'}=\hat{\mathcal{L}}'_{A'})\Rightarrow(g(\hat{\mathcal{L}})_{A'}=g(\hat{\mathcal{L}}')_{A'})].$$

a2. Монотонность

$$\forall B\in R(A)\ \forall\hat{\mathcal{L}},\hat{\mathcal{L}}'\in\mathcal{L}^n[(\hat{\mathcal{L}}\geqslant_B\hat{\mathcal{L}}')\Rightarrow(g(\hat{\mathcal{L}})\geqslant_B g(\hat{\mathcal{L}}'))].$$

a3. Паретовость

$$\forall\alpha\in\mathcal{L}(g(\alpha,\alpha,\dots,\alpha)=\alpha),$$

где $\alpha_{A'}=\alpha\cap A'\times A'$ – сужение отношения α на A', $\hat{\mathcal{L}}_{A'}=$

$$=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)_{A'}\triangleq(\alpha^1_{A'},\dots,\alpha^n_{A'}),\quad R(A)=\{B\subseteq A^2/\ \forall a\in A,$$

$$[(a,a)\notin B]\ \&\ \forall a\neq b[(a,b)\in B\Leftrightarrow(b,a)\notin B]\},\ \alpha\geqslant_B\alpha'\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\alpha\cap B\supseteq\alpha'\cap B,\ \hat{\mathcal{L}}=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)\geqslant_B\hat{\mathcal{L}}'=(\alpha^{1'},\dots,\alpha^{n'})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\forall i\in N\ (\alpha^i\geqslant_B\alpha^{i'}).$$

ТЕОРЕМА ЭРРОУ. Ф у н к ц и я $g:\mathcal{L}^n\to\mathcal{L}$ у д о в л е т в о р я е т у с л о в и я м a1–a3 в т о м и т о л ь к о в т о м с л у ч а е, к о г д а

$$g(\alpha^1,\dots,\alpha^n)=\alpha^i \qquad (3.3.1)$$

д л я в с е х $\hat{\mathcal{L}}=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ и н е к о т о р о г о $i\in N$ (н е з а в и с я щ е г о о т $\hat{\mathcal{L}}\in\mathcal{L}^n$).

Участника $i=i(g)$, фигурирующего в формулировке приведенной теоремы, по понятным причинам принято называть диктатором, а функции выбора вида (3.3.1) – диктаторскими. Суть парадокса Эрроу и состоит в том, что если потребовать от функции g, наряду с a1–a3 выполнения столь же естественного условия отсутствия диктатора, полученная система требований оказывается несовместной.

Существенным моментом, обуславливающим возможность такого парадокса, является требование, чтобы область определения и область значений g состояли из $\mathcal{L}^n$, $\mathcal{L}$ соответственно. Отказываясь, например, от условия $g(\mathcal{L}^n) \subseteq \mathcal{L}$ в качестве одной из недиктаторских функций группового выбора, удовлетворяющих а1–а3, можно было бы взять так называемое правило большинства g' :

$$(a,b) \in g'(\alpha_1, \ldots, \alpha^n) \Leftrightarrow |\{i \,|\, (a,b) \in \alpha^i\}| \geq n/2, \; a,b \in A.$$

Таким образом, один из принципиально возможных путей преодоления парадокса Эрроу состоит в надлежащем расширении области значений (и области определения) искомой функции группового выбора. Ниже предлагается вариант такого решения, основанный на классических идеях стохастического пополнения, восходящих к известным работам Неймана по теории матричных игр. Отметим также, что предлагаемый подход в определенной степени смыкается с методологией современной теории нечетких множеств и нечетких отношений предпочтения [30].

Стохастическое расширение $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ семейства бинарных отношений $\mathcal{K}$, заданных на множестве альтернатив A, определяется в два этапа:

1) вложение $\mathcal{K}$ в подходящее линейное пространство M ;

2) построение выпуклой оболочки образа $\mathcal{K}$ в M .

На первом этапе в рассматриваемой ситуации целесообразно положить $M = R^{A \times A}$, а вложение $\alpha \mapsto s^{\alpha}$ осуществить следующим каноническим образом:

$$s^{\alpha}_{a,b} = \begin{cases} 1, & (a,b) \in \alpha, \\ 0, & (a,b) \notin \alpha, \end{cases} \quad a,b \in A, \alpha \in \mathcal{L} \qquad (3.3.2)$$

Обозначая через $\tilde{\mathcal{L}}$ образ $\mathcal{L}$, определяемый вложением (3.3.2), на втором этапе получаем искомое стохастическое расширение $\mathcal{P}$ семейства $\mathcal{L}$, полагая $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}} = conv\, \tilde{\mathcal{L}}$, где через $conv\, X$ обозначается выпуклая оболочка X . Элементы $s = [s_{a,b}] \in \mathcal{P}$ можно понимать как стохастические линейные порядки, в которых включение $(a,b) \in s$ реализуется с вероятностью, равной соответствующей компоненте $s_{a,b}$ вектора s .

Нетрудно проверить, что для каждого $s \in \mathcal{P}$ выполняются соотношения

$$s_{a,a} = 0, \quad a \in A, \tag{3.3.3}$$

$$s_{a,b} + s_{b,a} = 1, \quad a,b \in A \quad (a \neq b), \tag{3.3.4}$$

$$0 \leq s_{a,b} \leq 1, \quad a,b \in A, \tag{3.3.5}$$

$$s_{a,b} + s_{b,c} - s_{a,c} \geq 0, \quad a,b,c \in A, \tag{3.3.6}$$

причем все гиперплоскости, определяемые неравенствами (3.6.6), лежат на гранях максимальной размерности многогранника $\mathcal{P}$. Таким образом, $\mathcal{P}$ заведомо не содержит нетранзитивных и циклических бинарных отношений.

Большой интерес представляет полное аналитическое описание многогранника $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, а также многогранников, отвечающих стохастическому расширению семейства всех полных линейных предпорядков и ряда других семейств.

Перейдем, наконец, к описанию одного класса недиктаторских функций группового выбора G, действующих из $\mathcal{P}^n$ в $\mathcal{P}$ и удовлетворяющих аналогам требований a1–a3:

A1. $\forall A' \subseteq A \forall \hat{s}, \hat{s}' \in \mathcal{P}^n [(\hat{s}_{A'} = \hat{s}'_{A'}) \Rightarrow (G(\hat{s})_{A'} = G(\hat{s}')_{A'})]$.

A2. $\forall \hat{s}, \hat{s}' \in \mathcal{P}^n [(\hat{s} \geq_B \hat{s}') \Rightarrow (G(\hat{s}) \geq_B G(\hat{s}'))]$, $B \in R(A)$.

A3. $\forall s \in \mathcal{P} (G(s, s, \ldots, s) = s)$,

где $s_{A'}$ – сужение $s \in \mathcal{P}$ на $A' \times A'$, $\hat{s}_{A'} = (s^1_{A'}, \ldots, s^n_{A'})$, $s \geq_B s' \Leftrightarrow [\forall (a,b) \in B (s_{a,b} \geq s'_{a,b})]$, $\hat{s} \geq_B \hat{s}' \Leftrightarrow \forall i \in N (s^i \geq_B s'^i)$.

Для формулировки дополнительных условий введем следующие обозначения. Пусть $\Pi(N)$, $\Pi(A)$ – совокупность всех перестановок множеств N, A соответственно. Для каждого $\hat{s} \in (s^1, \ldots, s^n) \in \mathcal{P}^n$, $s \in \mathcal{P}$, $\pi \in \Pi(N)$, $\gamma \in \Pi(A)$ положим $\pi \circ \hat{s} \triangleq (s^{\pi(1)}, \ldots, s^{\pi(n)})$, $(\gamma \circ s)_{a,b} \triangleq s_{\gamma(a),\gamma(b)}$, $\gamma \circ \hat{s} \triangleq (\gamma \circ s^1, \ldots, \gamma \circ s^n)$.

A4. Анонимность:

$$G(\pi \circ \hat{s}) = G(\hat{s}), \quad \hat{s} \in \mathcal{P}^n, \quad \pi \in \Pi(N).$$

A5. Нейтральность:

$$G(\gamma \circ \hat{s}) = \gamma \circ G(\hat{s}), \quad \hat{s} \in \mathcal{P}^n, \quad \gamma \in \Pi(A).$$

Отметим сразу же, что дискретный вариант условия А5 является следствием aI–a3.

Естественные вероятностые соображения позволяют ограничиться рассмотрением функций группового выбора $G : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$, удовлетворяющих условию

$$G(\lambda \hat{s} + (1-\lambda)\hat{s}') = \lambda G(\hat{s}) + (1-\lambda) G(\hat{s}'), \quad \lambda \in [0,1], \ \hat{s}, \hat{s}' \in \mathcal{P}^n.$$

Обозначим множество всех таких функций через $\mathcal{O}\!\mathcal{C}_n(\mathcal{P})$.

ТЕОРЕМА 3.3.2. Оператор $G \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}_n(\mathcal{P})$ удовлетворяет условиям AI–A3, A5 тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$G(s^1, \ldots, s^n) = \sum_{i \in N} \mu_i \cdot s^i, \ (s^1, \ldots, s^n) \in \mathcal{P}^n. \qquad (3.3.7)$$

где μ_i – неотрицательные вещественные числа такие, что $\sum_{i \in N} \mu_i = 1$.

Дискретный аналог условия А4, как вытекает из теоремы Эрроу, несовместим с условиями aI–a3. Тем не менее справедлива

ТЕОРЕМА 3.3.3. Существует единственный оператор $G \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}_n(\mathcal{P})$, удовлетворяющий условиям AI–A4. При этом справедливо представление

$$G(s^1, \ldots, s^n) = 1/n \cdot \sum_{i \in N} s^i, \quad (s^1, \ldots, s^n) \in \mathcal{P}^n. \qquad (3.3.8)$$

Условия, фигурирующие в теореме 3.3.3, можно трактовать как полную аксиоматическую характеризацию стохастического аналога правила большинства, представленную формулой (3.3.I).

Таким образом, условиям AI–A3, A5 удовлетворяет целый спектр недиктаторских (в детерминистском смысле) функций группового выбора. Дальнейшая конкретизация таких функций может быть осуществлена введением дополнительных требований или подходящей заменой условия А5, как это продемонстрировано теоремой 3.3.3. Следует отметить также, что теоремы 3.3.2 и 3.3.3 допускают соответствующие обобщения и модификации на случай бесконечного количества участников или альтернатив. Особый случай составляют ситуации, где предпочтения кардинальные и нет необходимости в их стохастическом расширении. Здесь уже аналоги теорем 3.3.2 и 3.3.3 имеют прямое отношение к теории агрегирования индивидуальных полезностей в экономике общественного благосостояния [42].

В заключение этого параграфа приведем конкретизации постановки вопроса о "правдивости" функций группового выбора типа (3.3.7). Итак, пусть $G : \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям AI-A3, A5. Пусть $a^i \in \mathcal{P}$ – "истинные" предпочтения $i \in N$, $\Gamma(G, \{a^i\}_{i \in N})$ – бескоалиционная игра участников N, стратегиями которых являются элементы $\mathcal{P}$, а функции выигрыша определяются по формуле

$$f_i(s) = -\|G(s) - a^i\|_2, \quad i \in N$$

(здесь $\|s\|_2 = \sqrt{\sum_{a,b \in A} s^2_{a,b}}$). В каких случаях стратегия $\hat{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ будет равновесной по Нэшу в такой игре?

Менее "жесткая" игровая схема получается, если функции выигрышей участников определяются степенью уклонения их "максимальных" относительно a^i элементов от "максимальных" групповых элементов, определяемых $G(s^1, \ldots, s^n)$. Под максимальными относительно $s \in \mathcal{P}$ элементами здесь естественно понимать распределения вероятностей на A вида:

$$\mu_s(a) = \sum_{k \in K_a} \lambda_k ,$$

где

$$s = \sum_{k \in K} \lambda_k \alpha_k \quad (\lambda_k \geq 0, \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \alpha_k \in \mathcal{L}),$$

$K_a = \{k \in K \mid a$ – максимальный элемент в A относительно $\alpha_k\}$. Если совокупность всех таких распределений обозначить через A_s, то некоторым аналогом "правдивости" в ситуации $\hat{a}$ можно считать условие

$$\bigcap_{i \in N} A_{a^i} \cap A_{G(a^1, \ldots, a^n)} \neq \emptyset .$$

Какой вид имеют функции группового выбора, для которых это условие выполняется достаточно часто ? Не останавливаясь подробно на этом вопросе, отметим лишь, что существенным моментом является здесь выяснение свойств a^i, обеспечивающих выполнение требования $\bigcap_{i \in N} A_{a^i} \neq \emptyset$.

§3.4. Иерархические игры и их применения к экономическим исследованиям

В заключение этой главы приведем некоторые постановки задач и направления дальнейших исследований в области теории иерархических игр, активное развитие которой было положено работами Ю.Б.Гермейера, Н.Н.Моисеева и ряда других авторов [I2,27,39]. Как известно [I2], в таких играх все рассмотрения ведутся с позиции выделенного игрока, который знает (точно или в определенных пределах) функции цели других участников и располагает возможностью объявить свою стратегию и оценить последствия этого шага с учетом имеющейся у него информации. Наиболее подробно анализировались игры двух лиц, изучены возможные стратегии участников в таких играх и их экономические интерпретации [I2,27]. Исследована связь игр с обменом информации и конструкциями Ховарда [I2]. Было установлено, что при анализе иерархических игр 2-х лиц в определенном смысле достаточно ограничиться рассмотрением игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, расширения стратегий и наибольшие гарантированные выигрыши которых имеют следующий вид [I2]. Пусть игроки из $N=\{1,2\}$ стремятся к увеличению своих функций цели u_1, u_2, заданных и непрерывных на произведении компактов X_1, X_2, представляющих исходные стратегические возможности участников I,2 соответственно.

ИГРА Γ_1. Выделенный игрок I выбирает $x_1 \in X_1$ и сообщает свой выбор игроку 2. Если $P_1(x_1)=\{x_2 \in X_2 \mid u_2(x_1,x_2)= \max\limits_{y \in X_2} u_2(x_1,y)\}$ – множество оптимальных реакций игрока 2, то наибольший гарантированный выигрыш игрока I равен $G_1 = \sup\limits_{x_1 \in X_1} \min\limits_{x_2 \in P_1(x_1)} u_1(x_1,x_2)$.

ИГРА Γ_2. Выделенный игрок I имеет информацию о выборах $x_2 \in X_2$ игрока 2 и сообщает ему свою стратегию – функцию $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, где $\tilde{X}_1$ – множество всех отображений из X_2 в X_1. Наибольший гарантированный результат игрока I равен $G_2 = \sup\limits_{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1} \inf\limits_{x_2 \in P_2(\tilde{x}_1)} u_1(\tilde{x}_1(x_2), x_2)$, где множество оптимальных реакций P_2 игрока 2 есть $P_2(\tilde{x}_1)=\{x_2 \mid u_2(\tilde{x}_1(x_2),x_2)= \sup\limits_{y \in X_2} u_2(\tilde{x}_1(y),y)-\delta(\tilde{x}_1(y))\}$, $\delta(\tilde{x}_1(y)) \geq 0$, и при этом $\delta(\tilde{x}_1(y))=0 \Leftrightarrow u_2(\tilde{x}_1(y),y)= \max\limits_{y' \in X_2} u_2(\tilde{x}_1(y'),y')$.

ИГРА Γ_3. Игрок I имеет информацию о выборах игрока 2 вида $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ ($\tilde{X}_2$ – множество всех отображений из X_1 в X_2) и сообщает последнему свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_1 \in \tilde{\tilde{X}}_1$, где $\tilde{\tilde{X}}_1$ – множество всех отображений из $\tilde{X}_2$ в X_1. Наибольший гарантированный результат игрока I равен $G_3 =$
$= \sup_{\tilde{\tilde{x}}_1 \in \tilde{\tilde{X}}_1} \inf_{\tilde{x}_2 \in P_3(\tilde{\tilde{x}}_1)} u_1(\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2), \tilde{x}_2(\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2)))$, где $P_3(\tilde{\tilde{x}}_1) =$
$= \{\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2 \mid u_2(\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2), \tilde{x}_2(\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2))) = \sup_{y \in \tilde{X}_2} u_2(\tilde{\tilde{x}}_1(y), y(\tilde{\tilde{x}}_1(y))) -$
$- \delta(\tilde{\tilde{x}}_1(y))\}$ $(\delta(\tilde{\tilde{x}}_1(y)) \geq 0)$ и при этом $\delta(\tilde{\tilde{x}}_1(y)) = 0 \Leftrightarrow$
$u_2(\tilde{\tilde{x}}_1(y), y(\tilde{\tilde{x}}_1(y))) = \max_{y' \in \tilde{X}_2} u_2(\tilde{\tilde{x}}_1(y'), y'(\tilde{\tilde{x}}_1(y')))$.

Используя указанную схему расширения множеств стратегий участников, можно формулировать игры с произвольной глубиной рекурсии, а также с произвольным числом участников. Детально проанализированы игры, имеющие так называемую "веерную" структуру: выделенный игрок (управляющий центр) Π_0 и n игроков $i \in N$ на следующем уровне иерархии (производители продукции) стремятся к увеличению функций выигрыша $u_0(x_0, x)$, $u_i(x_0^i, x_i)$, $i \in N$, где $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in X_0 \subseteq \prod_{i \in N} X_0^i$ – выбор Π_0, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i \in N} X_i$ – совокупный выбор участников на нижнем уровне иерархии (предполагается, что они действуют независимо и каждый $i \in N$ распоряжается выбором $x_i \in X_i$). Ясно, что во многих отношениях (в частности, в информационном) нижний уровень N можно рассматривать как единого участника, что позволяет естественным образом использовать приемы, разработанные для игр 2-х лиц. С другой стороны, в рассматриваемой ситуации возможны дальнейшие расширения стратегий Π_0 за счет передачи участникам $i \in N$ информации о действиях партнеров, введения блефа и т.д.

Интерпретация этих игр подробно обсуждается в [8, 13]. Вкратце можно отметить, что игры Γ_1 описывают централизованное распределение ресурсов, назначение цен и квот при активном поведении независимых производителей, игры Γ_2 – назначение политик штрафов и поощрений в иерархических системах, игры Γ_3 – политики управления центра при различных производственных способах использования ресурсов активными подсистемами.

Значительное внимание уделяется случаям, когда информация первого игрока о функции цели второго (подчиненного) является неточной. Например, известно лишь, что $u_2 \in \mathcal{U} = \{u \mid f_2^- \leq u \leq f_2^+\}$ (f_2^-, f_2^+ заданы) или, более общо (см. по этому поводу [12]),

$u_2 \in W = \{u_\alpha : X_1 \times X_2 \to R \mid u_\alpha(x,y) = f(x,y,\alpha), \alpha \in A\}$ (множество A и f заданы). Вопросам численных методов отыскания значений соответствующих игр ($\max\min$ при связанных ограничениях) посвящены работы [12,14,40].

Что касается приложений, то здесь следует отметить опыт, накопленный в процессе применения теории иерархических игр в области управления и планирования в сельском хозяйстве [10,11]. Одна из постановок имеет следующий вид. Рассматривается район, в котором есть n колхозов, x_{ij} - площади под i-й культурой в j-м колхозе, u_{ij} - соответствующие урожайности. В существующих условиях колхозы максимизируют прибыль

$$\max \sum_{j\in J} (c_j^з u_{ij} x_{ij} - d_{ij} x_{ij}) = \pi_i^з,$$

$$A_i x_i \le b_i,$$

$$u_{ij} x_{ij} \ge \rho_{ij}^0, \quad j \in J,$$

где $x_i = (x_{ij})_{j\in J}$ и первая группа условий отражает производственные ограничения, ρ_{ij}^0 $(j \in J)$ - плановые задания, $c_i^з$ - закупочные цены, d_{ij} - удельные затраты.

Если колхозы объединяются, то прибыль всего районного объединения выражается в виде

$$\max \sum_{i\in N} \sum_{j\in J} (c_j^з u_{ij} x_{ij} - d_{ij} x_{ij}) = F_N,$$

$$A_i x_i \le b_i, \quad i \in N,$$

$$\sum_{i\in N} u_{ij} x_{ij} \ge \rho_j^0, \quad j \in J$$

(здесь $\rho_{ij} = u_{ij} x_{ij}$ уже находятся в распоряжении N; внешнее плановое задание - ρ_j^0, $j \in J$). Получим отсюда выпуски ρ_{ij}^N в условиях коалиции N и поставим задачу о выборе механизма расчетных цен c_j^p и перерасчетов R_i между колхозами, стимулирующего их к коалиционному уровню производства ρ_{ij}^N :

$$\max \sum_{j\in J} (c_j^p u_{ij} x_{ij} - d_{ij} x_{ij}) + R_i = \pi_i^p,$$

$$A_i x_i \le b_i,$$

$$u_{ij} x_{ij} \ge p_{ij}^N, \quad j \in J.$$

Доходы π_i^p будут строго больше π_i^3, если $F_N > \sum_{i \in N} \pi_i^3$. Такой механизм функционирования предполагает создание совета колхозов, координирующего проведение коалиционной политики.

В работе [39] приводятся примеры использования иерархических игр для анализа обменов в экономических системах.

Несмотря на определенные успехи в прикладных разработках, имеется и некоторое чувство неудовлетворенности. Это вызвано в первую очередь возможной неадекватностью описания интересов подсистем в виде их стремления к максимизации некоторой функции цели. Кроме того, если на уровне отдельного работника еще можно отделить описание технологического процесса от мотивов поведения, то что можно сказать о других уровнях иерархии управления? Эти вопросы повышают интерес не только к анализу иерархических систем, но и к их синтезу.

Задача синтеза ставится следующим образом. Пусть имеется система из n отдельных подсистем, функционирующих во взаимодействии с неконтролируемой средой. Функция цели системы в целом имеет вид: $F = F(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i - выбор i-й подсистемы, $x_i \in X_i(\xi_i)$ (например, $A_i(\xi_i)x_i \le b_i(\xi_i)$), ξ_i - случайный параметр, характеризующий воздействие внешней среды. Пусть нет возможности собрать всю информацию о $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в центре, но каждая подсистема своевременно узнает ξ_i. Тогда центр, отвечающий за функционирование системы в целом, может формировать для каждой подсистемы правило отклика $x_i = \varphi_i(\xi_i)$ из условия $\min\limits_{\xi \in S} F(\varphi_1(\xi_1), \ldots, \varphi_n(\xi_n)) \to \max\limits_{\varphi_i \in P_i,\, i \in N}$ (в максиминной постановке) или $M_\xi F(\varphi_1(\xi_1), \ldots, \varphi_n(\xi_n)) \to \max\limits_{\varphi_i \in P_i,\, i \in N}$ (в вероятностной постановке).

Близкие по постановке задачи рассматриваются в теории команд [53].

ГЛАВА 4. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

§4.1. Некоторые решенные и нерешенные задачи в моделях экономической динамики неймановского типа

Статьи, посвященные моделям экономической динамики, выходят достаточно регулярно, хотя в последнее время не слишком интенсивно. За 1974-79 гг. в РЖ "Математика" прореферировано примерно 60 советских и 40 зарубежных работ, посвященных модели Неймана, ее модификациям и обобщениям. Многие из этих работ (особенно зарубежных) посвящены изучению различных обобщений состояния равновесия. Что касается собственно динамики, то основной вопрос, исследуемый в настоящее время, - теоремы о магистрали. Помимо этого, ранее (в шестидесятых годах) изучалась характеристика эффективных траекторий, в конце семидесятых годов появились работы, посвященные эффективному построению этих траекторий, т.е. явному указанию экстремальных задач, решение которых дает эффективную траекторию. Подробный обзор результатов по моделям неймановского типа имеется в [36].

В последнее время интерес к указанным моделям несколько уменьшился. Это вызвано тем, что многие из стоявших ранее задач решены, кроме того, по мнению многих экономистов, модели неймановского типа не совсем адекватно описывают экономическую реальность (в частности, они не учитывают различия интересов участников экономики и, более того, игнорируют наличие таких участников). Подобная постановка вопроса не совсем корректна, как не корректна, скажем, постановка вопроса об экономическом смысле матрицы. Все зависит от того, в какой модели матрица рассматривается и как она нами интерпретируется. То же относится и к модели Неймана - Гейла, которая, по сути дела, представляет собой некоторый математический объект (суперлинейное многозначное отображение [36,37]), приспособленный для исследования конкретных моделей, а не одну модель с застывшей экономической интерпретацией. Эта точка зрения переносит в настоящий момент центр тяжести с рассмотрения модели Неймана - Гейла (аппарата, который в достаточной степени развит) на модели экономической динамики, которые, хотя и не являются формально моделями неймановского типа, но изучаются с их помощью. Примером использования неймановского аппарата может служить проводящееся сейчас исследование однопродуктовых динамических моделей [33]. Здесь удалось выявить связи между траекториями, оптимальными в различных смыслах, выяснить, когда пошаговая оптимизация приводит к глобальной оптимальности (эффективности), обнаружить новые магистральные эффекты. При исследовании таких моделей возникают и новые задачи, относящиеся непосредственно к аппарату; так, изучение научно-технического прогресса приводит к необходимости рассматривать модели с переменной технологией, в которых производственное отображение зависит не только от времени, но и от состояния. Заметим, что динамика в однопродуктовых моделях может определяться и результатами взаимодействия различных участников экономики. Однако здесь важны лишь сами результаты, поэтому игнорирование участников в подобных макромоделях вполне закономерно.

Один из основных нетрадиционных вопросов, относящихся к моделям, исследуемым с помощью неймановского аппарата, заключается в определении принципа оптимальности и соответствующего этому принципу целевого функционала. Экономическую динамику нельзя рассматривать только лишь как раздел (хотя и очень своеобразный) теории экстремальных задач. В отличие от этой теории здесь нужно не только оптимизировать, но и знать, что именно оптимизировать. Поэтому неправомерно задавать критерии оптимальности извне, их надо определять эндогенно, с помощью тех или иных соображений равновесного типа. Однако возникающие здесь понятия о равновесии, по-видимому, существенно отличаются от используемых сейчас в математической экономике.

Один из подобных подходов к принципам оптимальности можно проиллюстрировать на примере одно- и двухпродуктовых моделей с экзогенно заданной рабочей силой. Предполагается, что в каждый момент времени центр, управляющий экономикой, имеет точную информацию об определяющих ее параметрах лишь в этот и следующий момент. Кроме того, центром принят ряд гипотез о качественном поведении экономики на всем бесконечном промежутке планирования. В однопродуктовом случае механизм, порождающий траектории, задается в каждый момент времени некоторым суперлинейным отображением, которое определяется с помощью производственной функции, коэффициента выбытия фондов и управляемого параметра - ставки заработной платы. Неймановский темп роста этого отображения совпадает с максимально возможным темпом роста национального богатства; его можно трактовать как потенциальные возможности экономики в рассматриваемый момент. Предлагаемый принцип оптимальности основан на постулате о полном использовании потенциальных возможностей экономики, который утверждает, что значение управляемого параметра должно выбираться так, чтобы "реальное" движение экономики (в рамках модели) проистекало по тем состояниям, на которых реализуются потенциальные возможности соответствующего механизма (при этом и сам механизм определяется выбором управляющего параметра).

Подобный же подход может быть использован и в двухпродуктовом случае. При этом, однако, возникают дополнительные вопросы о соизмерении затрат и результатов в соизмерении продуктов между собой. Постулат о полном использовании потенциальных возможностей может быть применен и для решения указанных вопросов. Оказывается, что в рамках рассматриваемой модели этот постулат тесно связан с законом стоимости.

При некоторых предположениях подход, основанный на локальном выборе управляемых параметров, приводит к построению траектории, которая в определенном смысле "хороша" в целом. Исследование свойств этой траектории существенно опирается на теоремы о характеристике и о магистрали для моделей неймановского типа с переменной технологией.

Основные концепции, изложенные в этом параграфе, содержатся в [38].

§4.2. Теорема о магистрали для общей модели неймановского типа

В работах [15,24,55,61] для последовательно усложняющихся многоотраслевых моделей экономической динамики доказаны теоремы о магистрали, дающие качественное описание оптимальных траекторий. Наиболее общие результаты получены в [15,24], однако технические приемы, используемые при этом, весьма громоздки. Основные трудности заключаются в исследовании траекторий, задаваемых бесконечной последовательностью вида

$$Ax_t = Bx_{t-1}, \quad t = 1,2,\ldots$$

Ниже предлагается прием, позволяющий существенно упростить эту часть рассуждений, и получена теорема о магистрали для достаточно общей модели неймановского типа.

Пусть A, B – две $m \times n$ матрицы, $x_t \in R^n$, $t = 0,1,\ldots$ Рассмотрим экстремальную задачу

$$\max cx_T,$$
$$Ax_t \leqslant Bx_{t-1}, \ t = 1,2,\ldots,T, \tag{4.2.1}$$

где Bx_0 – заданный вектор начального запаса товаров. Отметим, что в (4.2.1) не выделяются условия неотрицательности переменных, в случае необходимости они включаются в основные ограничения.

Наложим на параметры задачи (4.2.1) ряд условий.

A1. Для некоторого числа $\bar{\lambda} > 0$ имеет место импликация

$$(A - \bar{\lambda} B)x \leqslant 0, \quad cx = 1 \Rightarrow x = \bar{x},$$

где $\bar{x}$ – некоторый вектор; луч $\alpha\bar{x}$, $\alpha \geqslant 0$, будем называть лучом Неймана.

A2. Выполняется неравенство

$$A\bar{x} \leqslant Bx_0.$$

Из A1 следует существование такого вектора $\bar{p} \geqslant 0$, что

$$\bar{p}(A - \bar{\lambda} B) \leqslant 0.$$

A3. Система условий

$$pA = c - \bar{p}B, \quad pB = 0, \quad p \geqslant 0,$$

имеет решение.

Заметим, что условия A2 и A3 эквивалентны требованиям, чтобы стационарные траектории вдоль лучей $\bar{x}$ и $\bar{p}$ были допустимы соответственно для задачи (4.2.1) и двойственной к ней.

Представим матрицы A и B в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

где $(A_1 - \bar\lambda B_1)\bar x = 0, \quad (A_2 - \bar\lambda B_2)\bar x < 0.$

А4. Если система $(A_1 - \lambda B_1)\tilde x = 0$ имеет нетривиальное решение $\tilde x$ и при этом $|\lambda| = \bar\lambda$, то $\lambda = \bar\lambda$.

Данное условие аналогично обычному требованию примитивности матрицы.

А5. $A_1\bar x \geqslant 0$, при этом если $(A_1\bar x)_i = 0$, то $(B_1)_i = 0$, где $(B_1)_i$ является i-й строкой матрицы B_1.

ТЕОРЕМА 4.2.I. При выполнении условий AI-А5 для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon)$, что для всех t, $T_1(\varepsilon) < t < T - T_2(\varepsilon)$, и для произвольной оптимальной траектории $\{x_t\}$ задачи (4.2.I) вектор x_t принадлежит конической ε-окрестности луча Неймана.

При доказательстве теоремы существенную роль играет

ЛЕММА 4.2.I. Бесконечная последовательность $\{x_t\}$, удовлетворяющая равенствам

$$A_1 x_t = B_1 x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{4.2.2}$$

однозначно определяется своим началом $B_1 x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ - формальный параметр. Тогда (4.2.2) эквивалентно

$$(A_1 - \lambda B_1) x(\lambda) = B_1 x_0, \tag{4.2.3}$$

где

$$x(\lambda) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 + \ldots \tag{4.2.4}$$

Из AI вытекает, что ранг λ-матрицы $A_1 - \lambda B_1$ равен n. Формулу (4.2.3) можно рассматривать как систему уравнений от n переменных над полем формальных степенных рядов от λ. Тогда утверждение леммы можно переформулировать следующим образом: если (4.2.3) имеет решение вида (4.2.4), то оно единственно. Последнее, однако, очевидно в силу замечания о ранге матрицы.

§4.3. Темпы роста дискретных моделей движения населения

В качестве приложения аппарата, развитого в рамках экономической динамики, рассмотрим замкнутые модели движения населения, определяемые системой конечно-разностных уравнений или неравенств с разложимой матрицей вида

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad x_{t+1} \leq Ax_t, \tag{4.3.1}$$

где A – неотрицательная или квазиотрицательная матрица, x_t – вектор структуры населения в момент времени $t = 0, 1, \ldots$

Для рассматриваемых моделей, более общих, чем модели, изученные в литературе по математической демографии, доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях роста населения района или всего объединения с наибольшим темпом роста. Кроме того, указан метод для нахождения всех темпов роста рассматриваемых моделей.

Для дальнейшего изложения удобно матрицу A представить в нормальном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & & A_g & & \\ A_{g+1,1} & & & A_{g+1} & \\ A_{s1} & & & & A_s \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

где $A_1, \ldots, A_s$ – неразложимые матрицы, а в каждом ряду $A_{f1}, A_{f2}, \ldots, A_{f,f-1}$, $(g+1 \leq f \leq s)$ по крайней мере одна из матриц не равна нулю.

Сформулируем определения темпов роста, которые будут играть в дальнейшем важную роль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.1. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста моделей (4.3.1), если найдется вектор $\bar{x} > 0$ такой, что $\alpha\bar{x} = A\bar{x}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.2. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста района i, $1 \leq i \leq s$, если вектор x^i в представлении собственного вектора $\bar{x}$ матрицы A, соответствующего числу α, является строго положительным в R^{n_i}, где n_i – размерность диагонального блока A в нормальном представлении (4.3.2) матрицы A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.3. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста моделей (4.3.I), если найдутся неотрицательные векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ такие, что $\alpha\bar{x} \leq A\bar{x}$, $\alpha\bar{p} \geq \bar{p}A$, $\bar{p}\bar{x} > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.4. Число $\alpha > 0$ назовем темпом роста района i, $1 \leq i \leq s$, моделей (4.3.I), если векторы x^i и p^i в представлении векторов $\bar{x}$ и $\bar{p}$, соответствующих темпу роста α, строго положительны в R^{n_i}.

Ниже приведены формулировки теорем о темпах роста указанных моделей.

ТЕОРЕМА 4.3.I. Любой темп роста моделей (4.3.I) в смысле определения 4.3.I или 4.3.3 принадлежит множеству $\{z_1, \dots, z_s\}$, где $z_i > 0$ – перроново число диагонального блока A_i в нормальном представлении (4.3.2) матрицы A.

ТЕОРЕМА 4.3.2. Число $z_i > 0$, $1 \leq i \leq s$, является темпом роста в смысле определения 4.3.2 тогда и только тогда, когда из района i отсутствует иммиграция в любой район

$$j \in \{j : z_j \geq z_i,\ i+1 \leq j \leq s\}.$$

ТЕОРЕМА 4.3.3. Число $z_i > 0$ является темпом роста района i в смысле определения 4.3.4 тогда и только тогда, когда в район i отсутствует эмиграция населения из любого района

$$f \in \{k : z_k \geq z_i,\ 1 \leq k \leq i-1\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ценность приведенных теорем состоит в следующем. Эти теоремы позволяют:

а) вопрос о нахождении темпов роста моделей с матрицами больших порядков сводить к нахождению темпов роста моделей с матрицами существенно меньшего порядка;

б) найти все темпы роста моделей (4.3.I) как в смысле определения 4.3.I, так и в смысле определения 4.3.3.

ТЕОРЕМА 4.3.4. Население района i, $0 \leq i \leq S$, $0 < z_i \leq z_A = \max\limits_{1 \leq j \leq s} z_j$ моделей (4.3.I) растет с наибольшим темпом роста z_A в смысле определения 4.3.I тогда и только тогда, когда найдется район с номером ℓ такой, что $z_\ell = z_A$; поток иммигрантов из этого района в район i отличен от нуля, а в любой район $f \in \{m : z_m = z_A, \ell+1 \le m < 3\}$ равен нулю.

ТЕОРЕМА 4.3.5. Население района i, $1 \le i \le s$, растет с наибольшим темпом роста z_A в смысле определения 4.3.3 тогда и только тогда, когда $z_i = z_A$ и в район i отсутствует поток иммигрантов из всех районов $f \in \{k + z_k = z_A, 1 \le k \le i-1\}$.

ТЕОРЕМА 4.3.6. Всё население, описываемое моделями (4.3.I) растет с наибольшим темпом роста в смысле определения 4.3.I тогда и только тогда, когда для любого $i \in \{1, \ldots, g\}$ числа $z_i = z_A$, а для любого $j \in \{g+1, \ldots, s\}$ имеет место неравенство $z_j < z_A$ $(z_A > 0)$.

ТЕОРЕМА 4.3.7. Всё население, описываемое моделями (4.3.I), растет с наибольшим темпом роста в смысле определения 4.3.3 тогда и только тогда, когда матрица A квазидиагональна, т.е. в представлении (4.3.2) $A_{ij} = 0$ при $i \ne j$, и выполняется равенство $z_1 = z_A$ $(z_A > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. АУМАН Р. Рынки с континуумом участников. – В кн.: Математическая экономика. – М.: Мир, 1974, с.64-78.
2. ВАСИЛЬЕВ В.А. Полиномиальные ядра кооперативных игр. – Оптимизация, 1978, вып. 21(38), с.5-29.
3. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об H-дележах кооперативных игр. – Оптимизация, 1980, вып. 24(41), с.18-32.
4. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном классе дележей в кооперативных играх. – Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 2, с.265-268.
5. ВАСИЛЬЕВ В.А. Игра Лукаса не имеет HM-решений в H-дележах. – Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.5-20.
6. ВАСИЛЬЕВ В.А. Об одном классе операторов в пространстве регулярных функций множества. – Оптимизация, 1982, вып. 28(45), с.102-111.
7. ВАСИЛЬЕВ В.А. Строение ядер вполне положительных регулярных игр. – V Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1980, с.43-45.
8. ВАТЕЛЬ И.А., ЕРЕШКО Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. – М.: Знание, 1973.
9. ВОРОБЬЕВ Н.Н. Современное состояние теории игр. – Успехи мат. наук, 1970, т. 25, вып. 2(152), с.81-140.
10. ГВОЗДЕВ В.А., ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. Математическое моделирование экономических взаимоотношений в межхозяйственных объединениях. – Вест. сельскохозяйственной науки, 1980, № 6.
11. ГВОЗДЕВ В.А., ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. Принципы планирования и управления в районных агропромышленных объединениях. – Вест. сельскохозяйственной науки, 1981, № 8.
12. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
13. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО Ф.А. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982.
14. ЕРЕШКО Ф.И., ЗЛОБИН А.С. Алгоритмы централизованного распределения ресурса между активными подсистемами. – Экономика и мат. методы, 1977, т. 13, вып. 4, с.703-713.

15. КОНОНОВ Д.А. Теорема о магистрали в сильной форме для модели Неймана с неотрицательной целевой функцией. - Вест. МГУ, 1979. Сер. вычислит. математика, вып. 15, с.26-33.
16. МАКАРОВ В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства. - В кн.: Современные проблемы математики/ Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1982, т. 19, с.23-58.
17. МАКАРОВ В.Л. О понятии договора в абстрактной экономике. - Оптимизация, 1980, вып. 24(41), с.5-17.
18. МАКАРОВ В.Л. Модели согласования экономических интересов/ Учебное пособие. - Новосибирск: Изд. НГУ, 1981.
19. МАКАРОВ В.Л. Существование экономического равновесия в условиях множественности видов денег и цен. - Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 5(111), с.1083-1091.
20. МАКАРОВ В.Л. Модели и компьютеры в экономике. - М.: Знание, 1979.
21. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
22. МАРАКУЛИН В.М. Неэффективность равновесия в гладких экономиках с функциями полезности общего вида. - Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.44-64.
23. МИРКИН Б.Г. Проблема группового выбора. - М.: Наука, 1974.
24. МОВШОВИЧ С.М. Магистральный рост в динамических народнохозяйственных моделях. - Экономика и мат. методы, 1972, т. 8, вып. 2, с.256-265.
25. МОИСЕЕВ Н.Н. Математика - управление - экономика. - М.: Знание, 1970.
26. МОИСЕЕВ Н.Н. Математика ставит эксперимент. - М.: Наука, 1979.
27. МОИСЕЕВ Н.Н. Иерархические структуры и теория игр. - Кибернетика, 1973, № 6, с.1-11.
28. НЕЙМАН Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука, 1970.
29. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.
30. ОРЛОВСКИЙ С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981.
31. ОУЭН Г. Теория игр. - М.: Мир, 1971.

32. ПОЛТЕРОВИЧ В.М. Рационирование ресурсов и вторичное равновесие. – Экономика и мат. методы, I982, т. I8, вып. 4, с.684-698.
33. ПОЛТЕРОВИЧ В.М., СПИВАК В.А. Отображения с валовой заменимостью в теории экономического равновесия. – В кн.: Современные проблемы математики / Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., I982, т. I9, с.III-I54.
34. ПОЛТЕРОВИЧ В.М. Равновесие и оптимум. - Экономика и мат. методы, I973, т. 9, вып. 5, с.835-845.
35. РОЗЕНМЮЛЛЕР И. Кооперативные игры и рынки. – М.: Мир, I974.
36. РУБИНОВ А.М. Экономическая динамика. – В кн.: Современные проблемы математики / Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР – М., I982, т. I9, с. 59-II0.
37. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. – Л.: Наука, I980.
38. РУБИНОВ А.М. Об одном подходе к исследованию макромоделей экономической динамики. – Оптимизация, I982, вып. 28(45), с.80-I0I.
39. Современное состояние теории исследования операций. – М.: Наука, I979.
40. ФЕДОРОВ В.В. Численные методы максимина. – М.: Наука, I979.
41. ARROW K. Social choice and individual values. – New Haven: Yale Univercity Press, 1963.
42. ARROW K.J., HAHN F.H. General Competitive analysis. – San Francisco: Holden Day, 1971.
43. AUMAN R. Values of market with continuum of traders. – Econometrica, 1975, v.43, N4, p.611-646.
44. DUBEY P. Finitness and ineffeciency of Nash equilibria. – Cowles Foundation Discussion Paper, 1978, N588.
45. DUBEY P. Nash equilibria of market games: finitness and inefficiency. – J.Economic Theory, 1980, N2, p.363-376.
46. DUBEY P., WEBER J.K. Probabilistic values for games. – Cowles Foundation Discussion Paper, 1977, N471.
47. GREEN J., LAFFONT J.J. Incentives in public decision-making.– Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland Publishing company, 1979.
48. GROVES T. Efficient collective choice with compensation is

possible. - Rev. Econ. Studies, 1979, N46, p.227-242.
49. GROVES T., LEDYARD F. Optimal allocation of public goods: a solution to the "Free Rider" problem. - Econometrica,1977, v.45, p.783-809.
50. HARSANYI J.A. A barganing model for the cooperative n-person game.- Ann. Math. Studies, 1954, p.325-329.
51. KALAI G., MASCHLER M., OWEN G. Asymptotic stability and other properties of traectories and transfer sequence leading to the Barganing sets. - Intern. J. Game Theory, 1975, N4, p.193-213.
52. LUKAS W.F. The proff that a game may not have a solution. - Trans.Amer. Math. Soc., 1964, v.137, p.219-229.
53. MARSHAK J., RADNER R. Economic theory of teams. - New Haven: Yale University Press, 1972.
54. MAS-COLLEL A. Competitive and value allocation of traders.- J. Economic Theory, 1975, v.43, N4, p.611-646.
55. MC.KENZIE L.W. Turnpike theorem for a generalized Leontief model - Econometrica, 1963, v.31, N1, p.165-180.
56. ROTH A.E. The Shapley value as a von Neuman - Morgenstern utility. - Econometrica, 1977, v.45, p.675-664.
57. ROTH A.E. Subsolutions and the supercore of cooperative games. - Math.Oper. Res.,1976, v.1,p.43-49.
58. RUYS P.H.M. Public goods and decentralization. - The Notherlands: Tilburg University Press, 1974.
59. SHENOY F.A. Dynamic solution concept of abstract games.- J. Optimizat. Theory and Appl., 1980, v.32, N2, p.151-169.
60. STEARNS R.F. Convergent transfer scemes for n-person games. - Trans. Amer. Math.Soc., 1968, v.168, v.134, p.449-459.
61. TSUKUI J. Turnpike theorem in a generalized dynamic input - output system. - Econometrica, 1966, v.34, N2, p.336-407.

Поступила в ред.-изд. отдел
I.I2.1982 г.