Выпуск 30(47) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Численные методы

УДК 512.25

СХЕМА ПОВТОРЕНИЯ ДЛЯ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ, ОСНОВАННАЯ НА АЛГОРИТМЕ ХЕЛЛЕРМАНА - РАРИКА

А.И.Жолудев

Эффективность мультипликативного алгоритма метода последовательного улучшения плана существенно зависит от качества процедуры повторения. Эта процедура должна по возможности ми-минимизировать заполненность получаемого мультипликативного представления обратной матрицы при приемлемых затратах машинного времени и оперативной памяти ЭВМ.

В этом направлении представляется перспективным учитывать в процедурах повторения специфику строения базисных матриц. В [I] был построен алгоритм мультипликативного обращения матриц блочной структуры общего вида. Данный алгоритм предусматривает поблочный просмотр базисной матрицы на всю глубину вложения блоков и выбирает главные элементы только в пределах рассматриваемого блока, что позволяет сохранить нули вне строк данного блока и связующих строк объемлющих блоков.

В данной статье строится алгоритм повторения для базисных матриц, имеющих блочную структуру общего вида, использующий идеи алгоритма Хеллермана - Рарика о выделении спайков, т.е. столбцов, которым "разрешается" преобразовываться строящимися мультипликаторами. В проводившихся вычислительных экспериментах предлагаемый алгоритм сравнивался с алгоритмом Хеллермана - Рарика и показал обнадеживающие результаты.

Здесь будет использоваться та же терминология, что и в [I].

§I. Базисные матрицы разветвленной блочной структуры

Пусть имеется некоторая матрица $A[M,N]$ блочной структуры, т.е. матрица, у которой множества индексов строк и столбцов M и N можно разбить на такие непересекающиеся подмножества M_0, $M_1, \ldots, M_p$ и $N_0, N_1, \ldots, N_p$, $p>1$, соответственно, что все ненулевые элементы матрицы $A[M,N]$ сосредоточены в подматрицах:

$$A[M_0,N],\ A[M,N_0],\ A[M_1,N_1], \ldots, A[M_p,N_p].$$

Подматрицы $A[M_s,N_s]$, $s=1,\ldots,p$, называют блоками, непосредственно подчиненными $A[M,N]$, строки подматрицы $A[M_0,N]$ называют связующими строками, а столбцы $A[M,N_0]$ – связующими столбцами матрицы $A[M,N]$.

Любой из блоков $A[M_s,N_s]$, $s=1,\ldots,p$, сам может иметь блочную структуру, и глубина вложения блоков может быть любой конечной.

Строки и столбцы любого блока, не лежащие в полосах подчиненных ему блоков, называют связующими строками и столбцами этого блока.

В окончательных блоках, т.е. в тех блоках, которые не имеют подчиненных, все строки и столбцы можно считать связующими. Иерархию блоков матриц такого типа отображают в виде дерева [2], каждая вершина которого взаимно-однозначно соответствует некоторому блоку и соединена дугой с вершиной, соответствующей наименьшему объемлющему блоку.

Введем сквозную нумерацию для вершин такого дерева и соответственно для блоков матрицы $A[M,N]$ всех уровней, несколько отличную от нумерации, использованной в [I]. Корню дерева и самой матрице $A[M,N]$ присвоим номер 0. Затем среди всех непосредственно подчиненных корню вершин найдем ту, которой соответствует блок, дающий наименьшее значение величине $R_s = (|N_s|-|M_s|)/|M_s|$, где $|M_s|$, $|N_s|$ – мощности множеств индексов строк и столбцов блока $A[M_s,N_s]$. В дальнейшем очередной номер присваивается вершине, выбираемой по следующему правилу. Среди всех занумерованных вершин находим вершину с максимальным номером, имеющую незанумерованные подчиненные вершины. Среди этих вершин выбираем ту, для которой величина R_s наименьшая, и присваиваем ей очередной номер. Моти-

вировка такой нумерации будет приведена ниже.

Номера блоков, полученные таким образом, будем указывать верхним индексом у соответствующих множеств строк и столбцов. Отметим некоторые свойства полученной нумерации.

I) Сама матрица $A[M,N]$ имеет номер 0, т.е. $A[M^0,N^0]= =A[M,N]$.

2) Если путь из вершины с номером j в корень проходит через вершину с номером i, т.е. блок $A[M^j,N^j]$ лежит внутри блока $A[M^i,N^i]$, то $j>i$.

3) Если вершина i не является концевой, одна из непосредственно подчиненных ей вершин имеет номер $i+1$. Таким образом, если блок $A[M^i,N^i]$ не окончательный, то блок $A[M^{i+1},N^{i+1}]$ непосредственно подчинен ему.

4) Если вершины с номерами i и j непосредственно подчинены одной и той же вершине с номером k, то

а) $i>j$, лишь если $(|N^i|-|M^i|)/|M^i|\leq(|N^j|-|M^j|)/|M^j|$;

б) если $i<j$, то любая вершина, путь из которой в корень проходит через вершину i, имеет номер, меньший j, т.е. если блок $A[M^s,N^s]$ лежит внутри блока $A[M^i,N^i]$, то $s>j$.

§2. Алгоритм обращения матриц простой блочной структуры

Излагаемый ниже алгоритм характеризуется следующими чертами.

I) Поблочный просмотр матрицы на всю глубину вложения блоков по возрастанию их номеров, полученных согласно принципу нумерации, приведенному в предыдущем параграфе.

2) Использование следующих свойств мультипликативного представления: если T_s – некоторый мультипликатор с s-м главным столбцом, равным $(t_1,\dots,t_s,\dots,t_m)$, $t_s\neq0$, а g и $\bar{g}$ – некоторые m-векторы такие, что $\bar{g}=T_s g$, то

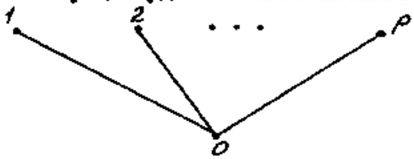
а) если $t_j=0$, то $\bar{g}_j=g_j$;

б) если $t_s=0$, то $\bar{g}=g$.

3) Учет заполненности строк и столбцов матрицы при выборе ведущих элементов на основе идей Хеллермана – Рарика [3].

Для простоты сначала проследим основные идеи алгоритма на матрице с одноуровневым блочным строением. Пусть имеется квадратная и неособенная матрица $A[M,N]$ блочной структуры, имеющая p внутренних блоков, и пусть все эти блоки окончатель-

ные. Такой матрице будет соответствовать граф вида



где номера вершин первого яруса расставлены в порядке возрастания величин $R_i = (|N^i| - |M^i|)/|M^i|$, $i = 1, 2, \dots, \rho$.

В процессе работы алгоритма будут использоваться изменяющиеся индексные множества $\bar{M}$ и $\bar{N}$, для которых сначала примем $\bar{M} = M$ и $\bar{N} = N$. Положим

$$N_{св} = N \setminus \bigcup_{1}^{\rho} N^k, \quad M_{св} = M \setminus \bigcup_{1}^{\rho} M^k, \quad N_{сп} = \emptyset.$$

Теперь в каждой строке матрицы $A[M, N]$ посчитаем количество ненулевых элементов z_i, $i \in M$.

Для рассматриваемого простейшего случая работу алгоритма можно описать в форме двух этапов.

ЭТАП I.

ШАГ I. Если $N_{св} = \emptyset$, переходим на этап 2.

ШАГ 2. Находим $z_{i_0} = \min\limits_{i \in \bar{M}} z_i$.

ШАГ 3. Если $z_{i_0} = 1$, идем на шаг 4, если $z_{i_0} \geq 2$ – на шаг 5, и если $z_{i_0} = 0$ – на шаг 6.

ШАГ 4. Поскольку $z_{i_0} = 1$, то в строке $A[i_0, N]$ содержится только один ненулевой элемент $A[i_0, s], s \in \bar{N}$; найдем его и из столбца $A[M, s]$ построим мультипликатор T_{i_0} с i_0-й ведущей строкой. Вычтем по единице из величин z_i для строк, в которых столбец $A[M, s]$ содержит ненулевые компоненты, положим

$$\bar{N} = \bar{N} \setminus s, \quad N_{св} = N_{св} \setminus s, \quad \bar{M} = \bar{M} \setminus i_0, \quad M_{св} = M_{св} \setminus i_0$$

и вернемся на шаг I.

Поскольку теперь строка $A[i_0, \bar{N}]$ не содержит ненулевых элементов, мультипликатор T_{i_0}, согласно свойству 2б), не будет влиять на столбцы $A[\bar{M}, \bar{N}]$.

Шаг 5. Среди связующих столбцов найдем столбец $A[M, s]$, $s \in N_{св}$, содержащий в строках с $z_i = z_{i_0}$, $i \in \bar{M}$, наибольшее число ненулевых элементов, и заносим его в список спайков, полагая $N_{сп} = N_{сп} \cup s$, $N_{св} = N_{св} \setminus s$ и устраняя его влияние на величины z_i. Если же таких столбцов несколько, то из них следует

выбрать наиболее заполненный. Возвращаемся на шаг I.

В дальнейшем полученный спайк будет умножаться на строящиеся мультипликаторы до тех пор, пока он сам не будет использован для построения мультипликатора.

ШАГ 6. Ищем спайк, содержащий в i_0 -й строке ненулевой коэффициент. В силу неособенности матрицы $A[M,N]$ такой спайк всегда найдется. Строим из него мультипликатор T_{i_0} с i_0 -й ведущей строкой, исключаем его из списка спайков $N_{сп}$, полагаем $\bar{M}=\bar{M}\setminus i_0$, $M_{св}=M_{св}\setminus i_0$ и возвращаемся на шаг I. Заметим, что новый мультипликатор T_{i_0} не будет влиять на столбцы $A[M,\bar{N}]$, так как i_0-я строка не содержит ненулевых компонент.

На этапе I устраняется влияние связующих столбцов на величины z_i. Этого же можно было бы добиться, заранее занеся все связующие столбцы в список спайков. Однако проведение этапа I в задачах с разреженными матрицами часто позволяет несколько уменьшить заполненность мультипликаторов, построенных из связующих столбцов.

ЭТАП 2. На этапе 2 просматриваются все внутренние блоки в порядке возрастания их номеров и для каждого "проигрывается" алгоритм Хеллермана – Рарика.

ШАГ I. Полагаем $k=1$.

ШАГ 2. Полагаем $\bar{M}^k=M^k\cap\bar{M}$, $\bar{N}^k=N^k\cap\bar{N}$, $N^k_{сп}=\varnothing$.

ШАГ 3. Находим $z_{i_0}=\min\limits_{i\in\bar{M}^k} z_i$.

ШАГ 4. Если $\bar{M}^k=\varnothing$ или $z_{i_0}\geqslant 1$, переходим на шаг 6.

ШАГ 5. Ищем среди спайков k -го блока такой спайк, что после умножения на текущую цепочку мультипликаторов он содержит в i_0 -й строке ненулевой элемент. В том случае, когда во множестве $N^k_{сп}$ подходящего спайка не находится, просматриваем список спайков $N_{сп}$. Ввиду неособенности матрицы подходящий спайк обязательно найдется либо в блоке, либо в связующей части. Строим из него мультипликатор, исключаем его из соответствующего списка спайков, полагаем $\bar{M}^k=\bar{M}^k\setminus i_0$ и идем на шаг 3.

Заметим, что если выбранный спайк принадлежал связующей части, то построенный из него мультипликатор не будет преобразовывать спайки k -го блока.

ШАГ 6. Просматриваем величины z_i для $i\in M_{св}$. Если

встретится $z_s = 0$, $s \in M_{св}$, ищем подходящий спайк, последовательно просматривая списки $N^k_{сп}, N^{k-1}_{сп}, \dots, N^1_{сп}, N_{сп}$. Из найденного спайка строим мультипликатор с s-й ведущей строкой, исключаем его из соответствующего списка спайков и полагаем $M_{св} = M_{св} \setminus s$.

Заметим, что если найденный спайк принадлежал ℓ-му блоку, то новый мультипликатор, в силу свойства 2б), не будет преобразовывать спайков $\ell+1, \ell+2, \dots$ k-го блоков.

Просмотрев все множество $M_{св}$, идем на шаг 7.

ШАГ 7. Если $\bar{M}^k = \emptyset$, то идем на шаг II.

ШАГ 8. Если $z_{i_o} = 1$, то идем на шаг 9, иначе на шаг I0.

ШАГ 9. Ищем в k-м блоке столбец, содержащий ненулевой коэффициент в i_o-й строке. Пусть это будет столбец $A[M,s]$, $s \in \bar{N}^k$. Строим из него мультипликатор с i_o-й ведущей строкой, полагаем $\bar{N}^k = \bar{N}^k \setminus s$, $\bar{M}^k = \bar{M}^k \setminus i_o$, убираем влияние столбца $A[M,s]$ на величины z_i, $i \in \bar{M}$, и возвращаемся на шаг 3.

Полученный мультипликатор будет преобразовывать только спайки из списков $N^k_{сп}$ и $N_{сп}$.

ШАГ I0. Находим в k-м блоке столбец $A[M,s], s \in \bar{N}^k$, содержащий наибольшее число ненулевых элементов в тех строках, для которых $z_i = z_{i_o}, i \in \bar{M}^k$. Полагаем $\bar{N}^k = \bar{N}^k \setminus s$, $N^k_{сп} = N^k_{сп} \cup s$, убираем влияние столбца $A[M,s]$ на величины z_i и возвращаемся на шаг 3.

ШАГ II. Полагаем $k = k+1$, если $k \leq p$, переходим на шаг 2.

ШАГ I2. Заканчиваем процесс.

После просмотра всех блоков будет получено мультипликативное представление матрицы $A^{-1}[N,M]$ с точностью до перестановки столбцов матрицы $A[M,N]$. Это представление обладает следующими свойствами.

I. Мультипликаторы, построенные из столбцов k-го блока, могут иметь ведущие позиции только во множествах M^k и $M_{св}$.

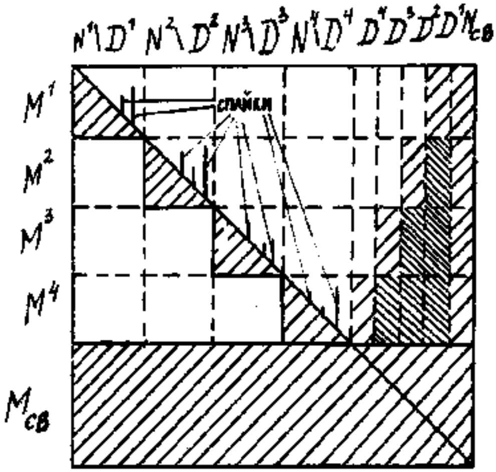
2. Мультипликаторы, построенные из столбцов k-го блока с ведущими позициями из множества M^k , не зависят от мультипликаторов других блоков и связующей части и поэтому, в силу свойства 2а), сохранят нули вне строк k-го блока и связующих строк.

3. Мультипликаторы, построенные из столбцов k-го блока с ведущими позициями из множества $M_{св}$, могут зависеть толь-

ко от мультипликаторов $k+1, k+2, \dots$ p-го блоков, т.е. новые элементы в них могут возникнуть только в полосах $k, k+1, \dots$ p-го блоков и связующей части. Упорядоченность блоков по возрастанию величины $R_i = (|N^i| - |M^i|)/|M^i|$ соответствует наименьшей площади фигуры, в которой может происходить заполнение неединичных столбцов мультипликаторов ненулевыми элементами.

4. Мультипликаторы, построенные из связующих столбцов, не влияют на мультипликаторы блоков.

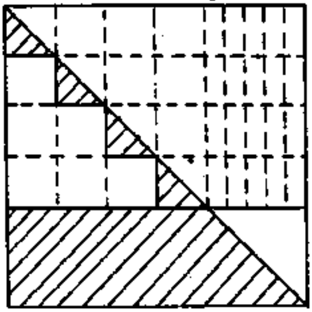
Структуру неединичных столбцов полученных мультипликаторов можно упрощенно изобразить в виде схемы



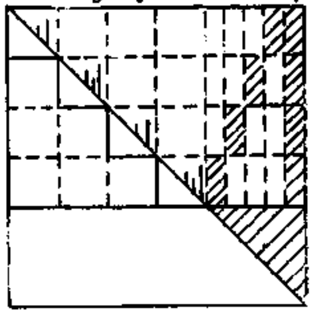
Здесь D^k – множество спайков k-го блока, из которых построены мультипликаторы с ведущими позициями из множества $M_{св}$. Плотной штриховкой выделена фигура, в которой происходит заполнение и которая не укладывается в блоки и связующие части.

В том случае, когда для представления обратной матрицы используется треугольная мультипликативная схема (LU-разложение), можно использовать тот же самый алгоритм, имея в виду, что спайки следует умножать только на L-мультипликаторы, а нетривиальные U-мультипликаторы возникают только из спайков. Структуру L- и U-мультипликаторов в этом случае можно изобразить в виде схем

L-мультипликаторы



U-мультипликаторы



При использовании треугольной мультипликативной схемы новые элементы вне блоков и связующих частей не возникают, поэтому порядок просмотра блоков, для которых $R_i > 0$, не играет здесь столь важной роли, как в традиционной мультипликативной схеме.

§3. Общий случай блочности

Перейдем теперь к общему случаю блочности.

Пусть имеется квадратная, неособенная матрица $A[M,N]$, иерархия блоков которой отображена в виде пронумерованного дерева, состоящего из q вершин. Для единообразия все столбцы и строки окончательных блоков будем считать связующими. При таком соглашении оба этапа алгоритма, рассмотренные в предыдущем параграфе, укладываются в нижеследующий алгоритм.

ШАГ 0. Посчитаем в каждой строке матрицы $A[M,N]$ количество ненулевых элементов z_i, $i \in M$. Положим $k=0$, $\bar N^0 = N$, $\bar M^0 = M$.

ШАГ 1. Полагаем $\bar M^k = M^k \cap \bar M^0$, $\bar N^k = N^k \cap \bar N^0$, $N^k_{\text{сп}} = \varnothing$, $M^k_{\text{св}} = \bar M^k \setminus \bigcup\limits_{i>k} M^i$, $N^k_{\text{св}} = \bar N^k \setminus \bigcup\limits_{i>k} N^i$.

ШАГ 2. Находим $z_{i_0} = \min\limits_{i \in \bar M^k} z_i$.

ШАГ 3. Если $z_{i_0} = 0$, переходим на шаг 4, иначе на шаг 5.

ШАГ 4. Ищем во множестве $N^k_{\text{сп}}$ такой спайк, который после умножения на текущую цепочку мультипликаторов имеет в i_0-й строке ненулевой элемент. Если во множестве $N^k_{\text{сп}}$ такого спайка нет, просматриваем спайки блоков, объемлющих k-й, в порядке убывания их номеров. Виду неособенности матрицы $A[M,N]$

подходящий спайк обязательно найдется. Строим из найденного спайка мультипликатор с i_o-й ведущей строкой, исключаем его из соответствующего списка спайков, полагаем $\bar{M}^k = \bar{M}^k \setminus i_o$ и возвращаемся на шаг 2.

ШАГ 5. Просматриваем множества связующих строк блоков, объемлющих k-й: $M_{cв}^{i_1}, M_{cв}^{i_2}, \ldots, M_{cв}^{o}$ в порядке убывания их номеров. Если встретится $z_i = 0$, $i \in M_{cв}^{s}$, ищем подходящий спайк с i-й ненулевой компонентой, поочередно просматривая списки спайков $N_{cп}^{k}, N_{cп}^{k-1}, \ldots, N_{cп}^{s}$, а затем списки спайков тех блоков, которые объемлют s-й, в порядке убывания их номеров. Из найденного спайка строим мультипликатор с i-й главной строкой, удаляем его из соответствующего списка и полагаем $M_{cв}^{s} = M_{cв}^{s} \setminus i$. Просмотрев таким образом все множества $M_{cв}^{i_1}, M_{cв}^{i_2}, \ldots, M_{cв}^{o}$, переходим на шаг 6.

ШАГ 6. Если $z_{i_o} = 1$, идем на шаг 7, иначе на шаг 8.

ШАГ 7. Ищем в k-м блоке такой столбец $A[M,s]$, $s \in \bar{N}^k$, что $A[i_o, s] \neq 0$. Строим из него очередной мультипликатор с i_o-й главной строкой. Полагаем $\bar{N}^k = \bar{N}^k \setminus s$, $N_{cв}^k = N_{cв}^k \setminus s$, $\bar{M}^k = \bar{M}^k \setminus i_o$, убираем влияние столбца $A[M,s]$ на величины z_i, идем на шаг 2.

ШАГ 8. Если $N_{cв}^k = \varnothing$, то идем на шаг 10.

ШАГ 9. Среди связующих столбцов k-го блока находим столбец $A[M,s]$, $s \in N_{cв}^k$, имеющий наибольшее число ненулевых элементов в строках, для которых $z_i = z_{i_o}$, $i \in \bar{M}^k$. Полагаем $\bar{N}^k = \bar{N}^k \setminus s$, $N_{cв}^k = N_{cв}^k \setminus s$, $N_{cп}^k = N_{cп}^k \cup s$, убираем влияние s-го столбца на величины z_i и возвращаемся на шаг 2.

ШАГ 10. Полагаем $k = k+1$, если $k < q$, идем на шаг 1.

ШАГ 11. Заканчиваем процесс.

В данном алгоритме блоки пересматриваются в порядке возрастания их номеров, и, следовательно, согласно свойствам нумерации, пока не будет просмотрена до конца очередная ветвь дерева, задающего иерархию блоков, соседние ветви рассматриваться не будут.

Изложенный алгоритм применим и для матриц, не имеющих блочной структуры, если считать, что они состоят из одного только нулевого блока. Тогда этот алгоритм эквивалентен алгоритму, приведенному в [4].

§4. Вопросы численной реализации

Численная реализация построенного алгоритма по сравнению с алгоритмом Хеллермана – Рарика, требует введения дополнительного массива для хранения информации об иерархии блоков, длина которого равна общему числу блоков всех уровней, которое, вообще говоря, значительно меньше числа строк матрицы. Информацию о принадлежности строк и столбцов матрицы тем или иным блокам можно упаковывать с другими рабочими массивами. Причем достаточно указать для каждой строки и каждого столбца лишь номер наименьшего блока, которому они принадлежат, так как их принадлежность объемлющим блокам устанавливается из простейшего анализа иерархии.

С построенным алгоритмом была проведена серия вычислительных экспериментов на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием транслятора языка АЛГОЛ-ГДР. Ниже приводится таблица полученных результатов.

№ задачи	Схема хранения	Порядок матрицы	Исходное заполнение	Число блоков	Число новых элементов	Время (сек.)
I	традиционная	II3	6I3 эл-в 4,8%	29	$\frac{217}{379}=0,72$	$\frac{3,7}{6,8}=0,54$
2	треугольная	II3	6I3 эл-в 4,8%	29	$\frac{210}{282}=0,74$	$\frac{3,5}{6,3}=0,56$
3	треугольная	542	4I27 эл-в I,4%	4I	$\frac{476}{691}=0,69$	$\frac{19}{44}=0,43$

В двух последних столбцах таблицы числители дробей соответствуют результатам, полученным при использовании изложенного блочного алгоритма, а знаменатели – алгоритма Хеллермана - Рарика.

Просчитанные примеры были построены с помощью генератора случайных чисел. Ненулевые элементы матрицы и места их расположения генерировались в рамках заранее заданной структуры так, чтобы получаемая матрица была неособенной. В каждом слу-

чае было решено по 10 задач и в таблице приведены усредненные результаты. Примеры 1 и 2 полностью совпадают, но в них использовались разные мультипликативные схемы.

Уменьшение времени работы блочного алгоритма по сравнению с алгоритмом Хеллермана – Рарика достигается за счет следующих свойств.

1. Уменьшается заполненность мультипликаторов.

2. Если алгоритм Хеллермана – Рарика на каждом шаге обращения требует просмотра всей матрицы, то блочный алгоритм – только рассматриваемого блока и связующих частей объемлющих блоков.

3. Мультипликаторы, преобразующие спайки какого-либо блока, располагаются в массиве, хранящем обратную матрицу, более компактными группами, чем при использовании алгоритма Хеллермана – Рарика. Поэтому при хранении обратной матрицы во внешней памяти для умножения данного столбца на мультипликаторы нужно прочитывать меньшее число зон МД или МБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЖОЛУДЕВ А.И. Процедура мультипликативного обращения матриц блочной структуры общего вида. – Оптимизация, 1980, вып.24(41), с.133-144.
2. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, 1977.
3.
4. МАЛКОВ У.Х. Обзор путей повышения эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода. – Математические методы решения экономических задач, 1977, вып. 7, с.30-31.

Поступила в ред.-изд. отдел
06.05.1981 г.