Выпуск 30(47) ОПТИМИЗАЦИЯ 1982 г.
Численные методы

УДК 518

УПРАВЛЕНИЕ ТОЧНОСТЬЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ШАГА МЕТОДА НАГРУЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Н.И.Калашникова

Метод нагруженного функционала относится к группе методов, в которых внешний шаг не может быть выполнен, как правило, абсолютно точно. Для его выполнения приходится, в свою очередь, привлекать тот или иной численный метод. При этом возникает вопрос, с какой точностью выполнять очередной шаг. Рассмотренные ранее схемы [1,2] предусматривают априорный выбор последовательности $\{\varepsilon_k\}$ точностей выполнения шагов. В настоящей работе рассматривается вопрос об оптимизации (в определенном ниже смысле) последовательности $\{\varepsilon_k\}$, причем получается процесс, в котором возникает обратная связь между ε_n и достигнутой к данному шагу точностью внешнего процесса.

Пусть численный метод сводится к итерационному процессу вида

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

обладающему скоростью сходимости порядка $1+\alpha$, $\alpha \in (0,1]$. Если предположить, что задача нахождения x_{n+1} по известному x_n решается неточно, то формулу (1) следует заменить на формулу

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, \gamma_n), \quad n = 0,1,2,\dots,$$

где γ_n - некоторый управляющий параметр.

Предположим, что достигнутая точность l_{n+1}, соответствующая приближению $x_{n+1} = \Phi(x_n, \gamma_n)$, зависит от точности

предыдущего шага η_n и управляющего параметра γ_n. Переходя к оценкам, можем считать, что

$$\eta_{n+1} \le \varphi(\eta_n, \gamma_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Получаем двухуровневый процесс, в котором верхний уровень – это сам итерационный процесс $x_{n+1} = \Phi(x_n, \gamma_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а нижний уровень – задача оптимизации для определения управляющего параметра γ_n. В [3] задача нижнего уровня ставилась следующим образом:

$$\begin{cases} \min\limits_{\{\gamma_k\}_{k=0}^{n-1}} \left\{ \max\limits_{\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}} \sum\limits_{k=0}^{n-1} c(\gamma_k, \eta_k), n \ge 1, \gamma_k \ge 0, k = 0, \ldots, n-1 \right\}, \\ \eta_{k+1} \le \varphi(\eta_k, \gamma_k), \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ \eta_n \le \varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

где $c(\gamma_k, \eta_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ – некоторая функция трудоемкости шага. В этой работе рассматривается вопрос об оптимальном сочетании точности решения внутренней задачи с достигнутой к данному моменту точностью во внешнем процессе. Задача решается при следующих естественных предположениях относительно функции трудоемкости $c(\gamma_n, \eta_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

1) $c(\gamma_n, \eta_n) = c_0(\gamma_n / \eta_n)$,

2) $c_0(q_1 \cdot q_2) = c_0(q_1) + c_0(q_2)$.

Эти условия единственным образом (с точностью до постоянного множителя) определяют вид функции $c(\gamma_n, \eta_n)$, именно,

$$c(\gamma_n, \eta_n) = -K \ln(\gamma_n / \eta_n),$$

где $K = const > 0$. В [3] рассматривается два варианта задачи управления процессом:

$$\eta_{n+1} = \eta_n^{1+\alpha} + \gamma_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\eta_{n+1} = \sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)} + \gamma_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Для удобства дальнейших рассуждений вводится параметр Δ_n, который связан с γ_n формулой $\gamma_n = \Delta_n \eta_n^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ При помощи критерия динамического программирования получается связь между оптимальными значениями Δ_k и Δ_{k+1}, и задача (2) переписывается в виде

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\eta_0}{\varepsilon}\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{1+(1+\alpha)^k\Delta_0}{(1+\alpha)^k\Delta_0}\right)-\min_{\Delta_0,\,n}, \\ \eta_{k+1}=(1+(1+\alpha)^k\Delta_0)\,\eta_k^{1+\alpha}, \quad k=0,1,\dots,n-1, \\ \eta_n=\varepsilon \end{cases} \tag{5}$$

если $\eta_{n+1}=\eta_n^{1+\alpha}+\gamma_n$, и

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\eta_0}{\varepsilon}\prod_{k=0}^{n-1}\sqrt{\dfrac{1+(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0^2}{(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0^2}}\right)-\min_{\Delta_0,\,n}, \\ \eta_{k+1}=\sqrt{(1+(1+\alpha)^k\cdot\Delta_0^2)}\cdot\eta_k^{1+\alpha}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1, \\ \eta_n\le\varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

если $\eta_{n+1}=\sqrt{\eta_n^{2(1+\alpha)}+\gamma_n^2}$. Если предположить, что число шагов n в задачах (5) и (6) достаточно велико, то условием целочисленности n можно пренебречь и обобщить задачи (5) и (6) на случай произвольного вещественного n. Для этого вводятся бесконечные произведения

$$\rho(x)=\prod_{i=0}^{\infty}(1+(1+\alpha)^i x)^{1/(1+\alpha)^{i+1}\cdot x} \quad \text{и} \quad \tilde\rho(x)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1+(1+\alpha)^i\cdot x}{(1+\alpha)^i\cdot x}$$

и обобщенные задачи для (5) и (6) соответственно формулируются следующим образом:

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\eta_0}{\varepsilon}\,\dfrac{\tilde\rho(\Delta_0)}{\tilde\rho((1+\alpha)^k\Delta_0)}\right)-\min_{\Delta_0>0,\,k>0}, \\ \left[\eta_0^{1/\Delta_0}\sqrt{\dfrac{\rho(\Delta_0^2)}{\rho((1+\alpha)^k\cdot\Delta_0^2)}}\right]^{(1+\alpha)^k\Delta_0^2}=\varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{l_o}{\varepsilon}\sqrt{\dfrac{\tilde{\rho}(\Delta_o^2)}{\tilde{\rho}((1+\alpha)^k\Delta_o^2)}}\right) \to \min\limits_{\Delta_o>0,\, k>0}, \\ \left[\eta_o^{1/\Delta_o}\sqrt{\dfrac{\rho(\Delta_o^2)}{\rho((1+\alpha)^k\Delta_o^2}}\right]^{(1+\alpha)^k\cdot\Delta_o^2} = \varepsilon \end{cases} \tag{8}$$

Обобщенная задача (7) сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \ln\eta_o + \Delta_o \ln\rho(\Delta_o) = 0, \\ \ln\varepsilon + (1+\alpha)^k\Delta_o \ln((1+\alpha)^k\Delta_o) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

а задача (8) – к решению системы

$$\begin{cases} 2\ln\eta_o + \Delta_o^2\ln\rho(\Delta_o^2) = 0, \\ 2\ln\varepsilon + (1+\alpha)^k\Delta_o^2\ln((1+\alpha)^k\Delta_o^2) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Системы уравнений (9) и (10) имеют единственное решение, причем параметр Δ_o, а вместе с ним и управляющий параметр $\gamma_o = \Delta_o\cdot\eta_o^{1+\alpha}$, зависит только от величины начальной погрешности η_o и не зависит от того, какой точности ε мы хотим достичь.

Описанный в [3] подход оптимизации двухуровневого процесса применим к задаче выпуклого программирования

$$\min\{f(x);\ \varphi_i(x)\le 0\ (i\in\overline{1,m}),\ x\in R^n\}, \tag{11}$$

которую будем решать методом нагруженного функционала. Метод нагруженного функционала [4] состоит в следующем.

Допустим, что задача (11) имеет решение, которое обозначим через x_*, и пусть известна оценка $d_1\le f(x_*)$. Поиск решения x_* методом нагруженного функционала состоит в построении последовательностей $\{d_k\}$ и $\{x_k\}$ по рекуррентным формулам

$$\Psi(x_k, d_k) = \min_{x\in R^n} \Psi(x, d_k), \quad k = 1,2,3,\dots, \tag{12}$$

$$d_{k+1} = d_k + \frac{\Psi(x_k, d_k)}{(f(x_k) - d_k)}, \quad k = 1,2,3,\dots, \tag{13}$$

причем итерации обрываются на i-м шаге, если $\Psi(x_i, d_i)=0$.
В формулах (I2),(I3)

$$\Psi(x,d)=(max\{0, f(x)-d\})^2+\sum_{i=1}^{m}(max\{0, \varphi_i(x)\})^2=$$

$$=[f(x)-d]_+^2+\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x)]_+^2 . \qquad (I4)$$

В.Ю.Лебедев [I,4] показал, что

$$\lim_{k\to\infty} d_k=f(x_*) \text{ и } \lim_{k\to\infty} x_k=x_*, \qquad (I5)$$

причем сходимость сверхлинейная. Мы при некоторых дополнительных условиях о невырожденности этого метода покажем квадратичную скорость сходимости этого метода.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

а) $f(x)$, $\varphi_i(x)(i=\overline{1,m})$ в задаче (II) выпуклы и трижды непрерывно дифференцируемы;

б) векторы $\nabla\varphi_i(x_*)$, $i\in\mathcal{J}=\{j:\varphi_j(x_*)=0\}$, линейно-независимы;

в) выполнено условие двойственной невырожденности, т.е.

$$\nabla f(x_*)=-\sum_{i\in\mathcal{J}}\lambda_i^*\nabla\varphi_i(x_*), \quad \lambda_i^*>0\,(i\in\mathcal{J});$$

г) матрица $f''(x_*)+\sum_{i\in\mathcal{J}}\lambda_i^*\varphi_i''(x_*)$ не имеет направлений вырождения ξ, удовлетворяющих условиям

$$\nabla\varphi_i(x_*)\cdot\xi=0 \quad (i\in\mathcal{J}).$$

Запишем критерий оптимальности для задачи (I2):

$$\nabla f(x_k)=-\sum_{i=1}^{m}\frac{[\varphi_i(x_k)]}{f(x_k)-d_k}\nabla\varphi_i(x_k).$$

Так как $\lim_{k\to\infty} x_k=x_*$ и $\nabla f(x_*)=-\sum_{i\in\mathcal{J}}\lambda_i^*\nabla\varphi_i(x_*)$, $\lambda_i^*>0\,(i\in\mathcal{J})$,
то при достаточно больших k получаем, что

$$\frac{[\varphi_i(x_k)]_+}{f(x_k)-d_k}=0 \qquad \text{для } i\in\{\overline{1,m}\}\setminus\mathcal{J},$$

и в силу определения x_*

$$\nabla f(x_k) = -\sum_{i\in J} \frac{[\varphi_i(x_k)]_+}{f(x_k)-d_k} \nabla\varphi_i(x_k). \qquad (16)$$

Ввиду условия б) и непрерывности $\nabla\varphi_i(x)$ $(i\in J)$ получим, что

$$\frac{[\varphi_i(x_k)]}{f(x_k)-d_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_i^* \quad (i\in J),$$

и так как $\lambda_i^*>0$ $(i\in J)$, то при достаточно больших k (16) можно переписать в виде

$$\nabla f(x_k) = -\sum_{i\in J} \frac{\varphi_i(x_k)}{f(x_k)-d_k} \nabla\varphi_i(x_k).$$

Введем обозначение

$$\frac{\varphi_i(x_k)}{f(x_k)-d_k} = \lambda_i^{(k)} \quad (i\in J).$$

Так как $\lambda_i^{(k)}\to\lambda_i^*$, то для достаточно больших k все $\lambda_i^{(k)}$ $(i\in J)$ ограничены в совокупности, т.е. $\lambda_i^{(k)}\le\bar{c}=const>0$.

Рассмотрим уравнение

$$(f(x)-d)\cdot\nabla f(x)+\sum_{i\in J}\varphi_i(x)\cdot\nabla\varphi_i(x)=0,$$

которому при d, достаточно близких к d_*, удовлетворяет точка $x_d=\arg\min_{x\in R^n}\Psi(x,d)$, и сведем его к системе

$$\begin{cases} \nabla f(x)+\sum_{i\in J}\lambda_i\nabla\varphi_i(x)=0, \\ (f(x)-d)\lambda_i-\varphi_i(x)=0. \end{cases} \qquad (17)$$

Точка (x_*,λ^*,d_*) удовлетворяет системе (17). В силу условия г) матрица Якоби (по x,λ) этой системы $J(x_*,\lambda^*,d_*)$ невырожденная, поэтому по теореме о неявной функции существует окрестность точки d_* такая, что $x(d)$ и $\lambda(d)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

Заметим, что фактически в процессе применения метода на-

груженного функционала используются лишь значения $d \le d_*$ и при этом $x_d = x(d)$. В частности, $x_k = x(d_k)$.

Рассмотрим функцию $s(d) = \sqrt{\Psi(x_d, d)}$. Положим

$$F(x,d) = \begin{pmatrix} [f(x)-d]_+ \\ \vdots \\ [\varphi_i(x)]_+ \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Тогда $s(d) = \|F(x_d, d)\|$. Легко проверяется, что функция $\|F(x,d)\|$ выпуклая, а значит, выпукла и функция $s(d) = \|F(x_d, d)\|$ как нижняя огибающая семейства выпуклых функций. Имеют место неравенства

$$\Psi(x_d, d) \geq \Psi(x_{\tilde{d}}, \tilde{d}) + \Psi_x(x_{\tilde{d}}, \tilde{d})(x_d - x_{\tilde{d}}) - 2[f(x_{\tilde{d}}) - \tilde{d}]_+(d - \tilde{d}),$$

$$\Psi(x_{\tilde{d}}, \tilde{d}) \geq \Psi(x_d, d) + \Psi_x(x_d, d)(x_{\tilde{d}} - x_d) - 2[f(x_d) - d]_+(\tilde{d} - d),$$

отсюда, поскольку

$$\Psi_x(x_d, d) = \Psi_x(x_{\tilde{d}}, \tilde{d}) = 0,$$

$$(d-\tilde{d})2[f(x_{\tilde{d}}) - \tilde{d}]_+ \geq \Psi(x_{\tilde{d}}, \tilde{d}) - \Psi(x_d, d) \geq -2[f(x_d) - d]_+(\tilde{d} - d),$$

а значит,

$$\lim_{\tilde{d} \to d} \frac{s^2(\tilde{d}) - s^2(d)}{\tilde{d} - d} = -2[f(x_d) - d]_+ .$$

Если считать, что $d < d_*$, то $f(x_d) > d$ и $s(d) > 0$. Поэтому ввиду непрерывности $s(d)$ получим

$$s'(d) = \frac{f(x_d) - d}{s(d)}, \quad |s'(d)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \sum\limits_{i \in J} (\lambda_i^{(k)})^2}} .$$

Отсюда имеем

$$1 \geq |s'(d)| \geq \frac{1}{\sqrt{1 + |J| \cdot \bar{c}^2}} = \tilde{c} > 0 .$$

По теореме о среднем и в силу выпуклости функции $s(d)$ получаем, что левая производная $s'(d_*)$ также существует, причем $|s'(d_*)| \geq \tilde{c} = const > 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия а) – г). Тогда существует константа $c > 0$ такая, что при достаточно больших k выполнено неравенство

$$d_{k+1} - d_k \leqslant c(d_k - d_*)^2. \qquad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для облегчения дальнейших выкладок предположим, что $x_* = 0$ и $d_* = 0$. Разложим функции $f(x)$, $\varphi_i(x)$ $(i \in J)$, $\nabla f(x)$, $\nabla \varphi_i(x)$ $(i \in J)$ в ряд в окрестности точки $x_* = 0$, а функцию $x(d)$ – в окрестности точки $d_* = 0$:

$$f(x) = a_0^T x + \tfrac{1}{2} x^T \mathcal{B}_0 x + o(\|x\|^2),$$

$$\varphi_i(x) = a_i^T x + \tfrac{1}{2} x^T \mathcal{B}_i x + o(\|x\|^2) \quad (i \in J),$$

$$\nabla f(x) = a_0 + \mathcal{B}_0 x + o(\|x\|),$$

$$\nabla \varphi_i(x) = a_i + \mathcal{B}_i x + o(\|x\|) \quad (i \in J),$$

$$x(d) = c_0 d + \tfrac{1}{2} c_1 d^2 + o(d^2),$$

где $a_0 = \nabla f(x_*)$, $\mathcal{B}_0 = f''(x_*)$, $a_i = \nabla \varphi_i(x_*)(i \in J)$, $\mathcal{B}_i = \varphi_i'(x_*)(i \in J)$, $c_0 = \dot{x}(d_*)$, $c_1 = \ddot{x}(d_*)$. Следовательно,

$$f(x) = a_0^T c_0 d + \tfrac{1}{2} a_0^T c_1 d^2 + \tfrac{1}{2} c_0^T \mathcal{B}_0 c_0 d^2 + o(d^2),$$

$$\varphi_i(x) = a_i^T c_0 d + \tfrac{1}{2} a_i^T c_1 d^2 + \tfrac{1}{2} c_0^T \mathcal{B}_i c_0 d^2 + o(d^2) \quad (i \in J).$$

Пусть $\gamma_j = a_j^T c_0$, $\delta_j = a_j^T c_1$, $\beta_j = c_0^T \mathcal{B}_j c_0$ $j \in J \cup \{0\}$.
Получим, что

$$s(d) = d\sqrt{\mathcal{A} + \mathcal{B} d + \mathcal{C} d + o(d^2)},$$

где $\mathcal{A} = (\gamma_0 - 1)^2 + \sum \gamma_i^2$, $\mathcal{B} = (\gamma_0 - 1)(\beta_0 + \delta_0) + \sum_{i \in J} \gamma_i (\delta_i + \beta_i)$, $\mathcal{C} = (\delta_0 + \beta_0)^2 + \sum_{i \in J} (\beta_i + \delta_i)^2$. Заметим, что случай $\mathcal{A} = 0$ невозможен, так как в этом случае $\gamma_0 = 1$, $\gamma_i = 0$, а это противоречит признаку оптимальности

$$\nabla f(x_*) + \sum_{i \in J} \lambda_i^* \nabla \varphi_i(x_*) = 0.$$

Таким образом, $\mathcal{A} > 0$ и

$$s(d) = d\sqrt{A}\cdot\sqrt{1+\frac{B}{A}d+\frac{C}{A}d^2+O(d^2)},$$

а значит, $s''(d)$ ограничена. Поэтому

$$d_* - d_{k+1} = d_* - d_k + \frac{s(d_k)-s(d_*)}{s'(d_k)} =$$

$$= \frac{s'(d_k)(d_*-d_k)-(s(d_*)-s(d_k))}{s'(d_k)} = \frac{(d_*-d_k)(s'(d_k)-s'(d_{cp}))}{s'(d_k)} =$$

$$= \frac{s''(\tilde{d}_{cp})(d_*-d_k)^2}{s'(d_k)} \leqslant C(d_*-d_k)^2,$$

где $d_{cp}\in(d_k,d_*)$, $\tilde{d}_{cp}\in(d_k,d_{cp})$, $C=const>0$. Таким образом, теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос о скорости сходимости точек x_k к решению задачи (II). Заметим, что в силу условия г) существует число $\tau>0$, для которого

$$\left(y^T\ \frac{\partial^2 L(\lambda^*,x_*)}{\partial x^2}, y\right) \geqslant \tau |y|,\quad y\in R^n,$$

где

$$L(\lambda,x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\varphi_i(x).$$

В этих предположениях точка x_* будет единственным решением задачи (II). При помощи доказательства теоремы 2 [4] и (I8) сразу получаем, что

$$|x_k - x_*| \leqslant \bar{\bar{c}}\,|x_{k-1}-x_*|^2, \qquad (I9)$$

где $\bar{\bar{c}} = const>0$.

Легко можно показать, что если функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)(i\in J)$ линейные, то решение задачи (II) получается за один шаг.

После того как квадратичная скорость сходимости метода нагруженного функционала доказана, применим описанный в начале статьи метод оптимизации двухуровневого процесса с $\alpha=1$. Рассмотрим схему приближенного решения задачи (II).

Имеем начальную оценку $d_1\leqslant f(x_*)$ и начальную точку x_0. Отыскивается точка x_1, являющаяся решением задачи

$$\Psi(x_1, d_1) = \min_{x \in R^n} \Psi(x, d_1), \tag{20}$$

решаемой с погрешностью γ_0. Предположим, что управляющий параметр γ_0 зависит от параметра Δ_0, начальной погрешности η_0 и константы $\mathcal{L}_0$, т.е.

$$\gamma_0 = \mathcal{L}_0 \Delta_0 \eta_0^2. \tag{21}$$

По известной начальной погрешности η_0 параметр Δ_0 находится из решения уравнения

$$\ln(\mathcal{L}_0 \eta_0) + \Delta_0 \ln \rho(\Delta_0) = 0 \tag{22}$$

или уравнения

$$2 \ln(\mathcal{L}_0 \eta_0) + \Delta_0^2 \ln \rho(\Delta_0^2) = 0 \tag{23}$$

в зависимости от того, какую гипотезу об оценке суммарной погрешности $\varphi(\eta_n, \gamma_n)$ мы приняли: (3) или (4); таким образом определяется величина управляющего параметра $\gamma_0 = \mathcal{L}_0 \Delta_0 \eta_0^{1+\alpha}$. Теоретически ожидаемая погрешность определяется по формулам:

$\eta_1^* = \mathcal{L}_0 \eta_0^2 (1+\Delta_0)$, если имеет место гипотеза (3),

и

$\eta_1^* = \mathcal{L}_0 \eta_0^2 \sqrt{1+\Delta_0^2}$, если имеет место гипотеза (4).

Фактически же полученную погрешность обозначим через $\eta_{1\varphi}$.

Предлагается следующий способ пересчета константы $\mathcal{L}_0$:

$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \dfrac{\eta_1}{\eta_0^2(1+\Delta_0)}$, если имеет место гипотеза (3),

и

$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \dfrac{\eta_1}{\eta_0^2 \sqrt{1+\Delta_0^2}}$, если имеет место гипотеза (4).

В качестве новой константы $\mathcal{L}_1$ можно (из осторожности) брать

$$\mathcal{L}_1 = (1-\varepsilon)\mathcal{L}_0 + \varepsilon \tilde{\mathcal{L}}_0, \tag{24}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. По формуле (13) при $k=1$ вычисляем новое значение d_2, и, начиная с $d_2, x_1, \mathcal{L}_1$ процедура повторяется.

Была написана программа, реализующая рассмотренный в данной статье подход к оптимизации двухуровневого итерационного процесса, для решения следующей задачи:

$$
\begin{cases}
f(x) = 3(x_1-5)^2 + 6(x_2-5)^2 + 2(x_3-4)^2 + 8(x_4-7)^2 - \min, \\
\varphi_1(x) = x_1^2 + (x_1-x_4)^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 - 19 \le 0, \\
\varphi_2(x) = 2(x_1-x_2)^2 + 13x_3^2 - 26 \le 0, \\
\varphi_3(x) = (x_1+x_3)^2 + 18.1x_1 + 12x_2 + 5x_4^2 - 143 \le 0, \\
\varphi_4(x) = 3(x_1-x_2+2x_4)^2 - 0.5x_3 - 50 \le 0, \\
\varphi_5(x) = 6x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 12(x_1+x_2)x_3 + 21x_4^2 - 125 \le 0.
\end{cases} \tag{25}
$$

Начальная точка: x_0 =(5,5,5,5), начальная оценка: $\alpha_1 = 0$, в формуле пересчета константы $\mathcal{L}_n$ (24) $\varepsilon = 0{,}4$. В качестве $\mathcal{L}_0$ бралось

$$
\mathcal{L}_0 = \frac{0.9}{\max\limits_{i=\overline{1,5}} \{|\varphi_i(x_0)|\}} \; ;
$$

задача (2I) решалась в программе градиентным методом.

Полученные результаты сравнивались с результтатами счета, полученными при решении задачи (25) по схеме, предложенной В.Ю. Лебедевым [I] , и при решении задачи (25) – методом внешних центров [2]. Результаты сравнения помещены в табл. I и 2.

ЛИТЕРАТУРА

I. ЛЕБЕДЕВ В.Ю. Схема поиска приближенных решений задачи выпуклого программирования. – Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1977, т.I7, № I, с.I00–I08.
2. ГРОССМАН К., КАПЛАН А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. – Новосибирск: Наука, 198I, с.82–90.
3. КАЛАШНИКОВА Н.И. Об оптимизации управления точностью в двухуровневом вычислительном процессе. – Оптимизация, 1982,

4. ЛЕБЕДЕВ В.Ю. О сходимости метода нагруженного функционала в задачах выпуклого программирования. – Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1977, т.17, № 3, с.765-768.

Таблица I

Результаты счета без вспомогательной задачи

	Критерий остановки $\psi(x_k, d_k) \leq 0{,}001$			
	$\eta_{n+1} = \eta_n^2 + \gamma_n$	$\eta_{n+1} = \sqrt{\eta_n^4 + \gamma_n^2}$	Метод, предложенный В.Ю.Лебедевым	Метод внешних центров
число шагов	6	6	7	18
n_1	714	592	1278	968
n_2	2829	2581	2396	1474
	Критерий остановки $\dfrac{\psi(x_k, d_k)}{f(x_k) - d_{k-1}} \leq 0{,}001$			
	$\eta_{n+1} = \eta_n^2 + \gamma_n^2$	$\eta_{n+1} = \sqrt{\eta_n^4 + \gamma_n^2}$	Метод, предложенный В.Ю.Лебедевым	Метод внешних центров
число шагов	6	6	7	26
n_1	715	595	1297	11167
n_2	2910	2672	2490	1754

Примечания: n_1 – суммарное число градиентных шагов; $n_2 = I + J$, где I – суммарное число шагов в методе золотого сечения, необходимых для отыскания начального отрезка, J – суммарное число дроблений в методе золотого сечения.

Т а б л и ц а 2

Результаты счета со вспомогательной задачей

Результаты счета вспомогательной задачи				
n_1	n_2	x_0		d_1
717	2934	$x_0(1)$=1,5221583 $x_0(2)$=2,1520817 $x_0(3)$=0,70854821 $x_0(4)$=2,3742175		282,49679
Критерий остановки $\Psi(x_k, d_k) \leq 0{,}001$				
	$\eta_{n+1} = \eta_n^2 + \gamma_n$	$\eta_{n+1} = \sqrt{\eta_n^4 + \gamma_n^2}$	Метод, предложенный В.Ю.Лебедевым	Метод внешних центров
число шагов	3	3	2	13
n_1	859	647	880	3080
n_2	4250	4030	1890	4906
Критерий остановки $\dfrac{\Psi(x_k, d_k)}{f(x_k) - d_k} \leq 0{,}001$				
	$\eta_{n+1} = \eta_n^2 + \gamma_n$	$\eta_{n+1} = \sqrt{\eta_n^4 + \gamma_n^2}$	Метод, предложенный В.Ю.Лебедевым	Метод внешних центров
число шагов	3	3	2	13
n_1	868	652	473	3298
n_2	4460	4231	998	5392

Поступила в ред.-изд. отдел
14.04.1982 г.