УДК 5I2.643.5; 5I9.852.64

ВЫЯВЛЕНИЕ ХОРОШО ОБУСЛОВЛЕННОГО БЛОКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЕ

Р.А.Звягина

Прямоугольную матрицу с помощью ортогональных преобразований и "вычёркивания" как можно меньшего числа строк (столбцов) требуется привести к такому виду, чтобы все ее ненулевые столбцы (строки) составляли достаточно хорошо обусловленную двухдиагональную подматрицу. Задача такого рода возникает в линейном программировании, когда ограничения имеют разветвленную блочную структуру. Матрица

$$A_2=\left[A_{20}\,\vdots\,A_1\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{20} & \begin{array}{c} A_0 \\ \hline A_{10}\end{array}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{20} & \begin{array}{c|c} A_{00} & O \\ \hline O & A_{01} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A_{10}}\end{array}\end{array}\right]$$

может служить примером трехступенчатого разветвления: высшая ступень (вся матрица A_2) состоит из блока A_1, окаймленного вертикальной полосой A_{20}, блок A_1 (средняя ступень), в свою очередь, состоит из блочно-диагональной клетки A_0 (низшая ступень), окаймленной горизонтальной полосой A_{10}. В процессе приведения базисной матрицы к блочно-треугольному виду необходимо разбить ее на клетки таким образом, чтобы при исключении лишних ненулевых элементов, во-первых, как можно лучше сохранялась исходная блочность и, во-вторых, квадратные клетки на главной диагонали были бы достаточно хорошо обусловленными матрицами. В угоду первому требованию предпочтительнее вести процесс выявления базиса на каждой из ступеней, перебирая их от низшей к высшей (в отличие от процесса, рас-

смотренного ранее [I], с обратным порядком перебора). Тогда на стыке двух ступеней с окаймлением разного типа (вертикальным и горизонтальным или наоборот, как в указанном примере) нельзя гарантировать, что ранг каждого блока предшествующих им ступеней равен меньшей его размерности, даже если вся матрица невырожденная и хорошо обусловлена.

В дальнейшем для определенности рассматривается процесс с вычеркиванием строк, так как симметричный процесс с вычеркиванием столбцов получается применением описываемых в §2-4 алгоритмов к транспонированной исходной матрице.

§I. Постановка задачи и предварительные замечания

Пусть $A[M,N]$ – прямоугольная матрица с множествами $M=\{1,2,\dots,m\}$ номеров строк и $N=\{1,2,\dots,n\}$ номеров столбцов. Положим $z=\min\{m,n\}$. Представление

$$A[M,N]=P[M,M]\cdot S[M,N]\cdot Q[N,N]$$

называется сингулярным разложением, если $P[M,M]$ и $Q[N,N]$ – ортогональные преобразования, а в матрице $S[M,N]$ отличны от нуля разве лишь неотрицательные элементы $\sigma_i=S[i,i]$, $i=1,2,\dots,z$, упорядоченные по невозрастанию и называемые сингулярными числами матрицы $A[M,N]$. Задача состоит в том, чтобы в матрице

$$C[M,N]=\tilde{P}[M,M]\cdot A[M,N]\cdot\tilde{Q}[N,N] \qquad (I.I)$$

при ортогональных преобразованиях $\tilde{P}[M,M]$ и $\tilde{Q}[N,N]$ выделить квадратную двухдиагональную подматрицу $C[I,J]$ порядка t, которую будем называть д о п у с т и м о й , если все ее сингулярные числа больше заданного барьера $\varepsilon>0$, а $C[I,N\setminus J]=0$ (разумеется, ε выбирается с учетом нормировки матрицы $A[M,N]$).

Если при этом порядок матрицы $C[I,J]$ наибольший из возможных, то она называется о п т и м а л ь н о й . Ясно, что при $I=M$ или $J=N$ любая допустимая матрица $C[I,J]$ оптимальна. При $I\neq M$ и $J\neq N$ достаточным признаком оптимальности является распадение матрицы (I.I) на независимые блоки $C[I,J]$ и $C[M\setminus I,N\setminus J]$ с сингулярными числами, разделенными барьером ε, что свидетельствует о гораздо лучшей обусловленности матрицы $C[I,J]$ по сравнению с любой квадратной подматрицей

порядка z матрицы $S[M,N]$. Пусть $\sigma_{t+1}, \sigma_{t+2}, \dots, \sigma_z$ – сингулярные числа матрицы $C[M\setminus I, N\setminus J]$, также упорядоченные по невозрастанию. Проверка условия $\sigma_{t+1} \leq \varepsilon$, как будет видно из дальнейшего, равносильна приведению матрицы $C[M\setminus I, N\setminus J]$ к двухдиагональному виду без отбрасывания строк. Поэтому укажем одно из легко проверяемых достаточных условий, из которого следует $\sigma_{t+1} \leq \varepsilon$. Если квадрат евклидовой нормы матрицы $C[M\setminus I, N\setminus J]$, равный сумме квадратов всех ее элементов, не превосходит ε^2, то верны соотношения

$$\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+2}^2 + \dots + \sigma_z^2 = \| C[M\setminus I, N\setminus J] \|_E^2 \leq \varepsilon^2$$

в силу инвариантности евклидовой нормы относительно ортогональных преобразований.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если матрица $A[M,N]$ блочно-диагональная, то поставленная задача решается для каждого блока независимо от других.

В следующих параграфах параллельно рассматриваются два алгоритма. Первый из них дает, вообще говоря, лишь допустимое решение, так как отбрасывание одной или нескольких строк в нем происходит сразу же при нарушении некоторого достаточного для $\sigma_t > \varepsilon$ условия. При этом количество преобразований и объем хранимой информации не больше, чем в случае приведения матрицы $A[M,N]$ к двухдиагональному виду без отбрасывания строк. Во втором алгоритме в момент нарушения достаточного условия допустимости включается итеративный процесс, устраняющий указанное нарушение или обеспечивающий достаточный признак оптимальности. Ясно, что количество преобразований и объем хранимой информации резко возрастают по сравнению с первым алгоритмом, поэтому в общем случае второй алгоритм представляет лишь теоретический интерес.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как указывалось во введении, описываемые алгоритмы предназначаются для раскроя невырожденной матрицы с разветвленной блочностью. Следовательно, строки отбрасываемой полосы $C[M\setminus I, N]$ распределяются по более высоким ступеням. Тот факт, что в первом алгоритме некоторые из них незаслуженно отвергаются матрицей $C[I,N]$, отражается лишь на степени учета блочной структуры. Обусловленность клеток на главной диагонали после приведения базисной матрицы к блочно-треугольному виду зависит лишь от выбора ε и от обусловленности всей матрицы, поскольку из блоков, в которых линейная независимость строк не случайна, а следует из невырожденности всей базисной матрицы, строки не выбрасываются.

Известно [2], что сингулярные числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ квадратной

двухдиагональной матрицы

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_t & a_t \end{bmatrix} \qquad (I.2)$$

можно вычислять как неотрицательные корни характеристического полинома $D_{2t}(\lambda)$ для матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & b_2 & & & & & \\ & b_2 & 0 & a_2 & & & & \\ & & a_2 & 0 & b_3 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b_t & 0 & a_t \\ & & & & & a_t & 0 \end{bmatrix} \qquad (I.3)$$

Поскольку интерес представляют лишь невырожденные матрицы $C[I,J]$, то необходимо предположить, что $a_i \neq 0$, $i=1,2,\dots,t$, а тогда $\sigma_1 \cdot \sigma_t^{-1}$ – число обусловленности матрицы (I.2).

Если при этом $b_i \neq 0$ для всех $i=2,3,\dots,t$, то по теореме Штурма [3] проверка условия $\sigma_t > \varepsilon$ сводится к вычислению для матрицы (I.3) последовательности

$$D_1(\varepsilon) = -\varepsilon, \; D_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 - a_1^2,$$

$$D_{2i-1}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot D_{2(i-1)}(\varepsilon) - b_i^2 \cdot D_{2i-3}(\varepsilon), \qquad (I.4)$$

$$D_{2i}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot D_{2i-1}(\varepsilon) - a_i^2 \cdot D_{2(i-1)}(\varepsilon), \; i=2,3,\dots,t,$$

и подсчету в ней числа $s_t(\varepsilon)$ совпадений знаков в последовательных элементах, равного числу корней полинома $D_{2t}(\lambda)$, бо́льших ε. Заметим, что знак величины $D_\ell(\varepsilon)=0$ $(2 \le \ell \le 2t)$ полагается равным $-\mathrm{sign}\, D_{\ell-1}(\varepsilon)$ и что $D_\ell(\varepsilon)$ и $D_{\ell-1}(\varepsilon)$ одновременно в нуль не обращаются, так как корни полинома $D_\ell(\lambda)$ строго разделяются корнями полинома $D_{\ell-1}(\lambda)$, т.е. в сделанных предположениях $0 < \sigma_t < \sigma_{t-1} < \dots < \sigma_1$.

Для вычисления $\sigma_t > \varepsilon$ содержащий его интервал $[\varepsilon, y_t]$, где y_t определяется неравенствами $\sigma_t \le |a_i|$, $i=1,2,\dots,t$, делится пополам, и в точке $z=(\varepsilon+y_t)/2$ вычисляется последовательность (I.4) с заменой ε на z. Если $s_t(z) \ge t$, то $\sigma_t > z$, в противном случае $\sigma_t \le z$. Таким образом, получается более узкий интервал, содержащий σ_t, и процесс нужно продолжать до тех пор, пока

длина интервала не станет меньше некоторой заданной точности [2,3]. Для σ_1 правая граница интервала $[\sigma_t, y_1]$ определяется неравенствами (при $b_1 = b_{t+1} = 0$);

$$\sigma_1 \le |a_i| + |b_i|, \quad \sigma_1 \le |a_i| + |b_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \dots, t,$$

из теоремы Гершгорина [3] для матрицы (I.3). Более узкие интервалы $[z, y_1]$ или $[\sigma_t, z]$ следуют соответственно из неравенств $s_t(z) \ge 1$ или $s_t(z) < 1$ при $z = (\sigma_t + y_1)/2$.

§2. Начальные данные алгоритма и распадение матрицы на блоки

2.I. Предположим, что при $C^0[M,N] = A[M,N]$ и $I_0 = J_0 = \varnothing$ с помощью правосторонних и левосторонних отражений $Q_{2\tau-1}[N,N]$ и $P_{2\tau}[M,M]$ построены матрицы

$$C^{2\tau-1}[M,N] = C^{2(\tau-1)}[M,N] \cdot Q_{2\tau-1}[N,N], \quad C^{2\tau}[M,N] = P_{2\tau}[M,M] \cdot C^{2\tau-1}[M,N]$$

в порядке возрастания $\tau = 1, 2, \dots, k-1$ таким образом, что $2(k-1)$-я матрица в этой последовательности при $1 \le k \le m$ и $I_k = I_{k-1} \cup \{k\}$, $J_k = J_{k-1} \cup \{k\}$ имеет вид

$$C^{2(k-1)}[M,N] =$$

$$= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc:c:c} a_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & b_{k-1} & a_{k-1} & \\ \hdashline & & 0 & & b_k & C^{2(k-1)}[k, N \setminus J_{k-1}] \\ \hdashline & & & & 0 & C^{2(k-1)}[M \setminus I_k, N \setminus J_{k-1}] \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ \ddots \\ b \end{array}}\right\} I_{k-1} \\ \} k \\ \} M \setminus I_k \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{J_{k-1}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{N \setminus J_{k-1}} \end{array} \tag{2.I}$$

Предположим также, что все элементы $a_\tau, b_{\tau+1}, \tau = 1, 2, \dots, k-1$, кроме разве лишь b_k, отличны от нуля, причем

$$a_\tau = -\delta_\tau \cdot \| C^{2(\tau-1)}[\tau, N \setminus J_{\tau-1}] \| \qquad (\delta_\tau = \pm 1), \tag{2.2}$$

$$b_{\tau+1} = -\delta'_{\tau+1} \cdot \| C^{2\tau-1}[M \setminus I_\tau, \tau] \| \qquad (\delta'_{\tau+1} = \pm 1), \tag{2.3}$$

и что $s_{k-1}(\epsilon) = k-1$ в последовательности (I.4) при $t = k-1$.

Это значит, что матрица $C^{2(k-1)}[I_{k-1}, J_{k-1}]$, равная (I.2) при $t = k-1$, допустима, более того, $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_{k-1} > \varepsilon$.

Заметим, что отражение

$$Q_{2\tau-1}[N,N] = E[N,N] - \frac{2}{\|q_\tau[N]\|^2} \cdot q_\tau^T[N] \cdot q_\tau[N], \qquad (2.4)$$

в котором $E[N,N]$ – единичная матрица, определяется при всех $\tau = 1, 2, \ldots, k-1$ строкой

$$q_\tau[N] = C^{2(\tau-1)}[\tau, N] - b_\tau \cdot E[\tau-1, N] - a_\tau \cdot E[\tau, N], \qquad (2.5)$$

если положить $b_1 = 0$, а отражение

$$P_{2\tau}[M,M] = E[M,M] - \frac{2}{\|p_\tau[M]\|^2} \cdot p_\tau[M] \cdot p_\tau^T[M] \qquad (2.6)$$

определяется при всех $\tau = 1, 2, \ldots, k-2$, а также при $\tau = k-1$ в случае $b_k \neq 0$ столбцом

$$p_\tau[M] = C^{2\tau-1}[M, \tau] - a_\tau \cdot E[M, \tau] - b_{\tau+1} \cdot E[M, \tau+1]. \qquad (2.7)$$

При этом знаки δ_τ и $\delta'_{\tau+1}$ в выражениях (2.2) и (2.3) выбираются та́к, чтобы евклидова норма строки (2.5) и столбца (2.7) была наибольшей [2–4]. Если $b_k = 0$, то преобразование $P_{2(k-1)}[M, M]$ можно считать равным единичной матрице $E[M,M]$.

При $k = 1$ матрица (2.I) совпадает с $C^0[M, N]$, и все перечисленные предположения для нее справедливы. Поскольку $|a_1|$ – сингулярное число матрицы (I.2) при $t = 1$, то в силу определения (2.2) при $\tau = 1$ первой строкой матрицы $A[M, N]$ естественно считать ту, у которой наибольшая евклидова норма. Чтобы иметь возможность сделать первый шаг, достаточно предположить, что $\|A[1, N]\| > \varepsilon$, и перейти (п.3.2) к преобразованию матрицы (2.I), равной $A[M, N]$. В противном случае во втором алгоритме следует перейти к п. 2.4, а в первом алгоритме положить $I = J = \varphi$.

2.2. Если $b_k = 0$ при $k > 1$, то матрица (2.I) блочно-диагональная. Для блока $C^{2(k-1)}[I_{k-1}, J_{k-1}]$ в силу замечания I про́цесс завершается вычислением σ_{k-1}, σ_1, а блок

$$\tilde{A}[\tilde{M}, \tilde{N}] = C^{2(k-1)}[\tilde{M}, \tilde{N}], \quad \tilde{M} = M \setminus I_{k-1}, \quad \tilde{N} = N \setminus J_{k-1}, \qquad (2.8)$$

можно принять за исходную матрицу для начала процесса (п.2.I), определив начальные данные так же, как для матрицы $A[M,N]$.

2.3. Если для матрицы (2.I) при $k>1$ выполняется условие

$$\| C^{2(k-1)}[k, N \setminus J_{k-1}] \| = 0, \qquad (2.9)$$

то она распадается на независимые блоки

$$C^{2(k-1)}[I_k, J_{k-1}] = \left[\begin{array}{c} C^{2(k-1)}[I_{k-1}, J_{k-1}] \\ \hline E[k-1, J_{k-1}] \cdot b_k \end{array} \right] \} \, k \qquad (2.10)$$

и $\tilde{A}[M \setminus \{k\}, \tilde{N}]$. Эта ситуация отличается от предыдущей разве лишь неоднозначностью выбора оптимальной клетки $C[I_{k-1}, J_{k-1}]$ для блока (2.I0) во втором алгоритме (в первом алгоритме k-я строка отбрасывается).

ЛЕММА I. Если $b_k \neq 0$ в матрице (2.I0) с сингулярными числами $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_{k-1}$, то

$$0 < \sigma_{k-1} < \tilde{\sigma}_{k-1} < \ldots < \sigma_2 < \tilde{\sigma}_2 < \sigma_1 < \tilde{\sigma}_1 . \qquad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополнив $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_{k-1}$ числом $\tilde{\sigma}_k = 0$, получим сингулярные числа матрицы (2.I0), дополненной до квадратной нулевым k-м столбцом. С другой стороны, $\pm\tilde{\sigma}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$,- корни характеристического полинома $D_{2k}(\lambda)$ матрицы (I.3) при $t=k$, $a_k = 0$. Следовательно, $D_{2k}(\lambda) = \lambda \cdot D_{2k-1}(\lambda)$ и верны неравенства (2.II), поскольку корни полинома $D_{2k-1}(\lambda)$ строго разделяются [3] ненулевыми корнями $\pm\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, полинома $D_{2(k-1)}(\lambda)$.

Из доказанной леммы следует, что если матрицу (2.I0) преобразовать в правую двухдиагональную матрицу $\tilde{C}[I_k, J_{k-1}]$ с помощью $k-1$ левых вращений, то во втором алгоритме в качестве оптимальной клетки можно выбрать как $C^{2(k-1)}[I_{k-1}, J_{k-1}]$, так и $\tilde{C}[I_{k-1}, J_{k-1}]$. Однако в последнем случае отбрасываемая строка нулевая.

2.4. Покажем, что во втором алгоритме всегда можно преобразовать матрицу $A[M,N]$ в подходящую для начала процесса (п.2.I) или выявить достаточный признак оптимальности для $I = J = \emptyset$.

Пусть $0 < \|A[1,N]\| = |a_1| \le \varepsilon$. Первая строка матрицы

$C^1[M,N]$ имеет вид $a_1 \cdot E[1,N]$. Если

$$\| C^1[M \setminus \{1\}, 1] \| = 0 , \qquad (2.12)$$

то матрица $C^1[M,N]$ блочно-диагональная. При этом $|C^1[1,1]| \leq \varepsilon$, а блок $C^1[M \setminus \{1\}, N \setminus \{1\}]$, квадрат евклидовой нормы которого на величину a_1^2 меньше $\|A[M,N]\|_E^2$, можно принять за исходную матрицу для описываемого здесь процесса согласно замечанию I. Если условие (2.12) нарушено, то сингулярное число $|\tilde{a}_1|$ матрицы $C^1[M,1]$ строго больше $|a_1|$. Умножим матрицу $C^1[M,N]$ слева на отражение $P_1[M,M]$, делающее первый столбец в матрице

$$A_1[M,N] = P_1[M,M] \cdot C^1[M,N] \qquad (2.13)$$

равным $\tilde{a}_1 \cdot E[M,1]$. Если при этом $\|A_1[1,N]\| > \varepsilon$, то матрицу (2.13) можно взять в качестве исходной (п.2.I) вместо $A[M,N]$. В противном случае при

$$\|A_1[1, N \setminus \{1\}]\| = 0 \qquad (2.14)$$

матрица (2.13) оказывается в такой же ситуации, как $C^1[M,N]$ при условии (2.12). Если же условие (2.14) нарушено, а $\|A_1[1,N]\| \leq \varepsilon$, то матрица (2.13) оказывается в такой же ситуации, как $A[M,N]$, но с бо́льшей евклидовой нормой первой строки, так как

$$\|A_1[1,N]\| > |\tilde{a}_1| > |a_1| = \|A[1,N]\| .$$

Таким образом, весь цикл, начиная с $C^1[M,N]$, следует повторять до тех пор, пока либо не получим матрицу (2.13), пригодную для начала процесса, либо не вычеркнем первую строку и первый столбец по одной из причин: (2.12) или (2.14). В силу строгого убывания евклидовой нормы усеченных блоков и конечности z подпоследовательность циклов, завершающихся усечением, приводит к матрице, евклидова норма которой не превосходит ε.

Заметим, что если евклидова норма хотя бы одного столбца, например первого, в матрице $A[M,N]$ больше ε, то один такой цикл дает матрицу (2.13) с $\|A_1[1,N]\| > \varepsilon$. Кроме того, если $A[M,N]$ – матрица ранга I, в частности, если $n = 1$, то за один цикл получим матрицу (2.13) с единственным отличным от нуля элементом $A_1[1,1]$.

§3. Окаймление двухдиагональной части и окончание процесса

3.1. Если для матрицы (2.1) при $k>1$ нарушается условие (2.9) и $b_k \neq 0$, то, вычислив a_k по формуле (2.2) при $\tau=k$, выясним возможность окаймления двухдиагональной части матрицы (2.1) по схеме

$$C^{2k-1}[I_k,J_k]=\left[\begin{array}{c|c} C^{2(k-1)}[I_{k-1},J_{k-1}] & 0 \\ \hline E[k-1,J_{k-1}]\cdot b_k & a_k \end{array}\right]. \qquad (3.1)$$

Для этого в случае $|a_k|>\varepsilon$ нужно подсчитать число $s_k(\varepsilon)$ в последовательности (1.4) для $t=k$. Если $s_k(\varepsilon)=k$, то сингулярные числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ матрицы (3.1) больше ε. Следовательно, можно перейти (п.3.2) к k-му шагу преобразования матрицы (2.1). Случай $s_k(\varepsilon)=k-1$, исчерпывающий все остальные случаи, включая $0<|a_k|\leq\varepsilon$, рассматривается в следующем параграфе.

3.2. Если $k<n$, то, умножая матрицу (2.1) справа на отражение (2.4) при $\tau=k$, получим матрицу

$$C^{2k-1}[M,N]=\left[\begin{array}{c|c} C^{2(k-1)}[I_{k-1},J_{k-1}] & 0 \\ \hline E[k-1,J_{k-1}]\cdot b_k & a_k\cdot E[k,N\setminus J_{k-1}] \\ \hline 0 & C^{2k-1}[M\setminus I_k,N\setminus J_{k-1}] \end{array}\right] \qquad (3.2)$$

Если при этом $k=m$, то процесс заканчивается вычислением σ_m и σ_1 для оптимальной клетки $C[M,J_m]$, равной (3.1).

3.3. Если $k=m-1<n$, то матрица (3.2), равная $C^{2k}[M,N]$, имеет такой же вид, как (2.1) с заменой k на m. Процесс можно продолжить еще на один шаг, если положить $b_m=C^{2(m-1)}[m,m-1]$ и перейти к п.2.2 в случае $b_m=0$, к п.2.3 в случае выполнения условия (2.9) и к п.3.1 в остальных случаях.

3.4. Если $k\leq m-2<n$, то вычислим b_{k+1} по формуле (2.3) при $\tau=k$ и в случае $b_{k+1}=0$ перейдем к п.2.2 с заменой $k-1$ на k. Если $b_{k+1}\neq 0$, то, умножая матрицу $C^{2k-1}[M,N]$ слева на отражение (2.6) при

$\tau = k$, получим матрицу $C^{2k}[M,N]$ такого же вида, как (2.I) с заменой $k-1$ на k, и процесс можно продолжить (пп.2.3 или 3.I в зависимости от условия (2.9)).

3.5. При $k = n \leq m$ процесс заканчивается вычислением σ_n и σ_1 для оптимальной клетки $C[I_n, N]$, выбор которой в случае $n < m$ во втором алгоритме может быть неоднозначным для матрицы (2.I), равной

$$C^{2(n-1)}[M,N] = \left[\begin{array}{c} C^{2(n-1)}[I_n, N] \\ \hdashline C^{2(n-1)}[M \setminus I_n, n] \cdot E[n,N] \end{array}\right] \qquad (3.3)$$

В первом алгоритме строки с номерами $i > n$ отбрасываются.

ЛЕММА 2. Если $C^{2(n-1)}[M \setminus I_n, n] \neq 0$, то сингулярные числа $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_{n-1}, \ldots, \tilde{\sigma}_1$ матрицы (3.3) строго сдвинуты вправо в пределах (2.II) при $k = n+1$ относительно сингулярных чисел $\sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_1$ матрицы $C^{2(n-1)}[I_n, N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим матрицу $C^{2n-1}[M,N]$ равной (3.3) и умножим ее слева на отражение (2.6) при $\tau = n$. Тогда в матрице $C^{2n}[M,N]$ вся ненулевая часть совпадает с матрицей (2.I0) при $k = n+1$ и удовлетворяет условиям леммы I, откуда следует утверждение леммы 2.

Далее, левую двухдиагональную матрицу (2.I0) при $k = n+1$ с помощью n левых вращений можно преобразовать в правую двухдиагональную матрицу $\tilde{C}[I_{n+1}, N]$. В качестве $C[I_n, N]$ во втором алгоритме можно выбрать как $C^{2(n-1)}[I_n, N]$, так и $\tilde{C}[I_n, N]$. Однако в последнем случае отбрасываемые строки с номерами $i > n$ нулевые.

§4. Выбрасывание k-й строки

4.I. В рамках первого алгоритма окаймление (3.I) невозможно, если $s_k(\varepsilon) = k-1$. Покажем, что в этих условиях никаким выбором номера i вместо k в пределах $k < i \leq m$ изменить ситуацию не удается.

Отказавшись от преобразования $P_{2(k-1)}[M, \dot{M}]$, построим новое отражение $\tilde{P}_{2(k-1)}[M,M]$ по тем же формулам, но с

заменой числа b_k и столбца $p_{k-1}[M]$ соответственно на $-\delta_i'|b_k|$ и

$$\tilde{p}_{k-1}[M]=p_{k-1}[M]-|b_k|\cdot\{\delta_k'\cdot E[M,k]-\delta_i'\cdot E[M,i]\}, \quad (4.1)$$

где $\delta_i'=\pm 1$ выбирается так, чтобы норма столбца (4.I) была наибольшей. Подставив выражение (4.I) в представление строки

$$\tilde{C}^{2(k-1)}[i,N]=E[i,M]\cdot\tilde{P}_{2(k-1)}[M,M]\cdot C^{2k-3}[M,N] \quad (4.2)$$

и используя свойства

$$\|p_{k-1}[M]\|^2=2|p_{k-1}[k]|\cdot|b_k|, \quad \|\tilde{p}_{k-1}[M]\|^2=2|\tilde{p}_{k-1}[i]|\cdot|b_k|$$

[2], нетрудно проверить, что (4.2) с точностью до множителя $\delta_k'\cdot\delta_i'$ совпадает со строкой $C^{2(k-1)}[k,N]$.

Вычеркивание k -й строки из матрицы (2.I) делает ее подматрицу $C^{2(k-1)}[M\setminus\{k\},N]$ блочно-диагональной (п.2.2 с заменой $\tilde{M}$ на $\tilde{M}\setminus\{k\}$). С учетом замечания 2 это означает, что дальнейшим левосторонним отражениям, применяемым к матрице (2.I), k -я строка не подвергается.

Заметим, что при $k=m\leq n$ оптимальной является матрица $C^{2(m-1)}[M\setminus\{m\},J_{m-1}]$, а при $k=n<m$ оптимальный выбор клетки $C[I,J]$ для матрицы (3.3) можно сделать на основании леммы 2.

4.2. В заключение построим итеративный процесс для второго алгоритма, позволяющий либо сделать окаймление (3.I) допустимым, либо выявить необходимость отбрасывания k -й строки. Умножив матрицу (2.I) справа на отражение (2.4) при $\tau=k$, получим матрицу

$$C_0[M,N]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} C_0[I_k,J_{k-1}] & a_k\cdot E[I_k,k] & 0 \\ \hline 0 & C_0[M\setminus I_k,k] & C_0[M\setminus I_k,N\setminus J_k] \end{array}\right], \quad (4.3)$$

равную (3.2), с левой двухдиагональной подматрицей $C_0[I_k,J_k]$, равной (3.I). Если при $s_k(\varepsilon)=k-1$ выполняется условие

$$\|C_0[M\setminus I_k,k]\|=0, \quad (4.4)$$

то матрица (4.3) блочно-диагональная, и в силу замечания I

отбрасывание k -й строки неизбежно. Если условие (4.4) не выполняется, то, применив к (4.3) $k-1$ левых вращений, получим матрицу

$$C_{01}[M,N] = \left[\begin{array}{c|c|c} C_{01}[I_k, J_{k-1}] & C_{01}[I_k, k] & 0 \\ \hline 0 & C_0[M \setminus I_k, k] & C_0[M \setminus I_k, N \setminus J_k] \end{array}\right], \quad (4.5)$$

в которой блок $C_{01}[I_k, J_k]$ - правая двухдиагональная матрица с теми же сингулярными числами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, что и блок (3.I), причем $0 < \sigma_k \le \varepsilon < \sigma_{k-1}$.

Умножив (4.5) слева на отражение, исключающее столбец $C_{01}[M \setminus I_k, k]$, получим матрицу

$$C_{02}[M,N] = \left[\begin{array}{c|c} C_{01}[I_{k-1}, J_k] & 0 \\ \hline E[k, J_k] \cdot \tilde{a}_k & C_{02}[k, N \setminus J_k] \\ \hline 0 & C_{02}[M \setminus I_k, N \setminus J_k] \end{array}\right] \quad (4.6)$$

По лемме 2 сингулярные числа $\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_{k-1}, \dots, \tilde{\sigma}_1$ блока $C_0[M, J_k]$, а тем самым блоков $C_{01}[M, J_k]$ и $C_{02}[I_k, J_k]$, строго сдвинуты вправо относительно $\sigma_k, \sigma_{k-1}, \dots, \sigma_1$. Если при этом

$$\| C_{02}[k, N \setminus J_k] \| = 0, \quad (4.7)$$

а $\tilde{\sigma}_k \le \varepsilon$, то, как и ранее, выбрасывание k -й строки неизбежно. Если условие (4.7) не выполняется, то с помощью $k-1$ правых вращений и правого отражения, исключающего строку $C_{02}[k, N \setminus J_k]$, снова приведем матрицу (4.6) к виду (4.3). По лемме 2, примененной к транспонированной матрице $C_{02}[I_k, N]$, сингулярные числа $\sigma_k, \sigma_{k-1}, \dots, \sigma_1$ вырезки $C_0[I_k, N]$, а тем самым и блока (3.I), из обновленной матрицы (4.3) строго сдвинуты вправо по отношению к числам $\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_{k-1}, \dots, \tilde{\sigma}_1$ и тем более по отношению к сингулярным числам блока (3.I) из исходной матрицы (4.3).

Таким образом, весь цикл

$$\longrightarrow C_0[M,N] \longrightarrow C_{01}[M,N] \longrightarrow C_{02}[M,N] \longrightarrow, \quad (4.8)$$

состоящий из $2(k-1)$ вращений и двух отражений, придется повторять до тех пор, пока либо σ_k для блока (3.I) не станет больше ε, и тогда можно вернуться к первому алгоритму (п.3.3), либо не выявится неизбежность выбрасывания k-й строки.

В последнем случае лишь единственное сингулярное число матрицы $C_0[I_k,J_k]$ или $C_{02}[I_k,J_k]$ не превосходит ε. Поэтому выбор любой допустимой для них клетки $C[I_{k-1},J_{k-1}]$ будет оптимальным. В случае (4.7) матрицу $C_{02}[I_k,J_k]$ можно преобразовать в левую двухдиагональную, поэтому достаточно рассмотреть случай (4.4) и матрицу $C_0[I_k,J_k]$. Причем в качестве $C[M,N]$ можно выбрать матрицу из любого цикла (4.8), в частности из первого, для которого $C_0[M,N]$ совпадает с (3.2) и клетка $C^{2(k-1)}[I_{k-1},J_{k-1}]$ допустима. Если же в качестве $C[M,N]$ выбирается матрица (4.3), прошедшая хотя бы через один цикл (4.8), то клетка $C_0[I_{k-1},J_{k-1}]$, вообще говоря, недопустима. Но, как известно [4], матрицу $C_0[I_k,J_k]$ можно привести к диагональному виду с помощью итеративного алгоритма. Каждый его шаг, состоящий из $2(k-1)$ вращений, преобразует матрицу $C_\ell[I_k,J_k]$, начиная с $\ell=0$, в правую, а затем снова в левую двухдиагональную матрицу $C_{\ell+1}[I_k,J_k]$ таким образом, что при некотором $\ell \geqslant 0$ клетка $C_{\ell+1}[I_{k-1},J_{k-1}]$ становится допустимой.

Заметим, что этот алгоритм, использующий только вращения, и алгоритм п.2.4, использующий только отражения, являются частными случаями процесса, состоящего из повторения цикла (4.8), соответственно при $k=m\leq n$ и $k=1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку для целей линейного программирования инвариантность сингулярных чисел в преобразуемой матрице несущественна, то эффективность первого алгоритма можно было бы повысить, если не ограничиваться только ортогональными преобразованиями. Например, в случае $|a_k|>\varepsilon$, $s_k(\varepsilon)=k-1$ (п.4.I) k-ю строку можно не отбрасывать, если исключить элемент $b_k\neq 0$ в матрице (2.I), умножив ее слева на треугольный мультипликатор

$$T_k[M,M]=E[M,M]-E[M,k]\cdot u[I_{k-1}]\cdot E[I_{k-1},M], \quad (4.9)$$

где $u[I_{k-1}]$ –решение системы

$$u[I_{k-1}]\cdot C^{2(k-1)}[I_{k-1},J_{k-1}]=b_k\cdot E[k-1,J_{k-1}].$$

Полученная матрица оказывается в ситуации п.2.2, при этом $\|\tilde{A}[k,\tilde{N}]\|\geqslant\varepsilon$. Легко видеть, что преобразование (4.9) перестановочно со всеми преобразованиями (2.6) для $\tau\geqslant k$. Следовательно, в указанном случае его можно в явном виде не делать, а запомнить лишь номер k , чтобы затем в матрице (I.I) исключить элементы b_k для всех номеров $k=k_i$, $i=1,2,\dots,\tilde{t}\leqslant t$, такого типа в порядке их запоминания. В силу распадения матриц, рассматриваемых в п.2.2, дополнительная информация о мультипликаторах (4.9) для всех $k=k_1,k_2,\dots,k_{\tilde{t}}$ составляет не более, чем вектор $u[I]$ размерности $t\leqslant\tau$ со списком $k_1,k_2,\dots,k_{\tilde{t}}$. Описанная тактика равносильна допустимости окаймления (3.I) с учетом лишь условия $|a_k|>\varepsilon$. Следовательно, увеличение порядка t матрицы $C[I,J]$ происходит, вообще говоря, за счет ухудшения ее обусловленности, что вполне согласуется с числом обусловленности матрицы (4.9), бо́льшим I.

ЛИТЕРАТУРА

I. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, I977.

2. ГОДУНОВ С.К. Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, I980.

3. УИЛКИНСОН Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, I970.

4. ВОЕВОДИН В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, I977.

Поступила в ред.-изд. отдел
30.03.I982 г.