Численные методы

УДК 519.3

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

А.Н.Козырев

Метод последовательного проектирования применяют не только для решения систем линейных или выпуклых неравенств [I–4], но и для анализа несовместных систем [5–6]. В настоящей работе этот метод используется для построения набора гиперплоскостей, строго разделяющих (в смысле [7–8]) систему выпуклых замкнутых множеств с пустым пересечением. В работе показано, что используемая модификация метода приводит к решению задачи всегда, когда решение существует.

Пусть задан набор $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ выпуклых замкнутых множеств в R^m, причем $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = \emptyset$. Требуется построить набор гиперплоскостей, строго разделяющих множества P_i, $i=\overline{1,n}$, т.е. построить наборы векторов $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ и чисел $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} c_i > 0; \quad \inf\{\langle g, f_i\rangle \mid g \in P_i\} \geq c_i, \; i=\overline{1,n}, \tag{I}$$

где $\langle g, f_i\rangle$ - скалярное произведение векторов g и f_i. Предполагается, что ортогональное проектирование на каждое из множеств P_i, $i=\overline{1,n}$, осуществляется достаточно эффективно с помощью оператора $\pi_i : R^m \to P_i$. Расстояние между двумя точками или точкой и множеством будем обозначать одним и тем же символом ρ. Тогда для любого $g \in R^m$ по определению оператора π_i имеем

$$\rho(\pi_i(g), g) = |\pi_i(g) - g| = \min_{p \in P_i} |p - g| = \rho(P_i, g).$$

Условие $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = \emptyset$ эквивалентно условию $P \cap Q = \emptyset$, где

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i; \quad Q = \{q = (g, g, \ldots, g) \in (R^m)^n\}.$$

Множества P и Q замкнуты и выпуклы, а операторы ортогонального проектирования на них определяются формулами

$$\pi_P(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (\pi_1(g_1), \pi_2(g_2), \ldots, \pi_n(g_n))$$

и

$$\pi_Q(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i/n, \sum_{i=1}^{n} g_i/n, \ldots, \sum_{i=1}^{n} g_i/n\right).$$

В самом деле, если $\pi_Q(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (\bar{g}, \bar{g}, \ldots, \bar{g})$, то выполняется условие

$$\operatorname{grad}\left(\sum_{i=1}^{n} \langle g_i - \bar{g}, g_i - \bar{g}\rangle\right) = 0,$$

которое эквивалентно равенству $\sum_{i=1}^{n} g_i/n = \bar{g}$. Представление оператора π_P очевидно. Построим последовательности $\{p^k\}_{k=1}^{\infty}$; $\{q^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$, положив

$$q^k = 0, \; p^k = \pi_P(q^k), \; q^{k+1} = \pi_Q(p^k), \; f^k = p^k - q^k, \; k = \overline{0, \infty},$$

и будем искать вектор $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in R^{mn}$ в виде предела последовательности $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Последовательность $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{k \to \infty} |f^k| = \inf_{p \in P,\, q \in Q} |p - q|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть утверждение неверно, т.е. существуют $\tilde{q} \in Q$, $\tilde{p} \in P$, удовлетворяющие условию

$$\lim_{k \to \infty} |f^k| - |\tilde{p} - \tilde{q}| = \Delta > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho(\tilde{q}, \tilde{p}) = \rho(\tilde{q}, P)$. Пусть $\tilde{q}^0 = \tilde{q}$, $\tilde{p}^0 = \tilde{p}$, а для $k > 0$ последовательности $\{\tilde{p}^k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{q}^k\}_{k=0}^{\infty}$ определяются соотношениями $\tilde{q}^k = \pi_Q(\tilde{p}^{k-1})$, $\tilde{p}^k = \pi_P(\tilde{q}^k)$. При любом k справедливо равенство

$$|q^k - \tilde{q}^k|^2 = |p^k - \tilde{p}^k|^2 + 2\langle f^k - \tilde{f}^k, \tilde{p}^k - p^k\rangle + |f^k - \tilde{f}^k|^2,$$

где $\tilde{f}^k = \tilde{p}^k - \tilde{q}^k$. Ввиду выпуклости множества P выполняются неравенства

$$\langle f^k, \tilde{p}^k - p^k \rangle \geq 0, \quad \langle \tilde{f}^k, \tilde{p}^k - p^k \rangle \leq 0,$$

откуда следует оценка

$$\| q^k - \tilde{q}^k \|^2 \geq \| p^k - \tilde{p}^k \|^2 + \| f^k - \tilde{f}^k \|^2.$$

Аналогично из выпуклости Q получается

$$\| p^k - \tilde{p}^k \| \geq \| q^{k+1} - \tilde{q}^{k+1} \|^2 + \| \tilde{q}^{k+1} - \tilde{p}^k - q^{k+1} + p^k \|^2 \geq \| q^{k+1} - \tilde{q}^{k+1} \|^2.$$

Вместе с предыдущей оценкой это неравенство влечет

$$\| q^k - \tilde{q}^k \|^2 \geq \| q^{k+1} - \tilde{q}^{k+1} \|^2 + \| f^k - \tilde{f}^k \|^2 \geq \| q^{k+1} - \tilde{q}^{k+1} \|^2 + \Delta^2,$$

что возможно только при условии $\Delta = 0$. Тем самым утверждение доказано.

Пусть $\overline{P - Q}$ – замыкание множества $P - Q$, тогда непосредственно из утверждения I следует равенство

$$\lim_{k \to \infty} \| f^k \| = \rho(0, \overline{P - Q}).$$

Множество $\overline{P - Q}$ выпукло, поэтому существует единственный вектор $f \in \overline{P - Q}$, удовлетворяющий равенству

$$\rho(0, f) = \rho(0, \overline{P - Q}),$$

причем $f = \lim\limits_{k \to \infty} f^k$. Векторы p^k и q^k для каждого k можно представить в виде

$$p^k = (p_1^k, p_2^k, \ldots, p_n^k), \quad q^k = (g_1^k, g_2^k, \ldots, g_n^k),$$

где $p_i^k \in P_i; \ i = \overline{1,n}; \ g^k \in R^m$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для каждого $i = \overline{1,n}$ последовательность $\{\langle p_i^k, f_i^k \rangle\}_{k=0}^{\infty}$, где $f_i^k = p_i^k - g_i^k$, сходится к числу

$$c_i = \inf \{ \langle p_i, f_i \rangle \mid p_i \in P_i \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{f_i^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к f_i , поэтому для любых $p_i \in P_i$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\bar{k}$, что

$$| \langle p_i, f_i \rangle - \langle p_i, f_i^k \rangle | < \varepsilon$$

при всех $k \geq \bar{k}$. С другой стороны,

$$\langle p_i^k, f_i^k \rangle \leq \langle p_i, f_i^k \rangle$$

в силу выбора $p_i^k \in P_i$, откуда получается оценка

$$\langle p_i^k, f_i^k \rangle \leq \langle p_i, f_i \rangle + \varepsilon, \quad k \geq \bar{k}.$$

Вектор $p_i \in P_i$ и число $\varepsilon > 0$ выбирались произвольно, поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \langle p_i^k, f_i^k \rangle \leq \inf\{\langle p_i, f_i \rangle \mid p_i \in P_i\}. \qquad (2)$$

С другой стороны, $\langle f, q \rangle \leq 0$ для всех $q \in Q$ и потому

$$\sum_{i=1}^{n} \langle p_i^k, f_i^k \rangle \geq |f^k|^2 \geq \inf\{\langle p, f \rangle \mid p \in P\}.$$

Из этого неравенства следует ограниченность последовательностей $\{\langle p_i^k, f_i^k \rangle\}_{k=0}^{\infty}$, $i = \overline{1,n}$, снизу и оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{\lim_{k\to\infty}} \langle p_i^k, f_i^k \rangle \geq \inf\{\langle p, f \rangle \mid p \in P\}. \qquad (3)$$

Одновременное выполнение неравенств (2) и (3) возможно лишь при условии

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \langle p_i^k, f_i^k \rangle = \inf\{\langle p_i, f_i \rangle \mid p_i \in P_i\} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \langle p_i^k, f_i^k \rangle, \; i = \overline{1,n},$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательства было получено равенство $\sum_{i=1}^{n} c_i = \|f\|$, из которого при $0 \notin \overline{P-Q}$ следует неравенство $\sum_{i=1}^{n} c_i > 0$.

Остается убедиться в справедливости равенства $\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$. Для этого достаточно заметить, что $\lim (g^{k+1} - g^k) = 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (p_i^k - g^{k+1} + g^{k+1} - g^k) = \lim_{k\to\infty} (g^{k+1} - g^k).$$

Таким образом, при $0 \notin \overline{P-Q}$ набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ и чисел $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяют условиям (I). Если $0 \in \overline{P-Q}$, то для любого набора векторов $\{f_i\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющего условию $\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$, получим

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle p_i^k - g^k, f_i \rangle = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} \langle p_i^k, f_i \rangle - \langle g, \sum_{i=1}^{n} f_i \rangle\Big) = \lim_{k\to\infty} \sum \langle p_i^k, f_i \rangle,$$

т.е. не существует набора гиперплоскостей, строго разделяющего множества P_i, $i = \overline{1,n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. - Оптимизация, 1972, вып. 5(22), с.11-22.
2. ГУРИН Л.Г., ПОЛЯК Б.Т., РАЙК Э.В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств. - Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1967, т.7, №6, с.1211-1228.
3. ЛОБЫРЕВ А.И. Проекционный метод для решения специальных задач линейного программирования. - Оптимизация, 1979, вып. 23(40), с.61-73.
4. ЕРЕМИН И.И. О системах неравенств с выпуклыми ограничениями в левых частях. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, 30, №2, с.265-278.
5. ЕРЕМИН И.И. О задачах выпуклого программирования с противоречивыми ограничениями. - Кибернетика, 1971, №4, с.124-129.
6. ПЛОТНИКОВ С.В. Методы проектирования для несобственных задач выпуклого программирования. - В кн.: Несобственные модели математического программирования. Ч.II. Деп. ВИНИТИ №2824-80 Деп., с.27-61.
7. ДУБОВИЦКИЙ А.Я., МИЛЮТИН А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. - Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1965, 5, №3, с.395-453.
8. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - Успехи мат. наук, 1976, т.25, вып.5, с.171-201.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.06.82 г.