Выпуск 31(48) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Численные методы

УДК 519.9; 512.8

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ БАЗИСНОЙ МАТРИЦЫ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М.А.Яковлева

Задачи линейного программирования, у которых матрица в каждом своем столбце имеет не более двух отличных от нуля элементов и которые называем двухкомпонентными задачами, в приложениях встречаются достаточно часто. В значительной степени это связано с тем, что удается построить эффективные методы решения таких задач достаточно больших размеров. При этом вопросы устойчивости счета остаются в стороне. Между тем, ставший классическим пример матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

показывает, что двухкомпонентная структура отнюдь не гарантирует избежания вычислительных неприятностей, связанных с плохой обусловленностью матриц. В статье предлагается метод оценки сингулярных чисел квадратной двухкомпонентной матрицы, которая может встречаться в качестве базисной при решении задачи линейного программирования симплекс-методом. Этот метод в некоторой степени обобщает известный подход к вычислению сингулярных чисел двухдиагональной и трехдиагональной матриц [I]. Общая схема включает получение границ расположения сингулярных чисел, построение последовательности Штурма и алгоритм вычисления значений последовательности Штурма в заданной точке

для определения числа перемен знаков. По этой информации определяется число сингулярных чисел, лежащих в некотором промежутке, так что для определения наибольшего и наименьшего сингулярных чисел можно использовать метод дихотомии. Поскольку этот внешний процесс для рассматриваемых в статье матриц ничем не отличается от традиционных двух- и трехдиагональных матриц [I], то остановимся в дальнейшем лишь на перечисленных его составных частях.

I. Обозначения

Базисную двухкомпонентную матрицу будем обозначать через $A[I,J]$, где I - множество номеров ее сторк, J - множество номеров столбцов. Строки и столбцы будем считать занумерованными так, что $I=\{1,2,\ldots,n\}$, $J=\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$. Двухкомпонентной матрице принято сопоставлять граф Γ, у которого множество номеров вершин равно I. Вершины i и k графа считаются связанными дугой, если в матрице имеется столбец (с номером $j\in J$) такой, что элементы $A[i,j]$ и $A[k,j]$ отличны от нуля. Удобно добавить к вершине графа вершину с номером 0 и считать формально столбцы с одной нулевой компонентой также двухкомпонентными. Тогда столбцу j, у которого лишь один элемент $A[i,j]\neq 0$, будет отвечать на гра-графе дуга, связывающая вершину i с вершиной 0.

Будем считать известным тот факт, что граф двухкомпонентной матрицы $A[I,J]$ может распадаться на компоненты связности лишь двух типов. Это может быть либо дерево (с корнем, помещаемым обычно в нулевую вершину), либо компонента связности, включающая в себя цикл с отходящими от него ответвлениями в виде деревьев. Дуги считаем ориентированными так, как это обычно принято [2] и как изображено на рис. I. Для цикла выбирается любое из двух возможных направлений его обхода. В соответствии с изображением графа в виде дерева будем называть *верхней* вершиной дуги j ее начальную вершину и обозначать номер этой вершины через $i_в[j]$. Вторую примыкающую к этой дуге вершину будем называть *нижней* и обозначать ее номер через $i_н[j]$. Заметим, что для каждой вершины i существует единственная дуга j, для которой $i_в[j]=i$, т.е. эта вершина является верхней. Такую дугу будем обозна-

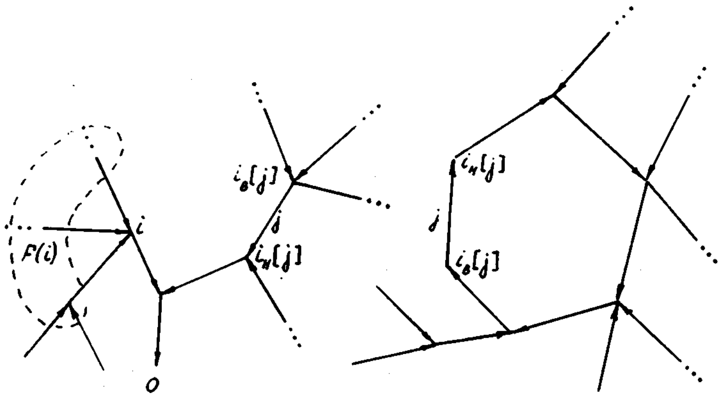

Рис. I

чать через $j[i]$, так что $i_в[j[i]] = i$.

Введем еще обозначение $F(i)$ для множества верхних вершин таких дуг, у которых нижние вершины совпадают с данной вершиной i , т.е. $F(i) = \{k \in I : i_н[j[k]] = i\}$. Наглядно множество $F(i)$ можно представить себе как множество вершин, непосредственно подчиненных вершине i ; $F(i) = \phi$ для концевых вершин i .

Для графа вида дерева i -ветвью называется подграф G_i , имеющий вершину i в качестве корня. Если вершина i концевая, то G_i состоит из одной вершины i .

2. Упорядочение элементов множества

Поскольку перестановка строк и столбцов не меняет сингулярные числа матрицы, то мы вправе по своему усмотрению выбрать упорядочение множеств I и J . Начнем с порядка следования элементов множества I :

$$I \cup \{0\} = \{0, i_1, i_2, \ldots, i_n\}. \qquad (I)$$

Нас будем интересовать такой порядок [3] , при котором в спис-

ке (I) номера вершин каждой i -ветви для графа вида дерева располагаются подряд, начиная с вершины i. Порядок следования столбцов тогда зададим формулой

$$J=\{j[i_1], j[i_2], \ldots, j[i_n]\}.$$

В работе [2] такое упорядочение вершин и дуг названо у с и л е н н ы м.

Пусть теперь матрице $A[i,j]$ отвечает связный граф, включающий в себя цикл. Этот цикл можно рассматривать как обобщенный корень дерева, и мы потребуем, чтобы его вершины были расположены подряд в порядке, обратном выбранному обходу цикла, и помещены в начало списка. Какую вершину цикла выбрать первой, значения не имеет.

3. Переход к симметричной матрице

Напомним, что для любой $n \times n$ матрицы B может быть получено представление $B=UKV$, где U и V - ортогональные матрицы ($U^*U=E, V^*V=E$), а матрица K диагональная. Такое представление матрицы B называется ее сингулярным разложением, а числа k_i, $i=1,2,\ldots,n$, стоящие на диагонали матрицы K - сингулярными числами матрицы B. При этом наименьшее из этих чисел $\sigma_1(B)$ и наибольшее $\sigma_n(B)$ играют особую роль при изучении матрицы B. В частности,

$$\min_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}=\sigma_1(B), \quad \|B\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}=\sigma_n(B).$$

Мы будем использовать также тот факт, что симметричная матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

имеет своими собственными значениями как сингулярные числа матрицы B, так и противоположные им по знаку [I]. Нам будет удобнее перейти к исследованию собственных чисел симметричной матрицы, получающейся по схеме (2) их двухкомпонентной матрицы $A[I,J]$. Такая матрица имеет в два раза большие размеры, чем исходная, но строение ее чрезвычайно просто. Всюду и в дальнейшем под матрицей $A[I,J]$ будем подразумевать нераспадающуюся матрицу, которой отвечает связный граф одного

из двух возможных видов.

Пусть элементы множеств I и J расположены в порядке, противоположном тому, который устанавливается усиленным упорядочением (I). Отвечающая такому порядку матрица $A[I,J]$ оказывается нижней треугольной и ее естественно рассматривать как обобщение двухдиагональной, у которой поддиагональ "расползлась" по нижней части матрицы. Чтобы избавиться от сложной индексации, будем считать, что строки и столбцы полученной матрицы перенумерованы в естественном порядке. Примером может служить следующая матрица (элемент b_n, обведенный кружочком, не следует пока принимать во внимание):

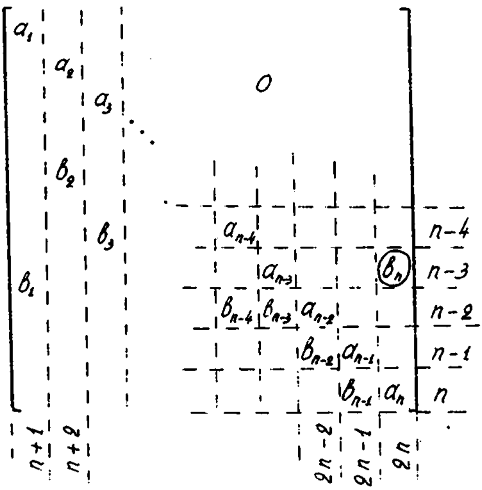

Рис. 2

Заметим, что при такой нумерации столбец с номером $n+i$ имеет отличными от нуля диагональную компоненту a_i на месте i и компоненту b_i на месте $i_н[j[i]]=i_н[n+i]$. На рис.3 слева изображена часть графа, отвечающая правому нижнему углу матрицы, изображенной на рис. 2. Если бы в последнем столбце матрицы присутствовал отличный от нуля элемент b_n, то ей отвечал бы граф с циклом. В нашем примере $2n$-я дуга имела бы верх-

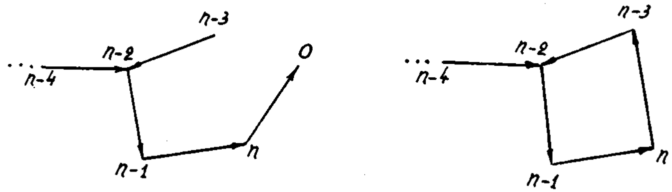

Рис. 3

ней вершиной не 0, а вершину $n-3$, как изображено на рис. 3 справа.

Рассмотрим теперь симметричную матрицу

$$S[J\cup I, J\cup I]=\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & A^*[J,I] \\ \hline A[I,J] & 0 \end{array}\right]}_{J\cup I}\Bigg\}J\cup I$$

и переставим в ней еще раз строки и столбцы, положив

$$M=J\cup I=\{1,n+1,2,n+2,\dots,n,2n\}. \qquad (3)$$

После такой перестановки матрица $S[J\cup I, J\cup I]$ примет вид

$$S[M,M]=\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc}
0 & a_1 & & & & & & & \\
a_1 & 0 & & & b_1 & & & & \\
\hline
 & & 0 & a_2 & b_2 & & & & \\
 & & a_2 & 0 & & & & & b_n \\
\hline
 & & & & \ddots & & & & \\
 & b_1 & & b_2 & & 0 & a_{n-1} & & \\
 & & & & & a_{n-1} & 0 & b_{n-1} & \\
 & & & & & & b_{n-1} & 0 & a_n \\
 & & & & b_n & & & a_n & 0
\end{array}\right]\begin{array}{l} 1 \\ n+1 \\ 2 \\ n+2 \\ \vdots \\ \\ \\ n \\ 2n \end{array}$$

Матрице $S[M,M]$ будем сопоставлять граф Γ_S с множеством M номеров вершин и множеством M номеров дуг. При этом будем считать, что каждый элемент главной диагонали (нулевой)

связан с элементом (a_i или b_i), стоящим ниже главной диагонали. Что касается дуги, отвечающей последнему столбцу матрицы $S[M, M]$, то в случае $b_n \neq 0$ она связывает вершину $2n$ с вершиной i^*, где через $i^* (i^* \in I)$ обозначен номер строки матрицы $S[M, M]$, на пересечении которой с последним столбцом стоит элемент b_n. Если же $b_n = 0$, то эта дуга связывает вершину $2n$ с вершиной 0. Легко видеть, что граф Γ_S получается из графа Γ соответствующей двухкомпонентной матрицы $A[I, J]$ заменой каждой его $(n+i)$ -й дуги

$$i \xrightarrow{n+i} i_H[n+i]$$

на две дуги

$$i \xrightarrow{i} n+i \xrightarrow{n+i} i_H[n+i]$$

с номерами i и $n+i$. Заметим, что при этом для всех $k \in M$ оказывается $j[k] = k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Не составляет исключения и минимальный цикл в двухкомпонентной задаче, связывающий только две вершины n и $n-1$.

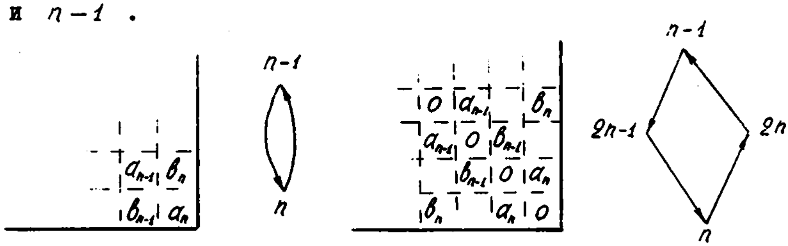

Рис. 4

На рис 4 изображены отвечающие такому циклу части матриц $A[I, J]$ и $S[M, M]$, а также соответствующие участки графов Γ и Γ_S.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Порядок (3) является усиленным порядком для графа Γ_S.

4. Оценка сверху собственных чисел матрицы $S[M,M]$

Если $X[M]$ – собственный вектор матрицы $S[M,M]$, то соответствующее ему собственное число λ определяется равенством

$$\lambda = \frac{(S[M,M]\cdot X[M,M])^T\cdot X[M]}{X^T[M]\cdot X[M]}.$$

Ввиду симметричности матрицы $S[M,M]$ сумма, стоящая в числителе, содержит одинаковые пары слагаемых: $S[i,i_н[i]]\times \times X[i_н[i]]\cdot X[i]$ и $S[i_н[i],i]\cdot X[i]\cdot X[i_н[i]]$, и так как $S[i,i_н[i]]=a_i$, $i\in I$, и $S[j,i_н[j]]=b_{j-n}$, $j\in J$, то

$$P = 2\sum_{i\in I} a_i X[i]\cdot X[i_н[i]] + \sum_{j\in J} b_{j-n}\cdot X[j]\cdot X[i_н[j]].$$

Из этой формулы получаем оценку

$$\begin{aligned} P \le \sum_{i\in I}|a_i|(X[i])^2 + \sum_{i\in I}|a_i|(X[i_н[i]])^2 + \\ + \sum_{j\in J}|b_{j-n}|(X[j])^2 + \sum_{j\in J}|b_{j-n}|(X[i_н[j]])^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим теперь граф Γ_S. Если $i\in I$, то $F(i)\subset J$, и для всех $k\in F(i)$ оказывается $i_н[k]=i$ (см. рис 5). Ввиду этого

$$J = \begin{cases} \{\bigcup_{i\in I} F(i)\}\cup\{2n\} & \text{для графа без цикла,} \\ \bigcup_{i\in I} F(i), & \text{если граф содержит цикл.} \end{cases}$$

Кроме того, $I=\bigcup_{j\in J}\{j-n\}$, так что

$$\sum_{j\in J}|b_{j-n}|(X[i_н[j]])^2 = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{k\in F(i)}|b_{k-n}|\Big)(X[i])^2, \quad (5)$$

$$\sum_{i\in I}|a_i|(X[i_н[i]])^2 = \sum_{j\in J}|a_{j-n}|(X[j])^2.$$

Заметим, что формула (5) справедлива независимо от того, содержит граф цикл или нет. Дело в том, что если цикла нет, то

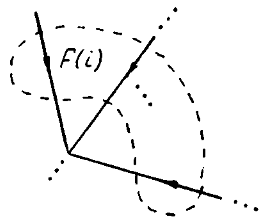

Рис. 5

дополнительное слагаемое, отвечающее индексу $j=2n$, в левой сумме фактически отсутствует, так как в этом случае $b_n = 0$. Окончательно неравенство (4) может быть переписано в следующем виде:

$$P \leq \sum_{i\in I}(|a_i| + \sum_{k\in F(i)} |b_{k-n}|)\cdot(X[i])^2 + \sum_{j\in J}(|a_{j-n}| + |b_{j-n}|)\cdot(X[j])^2.$$

Если ввести обозначение

$$L = max\{\max_{i\in I}\{|a_i| + \sum_{k\in F(i)}|b_{k-n}|\}, \max_{j\in J}\{|a_{j-n}| + |b_{j-n}|\}\}, \qquad (6)$$

то получим, что $P \leq L\cdot\sum_{i\in M}(X[i])^2$. Таким образом,

$\lambda = P / \sum_{i\in M}(X[i])^2 \leq L.$

Из формулы (6) следует, что фактически для вычисления верхней границы собственных чисел матрицы $S[M,M]$ (или, что то же самое, верхней границы сингулярных чисел матрицы $A[I,J]$) следует просуммировать независимо по строкам и столбцам абсолютные величины элементов матрицы $A[I,J]$ и выбрать из полученных сумм максимальную.

5. Вычисление значения характеристического многочлена матрицы $S[M,M]$

Пусть имеется симметричная матрица $S[M,M]$ (с упорядоченными по правилу (3) элементами множества M) и отвечающий ей граф Γ_S. Прежде всего удалим из графа дугу с номером $2n$, отвечающую последнему столбцу матрицы. Если граф содержит цикл, то это будет дуга, соединяющая вершины $2n$ и i^*, в противном случае она связывает вершину $2n$ с нулевой вершиной. Полученный после этой операции граф G_{2n} будет деревом с корнем в вершине $2n$. Обозначим через $M_k \subset M$ множество номеров вершин, принадлежащих k-ветви графа G_{2n}, и сопоставим каждой его вершине k характеристический многочлен $f_k(\lambda)$ матрицы $S[M_k,M_k]$. Многочлен $f_{2n}(\lambda)$ будет, очевидно, характеристическим для всей матрицы $S[M,M]$.

Заметим, что элементы множества M_k располагаются в списке (3) подряд, причем последним стоит номер k. Ввиду этого $S[M_k, M_k]$ представляет собой диагональный блок матрицы $S[M,M]$, у которого последняя строка (столбец) имеет номер k.

Выпишем формулы для последовательного вычисления многочленов $f_k(\lambda)$, причем выбор очередного номера k должен быть подчинен порядку (3).

Определим для $k \in M = I \cup J$ многочлены $\hat{f}_k(\lambda)$, положив

$$\hat{f}_k(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{, если вершина } k \text{ концевая (в графе } G_{2n}\text{),} \\ \prod\limits_{j \in F(k)} f_j(\lambda) & \text{для неконцевых вершин (графа } G_{2n}\text{).} \end{cases}$$

Вид формулы для вычисления $f_k(\lambda)$ зависит от того, принадлежит ли k множеству I или J. Рассмотрим эти случаи отдельно.

I. Пусть $k \in I$. В этом случае

$$f_k(\lambda) = -\hat{f}_k(\lambda) \cdot [\lambda + \sum_{j \in F(k)} b^2_{j-n} \frac{\hat{f}_j(\lambda)}{f_j(\lambda)}]. \qquad (7)$$

Действительно, для концевых вершин $F(k) = \varnothing$, $\hat{f}_k(\lambda) = 1$, и мы имеем $f_k(\lambda) = -\lambda$. Пусть теперь вершина k не является концевой. На рис. 6 изображена структура диагонального блока матрицы, отвечающего такой вершине, и соответствующая часть графа. Через $j_1, j_2, \dots, j_z$ обозначены элементы множества $F(k) \subset \subset J$. Разложив определитель такой матрицы по элементам последней строки и последнего столбца, получим формулу (7). Предписанным порядком перебора вершин обеспечивается возможность вычисления очередного $f_k(\lambda)$, так как многочлены для всех прочих вершин k-ветви к этому моменту уже вычислены.

II. Пусть теперь $k = j \in J \setminus \{2n\}$. Соответствующий блок матрицы имеет при таком j иную структуру (рис. 7). Как и в предыдущем случае, раскроем определитель по элементам последней строки и последнего столбца и найдем, что

$$f_j(\lambda) = (-\lambda) \cdot \hat{f}_j(\lambda) - a^2_{j-n} \cdot \hat{f}_{j-n}(\lambda). \qquad (8)$$

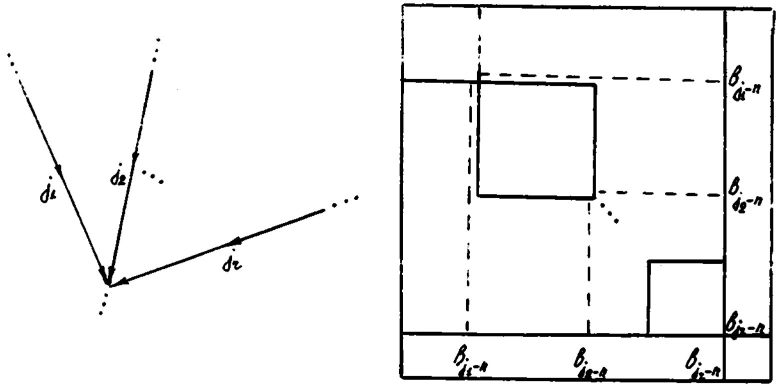

Рис.6

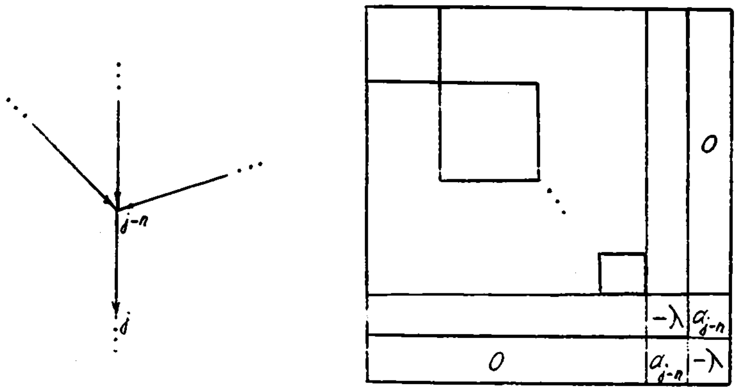

Рис.7

Напомним, что $\hat{f}_j(\lambda) = f_{j-n}(\lambda)$ для $j \in J$, и блок, отвечающий вершине $j-n$, имеет структуру, изображенную на рис.6.

III. Пусть теперь $k=2n$. Если $b_n = 0$, то мы оказываемся в условиях предыдущего случая. Если же $b_n \neq 0$, то структура последнего блока $S[M_{2n}, M_{2n}]$ (всей матрицы) оказывается нестандартной (рис.8). Аналогично предыдущему найдем

$$f_{2n}(\lambda) = (-\lambda)\cdot\hat{f}_{2n}(\lambda) - a_n^2\cdot\hat{f}_n(\lambda) - b_n^2\cdot\varphi_n(\lambda),$$

где через $\varphi_n(\lambda)$ обозначен характеристический многочлен матрицы $S[M\setminus(\{2n\}\cup\{i^*\}), M\setminus(\{2n\}\cup\{i^*\})]$. Эта матрица, вообще говоря, распадается на ряд несвязанных блоков, для каждого из

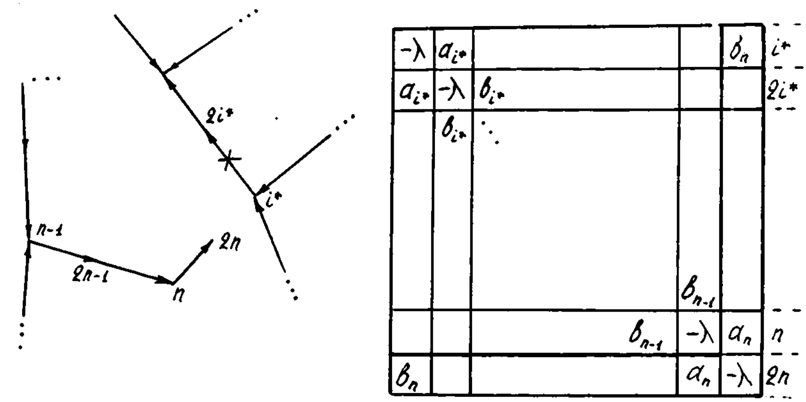

Рис.8

которых, согласно приведенному выше правилу, может быть построен соответствующий граф. Такими графами будут являться отдельные части графа G_n , а именно, ветвь G_n^*, отличающаяся от ветви G_n тем, что в ней вершина $2i^*$ является концевой (столбец, а следовательно, и ребро с номером i^* отсутствуют), а также "оторвавшиеся" j -ветви G_j для $j \in F(i^*)$. Следовательно, $\varphi_n(\lambda) = \varphi_n^*(\lambda) \cdot \hat{f}_{i^*}(\lambda)$, где $\varphi_n^*(\lambda)$ - характеристический многочлен, отвечающий ветви G_n^* . К моменту вычисления $\varphi_n(\lambda)$ нам уже известно значение $\hat{f}_{i^*}(\lambda)$, для нахождения же $\varphi_n^*(\lambda)$ следует стандартным способом по формулам (7) и (8) найти последовательно многочлены $\varphi_{2i^*}^*(\lambda), \ldots, \varphi_{2n-1}^*(\lambda)$, $\varphi_n^*(\lambda)$, имея в виду, что вершина $2i^*$ концевая, и, следовательно, $\varphi_{2i^*}^*(\lambda) = -\lambda$.

Заметим, что повторное прохождение вершин цикла является обычным при действиях с двухкомпонентной матрицей.

6. Обобщение последовательности Штурма

Для подсчета числа корней некоторого многочлена $g(x)$, расположенных левее заданной точки x_0 , принято строить последовательность многочленов, удовлетворяющую определенным требованиям (последовательность Штурма), и исследовать знаки многочленов этой последовательности в точке x_0 [1].

Откажемся от линейной упорядоченности вспомогательных многочленов и будем считать, что каждый из них соотнесен вершине некоторого ориентированного графа, имеющего вид дерева, с множеством $I=\{1,2,\ldots,z\}$ номеров вершин и с корнем в вершине z .

Пусть также задан многочлен $g(x)$ и многочлены

$$g_k(x),\ k\in I, \tag{9}$$

причем $g_r(x)=g(x)$. Положим, как и раньше,

$$\hat{g}_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ - концевая вершина,} \\ \prod\limits_{i\in F(k)} g_i(x), & \text{если } k \text{ не концевая вершина.} \end{cases}$$

Будем называть **числом перемен знака** многочленов (9) в точке x_0 число отрицательных произведений среди $g_k(x)\cdot\hat{g}_k(x_0)$, $k\in I$.

Очевидно, что разность между числом перемен знака многочленов (9) в точке x_0 и при $x=-\infty$ будет совпадать с числом корней многочлена $g(x)$, лежащих левее точки x_0, если выполняются следующие условия.

I. С возрастанием x при переходе через корень многочлена $g_r(x)=g(x)$ число перемен знака многочленов (9) увеличивается на единицу.

2. При переходе через корень любого из остальных многочленов $g_k(x)$, $k\in I\setminus\{r\}$, число перемен знака многочленов (9) не меняется.

Пусть мы имеем теперь многочлены (9), удовлетворяющие следующим требованиям.

I$'$. Для $k\in I$ произведение $g_k(x)\cdot\hat{g}_k(x)$ меняет знак с $+$ на $-$ при переходе через корень многочлена $g_k(x)$, т.е. $g_k'(x')\cdot\hat{g}_k(x')<0$, если $g_k(x')=0$.

2$'$. Для $k\in I$ произведение $g_k(x)\cdot\hat{g}_k(x)$ меняет знак с $-$ на $+$ при переходе черех корень многочлена $\hat{g}_k(x)$, т.е. $g_k(x'')\cdot\hat{g}_k'(x'')>0$, если $\hat{g}_k(x'')=0$.

Нетрудно проверить, что если для многочленов (9) выполнены условия I$'$, 2$'$ то выполнены и условия I,2. Действительно, пусть $k\in I\setminus\{r\}$ и $g_k(x')=0$. Обозначим через s вершину, в непосредственном подчинении которой находится вершина k, т.е. $s=i_H[j[k]]$. По условию I$'$ в достаточно малом промежутке $[x'-\varepsilon, x')$ произведение $g_k(x)\cdot\hat{g}_k(x)>0$. В то же время x' является корнем многочлена $\hat{g}_s(x)=\prod\limits_{i\in F(s)} g_i(x)$, поскольку $k\in F(s)$, и по условию 2$'$ в промежутке $[x'-\varepsilon, x')$ произведение $g_s(x)\cdot\hat{g}_s(x)<0$. Проведя аналогичные рассуждения, найдем, что в промежутке $(x', x'+\varepsilon]$ произведение $g_k(x)\cdot\hat{g}_k(x)<0$ и $g_s(x)\cdot\hat{g}_s(x)>0$. Таким образом, изменений в числе перемен знака при переходе через корень x' не происходит.

Если же x' является корнем многочлена $g_k(x)$, то при переходе через него к числу перемен знака многочленов (9) добавляется одна перемена, так как произведение $g_k(x)\cdot\hat{g}_k(x)$ при переходе через корень x' становится отрицательным (условие I').

Для практических целей проверку условий I', 2' удобно заменить проверкой одного условия:

$$\hat{g}_k(x)\cdot g_k'(x)-\hat{g}_k'(x)\cdot g_k(x)<0\,,\quad k\in I. \tag{10}$$

Вернемся теперь к рассмотрению характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы $S[M,M]$. Выше был определен граф G_{2n} вида дерева с корнем в вершине $r=2n$, и каждой его вершине k был поставлен в соответствие многочлен $f_k(\lambda)$, причем $f_{2n}(\lambda)=f(\lambda)$. Для того чтобы многочлены

$$f_k(\lambda),\quad k\in M, \tag{11}$$

могли быть использованы для подсчета числа корней $f(\lambda)$, лежащих левее заданной точки x_0, следует проверить, выполнено ли для них условие (10).

Доказательство справедливости условия (10) проведем индуктивно. Если вершина k является концевой, то $f_k(\lambda)=-\lambda$, $\hat{f}_k(\lambda)=1$, и условие (10), очевидно, выполнено. Предположим теперь, что k не является концевой вершиной, и что условие (10) справедливо для всех вершин k-ветви, исключая саму вершину k. Для проверки выполнения условия (10) в вершине k нам снова придется рассмотреть отдельно случаи принадлежности номера k множеству I или J.

I. Пусть $k\in I$. Тогда

$$\hat{f}_k(\lambda)\cdot f_k'(\lambda)-\hat{f}_k'(\lambda)\cdot f_k(\lambda)=\hat{f}_k(\lambda)\cdot\Big[-\hat{f}_k'(\lambda)\cdot\lambda-\hat{f}_k'(\lambda)\cdot\sum_{j\in F(k)}b_{j-n}^2\,\frac{\hat{f}_j(\lambda)}{f_j(\lambda)}-$$

$$-\hat{f}_k(\lambda)-\hat{f}_k(\lambda)\cdot\sum_{j\in F(k)}\frac{\hat{f}_j'(\lambda)\cdot f_j(\lambda)-\hat{f}_j(\lambda)\cdot f_j'(\lambda)}{f_j^2(\lambda)}\Big]-$$

$$-\hat{f}_k'(\lambda)\cdot\Big[-\lambda\cdot\hat{f}_k(\lambda)-\hat{f}_k(\lambda)\cdot\sum_{j\in F(k)}b_{j-n}^2\,\frac{\hat{f}_j(\lambda)}{f_j(\lambda)}\Big]=$$

$$=-\hat{f}_k^2(\lambda)+\hat{f}_k^2(\lambda)\cdot\sum_{j\in F(k)}\frac{b_{j-n}^2}{f_j^2(\lambda)}\,\big(\hat{f}_j(\lambda)\cdot f_j'(\lambda)-\hat{f}_j'(\lambda)\cdot f_j(\lambda)\big)<0.$$

Мы воспользовались формулой (7). Неравенство оказалось выполненным, так как все выражения, стоящие в круглых скобках под знаком суммы, меньше нуля согласно индуктивному предположению.

II. Пусть теперь $k \in J \setminus \{2n\}$. Если при проведении вычислений заменить $f_k(\lambda)$ на выражение, стоящее в правой части формулы (8), а также воспользоваться равенством $\hat{f}_k(\lambda)=\hat{f}_{k-n}(\lambda)$, которое имеет местоо при $k \in J$, то найдем, что

$$\hat{f}_k(\lambda)\cdot f_k'(\lambda)-\hat{f}_k'(\lambda)\cdot f_k(\lambda)=\hat{f}_k(\lambda)\cdot[-\hat{f}_k(\lambda)-\lambda\cdot\hat{f}_k'(\lambda)-$$

$$-a_{k-n}^2\,\hat{f}_{k-n}'(\lambda)]-\hat{f}_k'(\lambda)\cdot[-\lambda\cdot\hat{f}_k(\lambda)-a_{k-n}^2\cdot\hat{f}_{k-n}(\lambda)]=$$

$$=-\hat{f}_k^2(\lambda)+a_{k-n}^2(-\hat{f}_k(\lambda)\cdot\hat{f}_{k-n}'(\lambda)+\hat{f}_k'(\lambda)\cdot\hat{f}_{k-n}(\lambda))=$$

$$=\hat{f}_k^2(\lambda)+a_{k-n}^2(\hat{f}_{k-n}(\lambda)\cdot f_{k-n}'(\lambda)-\hat{f}_{k-n}'(\lambda)\cdot f_{k-n}(\lambda))<0.$$

III. Если $k=2n$, но при этом $b_n=0$, то мы находимся в условиях предыдущего случая. Пусть $k=2n$ и $b_n\neq 0$. В этом случае

$$\hat{f}_{2n}(\lambda)\cdot f_{2n}(\lambda)-\hat{f}_{2n}'(\lambda)\cdot f_{2n}(\lambda)=\hat{f}_{2n}(\lambda)\cdot[-\hat{f}_{2n}(\lambda)-\lambda\cdot\hat{f}_{2n}'(\lambda)-$$

$$-a_n^2\cdot\hat{f}_n'(\lambda)-b_n^2\cdot\varphi_n'(\lambda)]-\hat{f}_{2n}'(\lambda)\cdot[-\lambda\cdot\hat{f}_{2n}(\lambda)-a_n^2\cdot\hat{f}_n(\lambda)-b_n^2\cdot\varphi_n(\lambda)]=$$

$$=-\hat{f}_{2n}^2(\lambda)+a_n^2[f_n'(\lambda)\cdot\hat{f}_n(\lambda)-f_n(\lambda)\cdot\hat{f}_n'(\lambda)]+$$

$$+b_n^2[f_n'(\lambda)\cdot\varphi_n(\lambda)-f_n(\lambda)\cdot\varphi_n'(\lambda)].$$

Для того чтобы убедиться в отрицательности правой части этого равенства, осталось показать, что $f_n'(\lambda)\cdot\varphi_n(\lambda)-f_n(\lambda)\cdot\varphi_n'(\lambda)<$ <0, так как неравенство $f_n'(\lambda)\cdot\hat{f}_n(\lambda)-f_n(\lambda)\cdot\hat{f}_n'(\lambda)<0$ предполагается выполненным. Напомним, что $\varphi_n(\lambda)$ является характеристическим многочленом матрицы $S[M_n\setminus\{i^*\},M_n\setminus\{i^*\}]$, где M_n - множество номеров вершин графа G_n, который имеет вид дерева с корнем в вершине n. В матрице $S[M_n\setminus\{i^*\},M_n\setminus\{i^*\}]$ можно ввести такой порядок следования строк и столбцов, чтобы строка i^* и столбец i^* оказались последними, а отвечающий ей граф $\bar{G}_{i^*}$ получался бы из графа G_n перенесением корня в вершину i^* (т.е. изменением ориентации дуг, лежащих в G_n на пути из вершины i^* в вершину n [2]). Обозначим через $h_k\,(k\in M_n)$ соответствующие характеристические многочлены для вершин графа $\bar{G}_{i^*}$. Очевидно, что $f_n(\lambda)=h_{i^*}(\lambda)$, $\varphi_n(\lambda)=\hat{h}_{i^*}(\lambda)$, и тогда $f_n'(\lambda)\cdot\varphi_n(\lambda)-f_n(\lambda)\cdot\varphi_n'(\lambda)=$

$= h'_{i*}(\lambda)\cdot \hat{h}_{i*}(\lambda) - h_{i*}(\lambda)\cdot \hat{h}'_{i*}(\lambda) < 0.$

В заключение подсчитаем число перемен знака многочленов (II) при $\lambda = -\infty$. Для всех $k \in M$ старшие члены многочленов $f_k(\lambda)$ равны $(-\lambda)^k$ и ввиду этого $f_k(-\infty) > 0$. Так как для концевых вершин k (по определению) тоже $\hat{f}_k(\lambda) = 1 > 0$, то число перемен знака многочленов (II) при $\lambda = -\infty$ равно нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОДУНОВ С.К. Решение систем линейных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980.
2. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А., ЯКОВЛЕВА М.А. Численные методы линейного программирования. - М.: Наука, 1977.
3. КИМ К.В. Об эффективности решения двухкомпонентных задач линейного программирования. - Экономика и мат. методы, 1974, т.10, вып. 3, с.621-631.

Поступила в ред.-изд. отдел
03.04. 1982 г.