Выпуск 3I(48) О П Т И М И З А Ц И Я 1983 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.863

ЭФФЕКТИВНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ДИСКРЕТНОЙ ОДНОПРОДУКТОВОЙ МОДЕЛИ С ДЕЗАГРЕГИРОВАННЫМИ ФОНДАМИ

В.Д.Матвеенко

Однопродуктовые динамические модели с различающимися по времени ввода фондами позволяют более точно, по сравнению с моделями с агрегированными фондами, учитывать влияние НТП на процессы глобального развития. Для такого рода моделей с непрерывным временем Л.В.Канторович и др. [I,2] рассматривали задачу оптимального распределения трудовых ресурсов по фондам. В [3] описана подобная дискретная модель для изучения оптимального распределения национального дохода.

В каждом периоде времени $t = 0, 1, \dots$ создается новая группа производственных фондов, которая вначале имеет некоторый объем x_0^t. С учетом коэффициентов износа, которые предполагаются известными, определяются ее объемы $x_1^{t+1}, x_2^{t+2}, \dots, x_m^{t+m}$ в последующие m периодов, где m – максимальный физически возможный срок службы фондов.

Производственная функция отражает уровень НТП, достигнутый к тому периоду, когда создана группа фондов, но может для нее изменяться с течением времени. Изменения предполагаются известными. Для группы i в период t (эта группа создана в период $t-i$) производственная функция имеет вид $F_i^t(x_i^t, w_i^t) = x_i^t \cdot f_i^t(w_i^t)$. Функции f_i^t, $i = 0, 1, \dots, m$, $t = 0, 1, \dots$, предполагаются строго вогнутыми и дифференцируемыми, $f_i^t(0) = 0$, $\dfrac{f_i^t(w_i^t)}{w_i^t} \xrightarrow[w_i^t \to \infty]{} 0$.

Управляющий параметр $w_i^t \geq 0$ интерпретируется как заработная плата на единицу фондов i.

Модель определяется соотношениями:

$$M^t = \sum_{i=0}^{m} x_i^t f_i^t(w_i^t),$$

$$M^{t-1} = x_o^t + \sum_{i=0}^{m} x_i^t w_i^t, \quad x_o^t \geq 0, \tag{I}$$

$$x_{i+1}^{t+1} = \nu_i^t x_i^t, \quad i = 0, \ldots, m-1; \quad t = 0, 1, \ldots$$

Здесь $i = 0, 1, \ldots, m$ - номера групп производственных фондов, функционирующих в период с номером t, $0 < 1 - \nu_i^t < 1$ - коэффициент износа для группы i в период t, M^t - суммарный выпуск в период t.

Состоянием модели в период называется вектор

$$S^t = (x_1^t, \ldots, x_m^t, M^{t-1}).$$

Предполагается, что для начального периода 0 известно состояние

$$S^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0, M^{-1}) \geq 0.$$

Используя для векторов a, b обозначение $a \geq b$, мы будем иметь в виду, что $a \neq b$. Набор $w^t = (w_0^t, \ldots, w_m^t) \geq 0$ назовем управлением.

Система (I) определяет в период t многозначное отображение a_t, которое ставит в соответствие каждому состоянию S^t множество $a_t(S^t)$ состояний, в которые модель может перейти из S^t при различных управлениях w^t таких, что

$$M^{t-1} \geq \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t.$$

Траекторией с началом S^0 называется последовательность состояний $\{S^t\}_{t=0}^{\infty}$ такая, что $S^{t+1} \in a_t(S^t)$, $t = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем, обозначая бесконечные последовательности, мы не будем указывать, что индекс меняется от 0 до ∞. Аналогично траектории определяется N-траектория $\{S^t\}_{t=0}^{N}$ с началом S^0. Она называется эффективной, если не существует N-траектории $\{\bar{S}^t\}_{t=0}^{N}$ с началом S^0 такой, что $\bar{S}^N \geq S^N$.

Траектория $\{S^t\}$ с началом S^0 называется эффективной, если N-траектория $\{S^t\}_{t=0}^{N}$ эффективна для любого $N \geq 1$. Последовательность управлений $\{w^t\}$ назовем управляющей последовательностью. Легко видеть, что всякой траектории соответствует управляющая последовательность; будем говорить, что траектория определяется этой последовательностью

В предлагаемой работе продолжается начатое в [3] исследование модели (I). Рассматривается вопрос о выборе управляющей последовательности, определяющей эффективную траекторию. В §2 показано, что множество эффективных траекторий модели (I) совпадает с множеством эффективных траекторий некоторой расширенной модели из класса моделей Неймана – Гейла. Известно [4], что в моделях этого класса для каждой эффективной траектории $\{\bar{S}^t\}$ с началом $\bar{S}^0 > 0$ существует последовательность векторов цен $\{p^t\}$ такая, что состояние $\bar{S}^{t+1}$ определяется по $\bar{S}^t$ как решение задачи локальной оптимизации по ценам p^{t+1}. В §I показано, что решение этой задачи определяется управлением, которое, если M^{t-1} достаточно велико, зависит лишь от p^{t+1} и не зависит от $\bar{S}^t$. Возникает вопрос: не будет ли управляющая последовательность эффективной траектории определяться некоторой последовательностью цен, независимо от начального состояния $\bar{S}^0$? Ответ оказывается положительным, если управляющая последовательность продуктивна (§4).

§I. Локальная оптимизация

Пусть для некоторого $t \geq 0$ известны состояние $\bar{S}^t$ и $(m+1)$-мерный вектор $p^{t+1} \geq 0$, называемый вектором цен. Требуется найти такое $\bar{S}^{t+1} \in a_t(\bar{S}^t)$, что

$$p^{t+1}\bar{S}^{t+1} = \max_{S^{t+1} \in a_t(\bar{S}^t)} p^{t+1} S^{t+1}.$$

Будем говорить, что $\bar{S}^{t+1}$ является решением задачи локальной оптимизации (ЛО) по ценам p^{t+1}. Определение состояния $\bar{S}^{t+1}$ равносильно определению управления w^t, при котором модель переходит из состояния $\bar{S}^t$ в $\bar{S}^{t+1}$.

Будем говорить, что такое управление w^t порождается ценами p^{t+1}, а состояние S^{t+1} порождается ценами p^{t+1} и определяется управлением w^t.

Задача Л0, как мы увидим, сводится к известной задаче распределения ресурса:

$$\max_y \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y_i), \tag{2}$$

$$y_i \geq 0, \quad y=(y_1,\dots,y_n), \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = const,$$

где φ_i - вогнутые дифференцируемые функции, $i=1,\dots,n$. В [5], по существу, доказана

ЛЕММА I. Вектор y^* является решением задачи (2) тогда и только тогда, когда существует такое число $\beta \geq 0$, что

$$\varphi_i'(y_i^*)=\beta \quad \text{при } y_i^* \neq 0,$$
$$\varphi_i'(0) \leq \beta \quad \text{при } y_i^*=0, \ i=1,\dots,n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Управление w^t называется правильным, если существует такое число $\beta_t > 0$, что

$$\frac{df_i^t(w_i^t)}{dw_i}=\beta_t \quad \text{при } w_i^t \neq 0,$$
$$\frac{df_i^t(0)}{dw_i} \leq \beta_t \quad \text{при } w_i^t=0, \ i=0,\dots,m.$$

Геометрическая и экономическая интерпретация были даны в [3]. Пусть $w^t, \bar{w}^t$ - некоторые управления. Будем говорить, что управление w^t порождается управлением $\bar{w}^t$, если управление w^t определяется по $\bar{S}^t, \bar{w}^t$ следующим образом:

1) если $\sum_{i=1}^{m} x_i^t \bar{w}_i^t \leq M^{t-1}$, то $w^t=\bar{w}^t$;

2) если $\sum_{i=1}^{m} x_i^t \bar{w}_i^t > M^{t-1}$, то w^t - правильное управление такое, что $\sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t = M^{t-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $p_1^{t+1} \leq \frac{1}{v_0^t} \frac{df_0^t(0)}{dw_0}$. В задаче Л0 существует единственное управление $\bar{w}^t$ такое, что если управление w^t порождается ценами p^{t+1}, то оно порождается управлением $\bar{w}^t$. Управления $w^t, \bar{w}^t$

правильные, причем $\bar{w}^t$ зависит лишь от ρ^{t+1} и не зависит от $\bar{S}^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последняя (соответствующая M^t) компонента вектора цен $\rho_M^{t+1} \neq 0$. Пронормируем вектор цен так, что $\rho_M^{t+1} = 0$. Решение задачи ЛО при этом не изменится. Заметим теперь, что в множестве $a_t(\bar{S}^t)$ векторы различаются лишь по первой компоненте x_1^{t+1} и последней M^t. Поэтому для определения $\bar{S}^{t+1}$ по $\bar{S}^t$ достаточно знать лишь значение ρ_1^{t+1}. Задача ЛО сводится к следующей:

$$\max_{S^{t+1} \in a_t(\bar{S}^t)} (p_1^{t+1} x_1^{t+1} + M^t)$$

или

$$\max\left\{ \frac{M^{t-1} - \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t}{1 + w_0} (\rho_1^{t+1} v_0^t + f_0^t(w_0)) + \sum_{i=1}^{m} x_i^t f_i^t(w_i) \right\},$$

$$w \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i \leqslant M^{t-1}.$$

Дифференцируя функцию $g(w_0) = \frac{\rho_1^{t+1} v_0^t + f_0^t(w_0)}{1 + w_0}$, убеждаемся, что $\alpha = \max_{w_0 \geqslant 0} g(w_0)$ достигается в единственной точке w_0^t, и

$$\alpha = g(w_0^t) = \frac{d f_0^t(w_0^t)}{d w_0}. \qquad (3)$$

Положим $y = M^{t-1} - \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t \geqslant 0$. Задача ЛО принимает вид

$$\max(\alpha y + \sum_{i=1}^{m} x_i^t f_i^t(w_i^t)),$$

$$y + \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t = M^{t-1} = const.$$

Пусть w^t - ее решение. По лемме I существует такое $\beta_t > 0$, что

$$\frac{d f_i^t(w_i^t)}{d w_i} = \beta_t \quad \text{при } w_i^t \neq 0,$$
$$\frac{d f_i^t(0)}{d w_i} \leqslant \beta_t \quad \text{при } w_i^t = 0, \ i = 1, \ldots, m,$$

$$\alpha = \beta_t \quad \text{при } y \neq 0, \text{ т.е. при } \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t < M^{t-1},$$

$$\alpha < \beta_t \quad \text{при } y = 0, \text{ т.е. при } \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t = M^{t-1}.$$

Управление w^t правильное. Согласно определению w^t порождается управлением $\bar{w}^t$ в том и только в том случае, если $\bar{w}^t$ такое управление, что

$$\frac{d f_i^t(\bar{w}_i^t)}{d w_i} = \alpha \quad \text{при } \bar{w}_i^t \neq 0,$$

$$\frac{d f_i^t(0)}{d w_i} \leq \alpha \quad \text{при } \bar{w}_i^t = 0.$$

Управление $\bar{w}^t$ правильное. В случае $\rho_M^{t+1} = 0$, очевидно, $\bar{w} = 0$. Предложение доказано.

Итак, по ρ_1^{t+1} однозначно определяется правильное управление $\bar{w}^t$, которое для каждого S^t порождает управление, определяющее решение задачи ЛО. Возникает вопрос, можно ли по управлению определить значение ρ_1^{t+1}, т.е. определить задачу ЛО, решение которой порождается этим управлением?

Из (3) следует, что неравенство $\rho_1^{t+1} \geq 0$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$\frac{d f_0^t(w_0^t)}{d w_0} \geq \frac{f_0^t(\bar{w}_0^t)}{1 + \bar{w}_0^t}. \qquad (4)$$

Геометрической иллюстрацией служит рис. I.

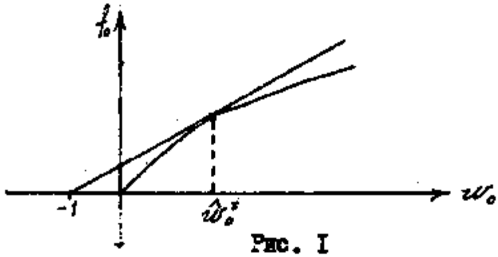

Рис. I

В точке $\hat{w}_0^t$, в которой проходящая через точку $(-1, 0)$ прямая касается графика функции f_0^t, (4) выполняется как равенство. Неравенство (4) справедливо для всех $\bar{w}_0^t \leq \hat{w}_0^t$. Для таких $\bar{w}_0^t$ значение ρ_1^{t+1} определяется однозначно.

На рис. 2 показано, что величина $\rho_1^{t+1} \nu_0^t$ равна длине

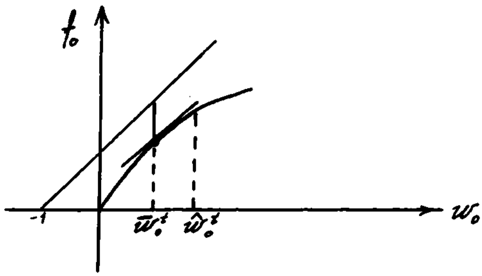

Рис. 2

отрезка прямой $w = \bar{w}_o^t$, заключенного между касательной к графику в точке $(\bar{w}_o^t, f_o^t(\bar{w}_o^t))$ и прямой, параллельной этой касательной, проходящей через точку (-I,0).

Значение $\hat{w}_o^t$ дает решение задачи ЛО для случая $p_1^{t+1} = 0$, когда в задаче ЛО максимизируется выпуск M^t.

Для $\bar{w}_o^t > \hat{w}_o^t$ значения $p_1^{t+1} \geq 0$ не существует; такое управление не дает решения задачи ЛО ни при каких ценах. Действительно, в этом случае расходуемые на новых фондах средства используются нерационально: может быть увеличен и объем фондов, и выпуск.

§2. Расширенная модель

В [3] показано, что с моделью (I) тесно связана модель типа Неймана - Гейла[ж)] $\{\mathcal{X}_t\}$, в которой модель Неймана - Гейла $\mathcal{X}_t$ определяется следующими элементарными процессами $l_i^t(w_i^t)$, $i=0,\dots,m$, при всевозможных $w_i^t \geq 0$ (точка с запятой разделяет векторы на части с $m+1$ компонентами):

$$l_o^t(w_o^t) = \left(0,\dots,0,1;\ \frac{v_o^t}{1+w_o^t}, 0,\dots,0;\ \frac{f_o^t(w_o^t)}{1+w_o^t}\right),$$

$$l_i^t(w_i^t) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0;\ 0,\dots,0, v_i^t, 0,\dots,0, f_i^t(w_i^t)),$$

$i=1,\dots,m-1$; здесь I стоит на месте i, v_i^t - на месте $m+i+2$,

---

ж) По поводу моделей Неймана, Неймана - Гейла, типа Неймана - Гейла см. [4].

$$l_m^t(w_m^t) = (0,\dots,0,1,w_m^t;0,\dots,0,f_m^t(w_m^t)).$$

Состоянием модели, как и для (I), является вектор S^t. Состояния S^t, S^{t+1} являются последовательными элементами некоторой траектории в том и только в том случае, если $(2m+2)$-мерный вектор (S^t, S^{t+1}) принадлежит замыканию множества конических комбинаций элементарных процессов. При замыкании добавляется лишь одна образующая $l=(0,\dots,0,1;0,\dots,0)$.

ЛЕММА 2. Всякая траектория модели (I) является траекторией модели $\{Z_t\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Состояния S^t, S^{t+1} принадлежат траектории модели (I) тогда и только тогда, когда

$$x_{i+1}^{t+1} = v_i^t x_i^t, \quad i=1,\dots,m-1,$$

и найдется такое w^t, что

$$x_1^{t+1} = v_0^t \frac{M^{t-1} - \sum_{i=1}^m x_i^t w_i^t}{1+w_0^t},$$

$$M^t = \frac{M^{t-1} - \sum_{i=1}^m x_i^t w_i^t}{1+w_0^t} f_0^t(w_0^t) + \sum_{i=1}^m x_i^t f_i^t(w_i^t).$$

Отсюда получаем

$$(S^t, S^{t+1}) = (M^{t-1} - \sum_{i=1}^m x_i^t w_i^t) l_0^t(w_0^t) + \sum_{i=1}^m x_i^t l_i^t(w_i^t).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^m x_i^t w_i^t \leq \sum_{i=0}^m x_i^t w_i^t \leq M^{t-1}$, все коэффициенты в разложении (S^t, S^{t+1}) по элементарным процессам $l_i^t(w_i^t)$ неотрицательны, следовательно, $(S^t, S^{t+1}) \in Z_t$. Лемма доказана.

В модели $\{Z_t\}$, в отличие от (I), допустимо использование различных w_i^t на отдельных частях группы фондов i, поэтому мы называем эту модель расширенной. Будем считать, что l не входит ни в один процесс S^t, S^{t+1} модели $\{Z_t\}$. В противном случае можно очевидным образом улучшить состояние S^{t+1}.

ЛЕММА 3. Пусть $(N+1)$ -траектория $\{S^t\}_{t=0}^{N+1}, N\geq 0$, модели $\{\mathcal{Z}_t\}$ такова, что $\{S^t\}_{t=0}^{N}$ является N -траекторией модели (I),, а в процесс (S^N, S^{N+1}) входят для некоторого $i=0,\dots,m$ с ненулевыми коэффициентами элементарные процессы $l_i^N(w_{i1}), l_i^N(w_{i2})$, где $w_{i1}\neq w_{i2}$. Тогда существует такое состояние $\bar{S}^{N+1}\geq S^{N+1}$, что $\{S^0, S^1,\dots, S^N, \bar{S}^{N+1}\}$ является $(N+1)$ -траекторией модели (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I - множество всех i, удовлетворяющих условию леммы. Для $i\in I$ обозначим через V_i множество всех элементарных процессов $l_i^N(w_{ij})$, входящих в (S^N, S^{N+1}) с коэффициентами $a_{ij}\neq 0$. Заметим, что $\sum_{j\in V_i} a_{ij}=x_i^N$ при $i\neq 0$. Процесс (S^N, S^{N+1}) представим в виде

$$(S^N, S^{N+1})=\sum_{i=0}^{m} L_i ,$$

где

$$L_i=x_i^N l_i^N(w_i^N),\quad i\neq 0,\quad i\notin I,$$

$$L_i=\sum_{j\in V_i} a_{ij}\, l_i^N(w_{ij}),\quad i\notin I,$$

$$L_0=(M^{N-1}-\sum_{i\notin I, i\neq 0} x_i^N w_i^N-\sum_{i\in I, i\neq 0}\sum_{j\in V_i} a_{ij} w_{ij})\, l_0^N(w_0^N)$$

при $0\notin I$.

Для каждого $i\neq 0$ такого, что $i\in I$, справедливо

$$L_i=(0,\dots,0,x_i^N,0,\dots,0,\sum_{j\in V_i} a_{ij} w_{ij};0,\dots,0,\nu_i^N x_i^N,0,\dots,0,\sum_{j\in V_i} a_{ij} f_i^N(w_{ij}).$$

Здесь x_i^N стоит на месте i, $\nu_i^N x_i^N$ - на месте $m+i+2$, $\nu_m^N=0$. Заменим в разложении (S^N, S^{N+1}) процесс L_i на

$$L_i'=(0,\dots,x_i^N,0,\dots,\sum_{j\in V_i} a_{ij} w_{ij};\ 0,\dots,\nu_i^N x_i^N,0,\dots,x_i^N f_i^N\Big(\frac{\sum_{j\in V_i} a_{ij} w_{ij}}{x_i^N}\Big))$$

т.е. в период N применим управление $w_i^N = \frac{\sum_{j\in V_i} a_{ij} w_{ij}}{x_i^N}$,

общее для всей группы i. Поскольку функция f_i^N строго вогнутая, имеет место неравенство

$$f_i^N\left(\frac{\sum_{j\in V_i} a_{ij} w_{ij}}{\sum_{j\in V_i} a_{ij}}\right) > \frac{\sum_{j\in V_i} a_{ij} f_i^N(w_{ij})}{\sum_{j\in V_i} a_{ij}},$$

следовательно, $L_i' \geqslant L_i$. Если $0 \in I$, то

$$L_0 = (0,\ldots,0, \sum_{j\in V_0} a_{0j};\ v_0^N \sum_{j\in V_0} \frac{a_{0j}}{1+w_{0j}}, 0,\ldots,0, \sum_{j\in V_0} \frac{a_{0j} f_0^N(w_{0j})}{1+w_{0j}}).$$

Заметим, что

$$\sum_{j\in V_0} \frac{a_{0j}}{1+w_{0j}} = x_0^N. \tag{5}$$

Заменим в разложении (S^N, S^{N+1}) процесс L_0 на

$$L_0' = (0,\ldots, \sum_{j\in V_0} a_{0j};\ v_0^N x_0^N, 0,\ldots, x_0^N f_0^N(w_0^N)),$$

где w_0^N определяется соотношением

$$\frac{\sum_{j\in V_0} a_{0j}}{1+w_0^N} = x_0^N. \tag{6}$$

Замена имеет простой содержательный смысл: мы сохраняем тот же объем фондов x_0^N, что и в процессе L_0, а потребляемый на этих фондах продукт распределяем на них равномерно.

Обозначим $\frac{a_{0j}}{1+w_{0j}}$ через b_i. Поскольку f_0^N - строго вогнутая функция, справедливо неравенство

$$\frac{\sum_{j\in V_0} b_j f_0^N(w_{0j})}{\sum_{j\in V_0} b_i} < f_0^N\left(\frac{\sum_{j\in V_0} b_i w_{0j}}{\sum_{j\in V_0} b_i}\right).$$

Согласно (5),(6)

$$\sum_{j\in V_0} b_i (1+w_{0j}) = (1+w_0^N) \sum_{j\in V_0} b_j,$$

$$\frac{\sum_{j\in V_0} b_j w_{0j}}{\sum_{j\in V_0} b_j} = w_0^N.$$

Следовательно,

$$\sum_{j\in V_0} b_j f_0^N(w_{0j}) < x_0^N f_0^N(w_0^N),$$

и $L_0' > L_0$.

Заменив для всех $i \in I$ процессы L_i на $L_i' > L_i$, мы получим вместо (S^N, S^{N+1}) такой процесс $(S^N, \bar{S}^{N+1})$, что $\bar{S}^{N+1} > S^N$. Лемма доказана.

Эффективная траектория определяется для модели $\{Z_t\}$ так же, как и для модели (I).

ЛЕММА 4. Множества эффективных траекторий в моделях (I) и $\{Z_t\}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть эффективная траектория $\{\bar{S}^t\}$ модели (I) не является эффективной в модели $\{Z_t\}$. Это означает, что в модели $\{Z_t\}$ найдется такая N-траектория $\{S^t\}_{t=0}^N$, что $S^0 = \bar{S}^0$, $S^N \geqslant \bar{S}^N$. Если она является N-траекторией модели (I), то мы приходим к противоречию с эффективностью $\{\bar{S}^t\}$ в (I). В противном случае по лемме 3 в модели (I) найдется такая T-траектория $\{\hat{S}^t\}_{t=0}^T$, $T < N$, что $\hat{S}^0 = S^0 = \bar{S}^0$, $\hat{S}^T \geqslant S^T$; ее можно продолжить до N-траектории $\{\hat{S}^t\}_{t=0}^N$ в (I); для которой $\hat{S}^N \geqslant S^N \geqslant \bar{S}^N$, что снова противоречит эффективности $\{\bar{S}^t\}$ в (I). Таким образом, множество эффективных траекторий модели (I) входит в множество эффективных траекторий модели $\{Z_t\}$. Докажем обратное включение. По лемме 3 эффективная траектория модели $\{Z_t\}$ является траекторией модели (I). Если она неэффективна в (I), то, в силу леммы 2, она неэффективна в $\{Z_t\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Управляющая последовательность эффективной траектории $\{S^t\}$ такой, что $S^t > 0, t=0,1,\ldots$, является правильной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что траектория $\{S^t\}$ не яв-

ляется эффективной, если управление w^t в период t не является правильным. Рассмотрим правильное управление $\tilde{w}^t$ такое, что

$$\sum_{i=0}^{m} x_i^t w_i^t = \sum_{i=0}^{m} x_i^t \tilde{w}_i^t .$$

Из леммы I следует, что $\tilde{w}^t$ определяет состояние $\bar{S}^{t+1}$, для которого $\bar{M}^{t+1} > M^{t+1}$, т.е. $\bar{S}^{t+1} \geqslant S^{t+1}$. Лемма доказана.

§3. Характеристика. Двойственная модель

Результаты предыдущего параграфа показывают, что для изучения эффективных траекторий можно рассматривать вместо (I) модель типа Неймана - Гейла $\{Z_t\}$. В моделях типа Неймана - Гейла эффективная траектория описывается с помощью характеристики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\{p^t\}$ векторов из R_+^{m+1} называется **характеристикой** траектории $\bar{S}^t$, если существует такая последовательность $\{\alpha_t\}$ положительных чисел, что $\alpha_t p^t S^t \geqslant p^{t+1} S^{t+1}$ для всех

$$(S^t, S^{t+1}) \in Z_t , \tag{7}$$

$$\alpha_t p^t \bar{S}^t = p^{t+1} \bar{S}^{t+1}, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Всякая последовательность векторов из R_+^{m+1}, пропорциональных векторам характеристики, сама является характеристикой. Нетрудно показать, что при всех t последняя (соответствующая M^t) компонента вектора p^t ненулевая. В противном случае $p^{t+1} = 0$. Будем выбирать α_t такими, чтобы эта компонента равнялась I.

Если $\{\bar{S}^t\}$ - траектория, $\{p^t\}$ - ее характеристика, то состояние $\bar{S}^{t+1}$ порождается ценами p^{t+1} (см. §I).

Известно, что если траектория модели типа Неймана - Гейла имеет характеристику, то она эффективна, и что всякая эффективная траектория с началом $S^0 > 0$ имеет характеристику.

Пусть траектория $\{\bar{S}^t\}$ модели $\{Z_t\}$ имеет характеристику. Тогда по лемме 4 это траектория модели (I). Пусть

$\{\tilde{w}^t\}$ – ее управляющая последовательность. Из (7),(8) следует, что

$$(\alpha_t p_i^t - p^{t+1}) l_i^t(w_i^t) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad w_i^t \geq 0,$$

$$(\alpha_t p_i^t - p^{t+1}) l_i^t(\tilde{w}_i^t) = 0 \quad \text{при} \quad x_i^t \neq 0,$$

$i=0,\ldots,m; \; t=0,1,\ldots$

Здесь перемножаются $(2m+2)$ -мерные векторы. Эти соотношения равносильны следующим:

$$\alpha_t - \frac{\nu_0^t}{1+w_0^t} p_1^{t+1} - \frac{f_0^t(w_0^t)}{1+w_0^t} \geq 0 \quad \text{для всех} \quad w_0^t \geq 0,$$

$$\alpha_t - \frac{\nu_0^t}{1+\tilde{w}_0^t} p_1^{t+1} - \frac{f_0^t(\tilde{w}_0^t)}{1+\tilde{w}_0^t} = 0 \quad \text{при} \quad x_0^t \neq 0,$$

$$\alpha_t(p_i^t + w_i^t) - \nu_i^t p_{i+1}^{t+1} - f_i^t(w_i^t) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad w_i^t \geq 0,$$

$$\alpha_t(p_i^t + \tilde{w}_i^t) - \nu_i^t p_{i+1}^{t+1} - f_i^t(\tilde{w}_i^t) = 0 \quad \text{при} \quad x_i^t \neq 0,$$

$i=1,\ldots,m-1,$

$$\alpha_t(p_m^t + w_m^t) - f_m^t(w_m^t) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad w_m^t \geq 0,$$

$$\alpha_t(p_m^t + \tilde{w}_m^t) - f_m^t(\tilde{w}_m^t) = 0 \quad \text{при} \quad x_m^t \neq 0.$$

Следовательно, если $x_i^t \neq 0$, то

$$\alpha_t(w_i^t - \tilde{w}_i^t) \geq f_i^t(w_i^t) - f_i^t(\tilde{w}_i^t)$$

для всех $w_i^t \geq 0$, $i=0,1,\ldots,m$, отсюда

$$\alpha_t = \frac{df_i^t(\tilde{w}_i^t)}{dw_i} \quad \text{при} \quad \tilde{w}_i^t \neq 0,$$

$$\alpha_t \geq \frac{df_i^t(0)}{dw_i} \quad \text{при} \quad \tilde{w}_i^t = 0,$$

$i=0,\ldots,m.$

Этим уточняется результат леммы 5.

Примем следующее предположение.

(II) Эффективная траектория $\{\bar{S}^t\}$ такова, что

$$\bar{S}^t > 0, \quad t=0,1,\ldots,$$

т.е. $\bar{S}^0 > 0$, $\quad x_0^t \neq 0, \; t=0,1,\ldots$

Тогда характеристика существует и описывается следующей

системой (9):

$$\alpha_t = \frac{df_i^t(\tilde{w}_i^t)}{dw_i} \quad \text{при} \quad \tilde{w}_i^t \neq 0, \qquad (9.1)$$

$$\alpha_t \geqslant \frac{df_i^t(0)}{dw_i} \quad \text{при} \quad \tilde{w}_i^t = 0, \qquad (9.2)$$

$$i = 0, \ldots, m,$$

$$\alpha_t = \frac{f_m^t(\tilde{w}_m^t)}{\rho_m^t + \tilde{w}_m^t} \quad \text{при} \quad \rho_m^t + \tilde{w}_m^t \neq 0, \qquad (9.3)$$

$$\rho_1^{t+1} = \frac{\alpha_t(1+\tilde{w}_0^t) - f_0^t(\tilde{w}_0^t)}{\nu_0^t}, \qquad (9.4)$$

$$\rho_{i+1}^{t+1} = \frac{\alpha_t(\rho_i^t + \tilde{w}_i^t) - f_i^t(\tilde{w}_i^t)}{\nu_i^t}, \qquad (9.5)$$

$$i = 1, \ldots, m-1,$$

$$\rho_i^t \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, m, \quad t = 0, 1, \ldots \qquad (9.6)$$

Система (9) описывает двойственную модель и при некотором ρ^0 дает управляющую последовательность $\{\tilde{w}^t\}$ для эффективной траектории прямой модели. Величины ρ_i^t называют *неймановскими ценами*. Ниже приводится ряд их свойств. Экономическая интерпретация выражений (9.4), (9.5) была дана в [3].

ЛЕММА 6. *Если $x_i^t \neq 0$ для некоторых $i = 0, \ldots, m-1$, $t = 0, 1, \ldots$, то $\rho_{i+1}^{t+1} \leqslant \frac{\alpha_t}{\nu_i^t} \rho_i^t$; здесь $\rho_0^t \equiv 1$, причем равенство имеет место лишь при $\tilde{w}_i^t = 0$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\tilde{w}_i^t = 0$ утверждение очевидно. Если $\tilde{w}_i^t \neq 0$, то $\frac{f_i^t(\tilde{w}_i^t)}{\tilde{w}_i^t} > \frac{df_i^t(\tilde{w}_i^t)}{dw_i}$, поскольку функция f_i^t строго вогнутая. Тогда из (9.1) следует, что $\alpha_t \tilde{w}_i^t - f_i^t(\tilde{w}_i^t) < 0$, и из (9.4), (9.5) получается требуемое неравенство. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $x_i^t \neq 0$, $\rho_i^t > 0$ для некоторых $t, i > 1$, то $\rho_{i-k}^{t-k} > 0$ для всех $k = 1, \ldots, i-1$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Неравенство $\rho_i^t > 0$ при $x_i^t \neq 0$ имеет место в том и только в том случае, если найдется целое $k = 0, \ldots, m-i$ такое, что $\tilde{w}_{i+k}^{t+k} \neq 0$.*

Иными словами, если та или иная группа фондов имеет в период t ненулевую цену, то это означает, что группа будет использована в данном или в одном из последующих периодов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $p_i^t > 0$, но $\tilde{w}_i^t = 0$. Тогда $p_{i+1}^{t+1} > 0$ из (9.5). Повторяя рассуждение, получаем, что либо $\tilde{w}_{i+k}^{m+k} \neq 0$, $k < m-i$, либо $p_m^{t+m-i} > 0$, и тогда $\tilde{w}_m^{t+m-i} \neq 0$ из (9.3).

Достаточность. Пусть $\tilde{w}_{i+k}^{t+k} \neq 0$ для некоторых i, k, t. Тогда $\alpha_{t+k} \tilde{w}_{i+k}^{t+k} - f_{i+k}^{t+k}(\tilde{w}_{i+k}^{t+k})$, как и в доказательстве леммы 6. Если $i+k=m$, то из (9.3) следует, что $p_{i+k}^{t+k} > 0$. Если $i+k \neq m$, то, поскольку $p_{i+k+1}^{t+k+1} \geqslant 0$, из (9.5) также также получаем, что $p_{i+k}^{t+k} > 0$. Но тогда $p_i^t > 0$ по следствию леммы 6. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. При $x_m^t \neq 0$ следующие три неравенства эквивалентны:

$$p_m^t + \tilde{w}_m^t \neq 0; \quad p_m^t \neq 0; \quad \tilde{w}_m^t \neq 0.$$

Этим уточняется (9.3).

Отметим, что при $x_m^t \neq 0$, $p_m^t \neq 0$ из (9.I),(9.3) следует

$$\alpha_t = \max_{w_m \geqslant 0} \frac{f_m^t(w_m)}{p_m^t + w_m}, \tag{IO}$$

причем максимум достигается в точке $\tilde{w}_m^t$, которая, в силу строгой вогнутости функции f_m^t, определяется однозначно.

Подобные выражения справедливы и для $i \neq m$, например,

$$\alpha_t = \max_{w_0 \geqslant 0} \frac{p_1^{t+1} v_0^t + f_0^t(w_0)}{1 + w_0}. \tag{II}$$

Интересно, что (II) аналогично выражению для темпа роста в простейшей модели экономического прогнозирования [6].

В заключение параграфа покажем, что эффективную траекторию $\{\bar{S}^t\}$ такую, что $\bar{S}^t > 0$ (условие (П)) и $w_m^t \neq 0$, $t = 0, 1, \ldots$, можно описать непосредственно в терминах модели (I), не используя неймановских цен. Заметим, что если выполняется условие

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d f_m^t(0)}{d w_m} = \infty,$$

то неравенство $w_m^t \neq 0$ вытекает из (II).

Пусть для эффективной траектории известны управления $w^{t-1}, \ldots, w^{t-m}$, где $t \geqslant m$, и требуется найти w^t. Последовательно выражая в (9.5) ρ_m^t через $\rho_{m-1}^{t-1}, \rho_{m-2}^{t-2}, \ldots, \rho_1^{t-m+1}$ и используя (9.4), получаем

$$\rho_m^t = \frac{c}{b},$$

где $b = \nu_0^{t-m} \ldots \nu_{m-1}^{t-1}$,

$$c = \alpha_{t-1} \ldots \alpha_{t-m}(1 + w_0^{t-m}) - \alpha_{t-1} \ldots \alpha_{t-m+1} f_0^{t-m}(w_0^{t-m}) +$$

$$+ \nu_0^{t-m} \alpha_{t-1} \ldots \alpha_{t-m+2}(\alpha_{t-m+1} w_1^{t-m+1} - f_1^{t-m+1}(w_1^{t-m+1})) +$$

$$+ \nu_0^{t-m} \nu_0^{t-m+1} \alpha_{t-1} \ldots \alpha_{t-m+3}(\alpha_{t-m+2} w_2^{t-m+2} - f_2^{t-m+2}(w_2^{t-m+2}))$$

$$+ \ldots + \nu_0^{t-m} \ldots \nu_{m-2}^{t-2}(\alpha_{t-1} w_{m-1}^{t-1} - f_{m-1}^{t-1}(w_{m-1}^{t-1})).$$

Значение c известно, поскольку в период t известны w_i^{t-m+i}, $i = 0, \ldots, m-1$, а также $\alpha_{t-1}, \ldots, \alpha_{t-m}$ (в силу (9.I),(9.2)). Тогда из (I0)

$$\alpha_t = \max_{w_m \geqslant 0} \frac{b f_m^t(w_m)}{c + b w_m},$$

и максимум достигается в точке $\tilde{w}_m^t$.

§4, Продуктивные управляющие последовательности

Во введении отмечалось, что всякая траектория модели (I) определяется некоторой управляющей последовательностью. Однако не всякая управляющая последовательность определяет траекторию: может нарушаться условие

$$M^{t-1} \geqslant \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t.$$

В этом параграфе рассматривается класс управляющих последовательностей, которые для любого начального состояния S^0 такого, что $M^{-1} > 0$, порождают управляющие последовательности, определяющие траекторию. Мы увидим, что если управляющая последовательность эффективной траектории с началом $S^0 > 0$ принадлежит рассматриваемому классу, то, начиная с некоторого периода, траектория удовлетворяет условию (П) (и в силу результатов §3 ее характеристика описывается системой (9)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Управляющая последовательность $\{w^t\}$ называется **продуктивной**, если

$$f_i^t(w_i^t) > \nu_i^t w_{i+1}^{t+1}, \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

Из определения следует, что если в период t применяется продуктивное управление, то

$$x_i^t f_i^t(w_i^t) \geqslant x_{i+1}^{t+1} w_{i+1}^{t+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$x_i^t f_i^t(w_i^t) > x_{i+1}^{t+1} w_{i+1}^{t+1} \quad \text{при } x_i^t \neq 0. \qquad (12)$$

Содержательный смысл продуктивности понятен: в период $t+1$ на группе фондов потребляется не больше, чем произведено на этой группе в период t. Таким образом, можно рассматривать группу фондов как "самообеспечивающую" - считать, что потребляемый там продукт там же был произведен, а "излишки" переходят на новые фонды.

ЛЕММА 7. *Продуктивная управляющая последовательность $\{w^t\}$ определяет траекторию для любого начального состояния $S^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0, M^{-1})$ такого, что*

$$M^{-1} \geqslant \sum_{i=1}^{m} x_i^0 w_i^0, \qquad (13)$$

причем если $M^{-1} > 0$, то существует такое T, что $S^t > 0$, $t \geqslant T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Траектория однозначно определяется управляющей последовательностью, если $x_0^t \geqslant 0$ при всех $t = 0, 1, \ldots$ Доказательство проводится по индукции. При $t = 0$ неравенство $x_0^0 \geqslant 0$ следует из (13). Пусть в период t

модель находится в состоянии $S^t = (x_1^t, \ldots, x_m^t, M^{t-1})$ и $x_0^t \geqslant 0$. Просуммируем неравенства (I2) по $i = 0, \ldots, m-1$. Получим

$$M^t \geqslant \sum_{i=1}^{m} x_i^{t+1} w_i^{t+1}, \qquad (I4)$$

$$x_0^{t+1} \geqslant 0.$$

Пусть $M^{-1} > 0$. Тогда либо $x_0^o \neq 0$, либо $x_i^o \neq 0$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$. В обоих случаях при $t = 0$ (I4) выполняется как строгое неравенство, следовательно, $x_0^1 > 0$. При $x_0^t > 0$ (I4) выполняется как строгое неравенство и $x_0^{t+1} > 0$. Следовательно, $S^t > 0$, по крайней мере, при $t > m+1$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если управляющая последовательность $\{\bar{w}^t\}$ для некоторой эффективной траектории $\{\bar{S}^t\}$, удовлетворяющей (П), продуктивна, то для любого S^o такого, что $M^{-1} > 0$, $\{\bar{w}^t\}$ порождает управляющую последовательность $\{w^t\}$, определяющую эффективную траекторию $\{S^t\}$ с началом S^o, причем существует такое T, что $w^t = \bar{w}^t$, $S^t > 0$ при всех $t \geqslant T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование T. Пусть $t > 0$, $0 < M^{t-1} < \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t$. Отсюда следует, что $x_i^t \neq 0$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$. Согласно определению порожденного управления, выбирается такое правильное управление w^t, что $M^{t-1} = \sum_{i=1}^{m} x_i^t w_i^t$. При этом $x_0^t = 0$, $M^t > 0$. Число индексов i, для которых $x_i^t \neq 0$, при увеличении t уменьшается. Следовательно, найдется такой период N, что

$$M^{N-1} > 0, \quad M^{N-1} \geqslant \sum_{i=1}^{m} x_i^N \bar{w}_i^N,$$

и применяется управление $\bar{w}^N$. Суммируя неравенства (I2), получаем, что

$$M^{N-1} > \sum_{i=1}^{m} x_i^{N+1} w_i^{N+1}, \; M^N > 0, \; x_0^{N+1} > 0.$$

Отсюда следует, что, начиная с N, применяются управления $\bar{w}^t$, и, начиная с $N+m+1$, $S^t > 0$.

Покажем, что траектория $\{S^t\}$ эффективна. Траектория $\{\bar{S}^t\}$ имеет характеристику $\{\bar{p}^t\}$, которая описывается системой (9). По $\bar{p}^N$ можно определить такие векторы цен $p^0, \ldots, p^{N-1}$, что последовательность $\{p^0, \ldots, p^{N-1}, \bar{p}^N, \bar{p}^{N+1}, \ldots\}$ является характеристикой траектории $\{S^t\}$. Действительно, положим

$$\alpha_t = \frac{df_i^t(w_i^t)}{dw_i}, \; w_i^t \neq 0, \; x_i^t \neq 0, \; t = 0, \ldots, N-1;$$

$$p_i^{t-1} = \frac{f_i^{t-1}(w_i^{t-1}) + \nu_i^{t-1} p_{i+1}^t}{\alpha_{t-1}} - w_i^{t-1}, \; i = 0, \ldots, m;$$

$$\nu_m^{t-1} p_{m+1}^t = 0, \quad t = N, N-1, \ldots, 1.$$

Поскольку $x_0^{t-1} = 0, t = 1, \ldots, N$, остается проверить, что $p^{t-1} \geqslant 0$, и $(\alpha_{t-1} p^{t-1} - p^t) f_0^{t-1}(w_0^{t-1}) \geqslant 0$ для всех $w_0^{t-1} \geqslant 0$. Если $p_{i+1}^t \geqslant 0$, то, поскольку $f_i^{t-1}(w_i^{t-1}) - w_i^{t-1} \alpha_{t-1} \geqslant 0$, имеем $p_i^{t-1} \geqslant 0$. Очевидно, $w_i^{t-1} < \bar{w}_i^{t-1}$, $t = 1, \ldots, N$. Отсюда следует, что $f_i^{t-1}(w_i^{t-1}) - \alpha_{t-1} w^{t-1} < f_i^{t-1}(\bar{w}_i^{t-1}) - \alpha_{t-1} \bar{w}_i^{t-1}$, и, как нетрудно показать, $p_i^{t-1} < \bar{p}_i^{t-1}$. Проверим, что $\alpha_{t-1} - \dfrac{\nu_0^{t-1} p_1^t + f_0^{t-1}(w_0^{t-1})}{1 + w_0^{t-1}} \geqslant 0$ для всех w_0^{t-1}, $t = 1, \ldots, N$, $p_1^N = \bar{p}_1^N$. Действительно,

$$\frac{\nu_0^{t-1} p_1^t + f_0^{t-1}(w_0^{t-1})}{1 + w_0^{t-1}} \leqslant \frac{\nu_0^{t-1} \bar{p}_1^t + f_0^{t-1}(w_0^{t-1})}{1 + w_0^{t-1}} \leqslant \bar{\alpha}_{t-1} < \alpha_{t-1}$$

Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $p^N > 0$. N-траектория $\{\bar{S}^t\}_{t=0}^N$ с S^0 началом S^0 называется p^N-о п т и м а л ь н о й, если не существует такой N-траектории $\{S^t\}_{t=0}^N$ с началом S^0, что $p^N S^N > p^N \bar{S}^N$.

Предположим, что существует такая p^N-оптимальная N-траектория $\{\bar{S}^t\}_{t=0}^N$, что $\bar{S}^t > 0$, $t = 0, \ldots, N$. Тогда характеристика этой N-траектории описывается системой (9). Из уравнения (9.4) однозначно определяются α_{N-1}, $\tilde{w}_0^{N-1}$;

тем самым, известны $\tilde{w}_i^{N-1}$, $i=1,\ldots,m$, и из (9.3),(9.5) можно найти $p^{N-1}>0$. Однозначно определяются $\tilde{w}^{N-2}$, $p^{N-2}>0$ и т.д.

Таким образом, все p^N-оптимальные N-траектории такие, что $S^t>0$, $t=0,\ldots,N$, определяются одной и той же управляющей последовательностью, назависимо от начального состояния.

Если же эта управляющая последовательность продуктивна, то она порождает p^N-оптимальную N-траекторию для любого начального состояния с $M^{-1}>0$.

§5. Теорема о магистрали. Стационарный случай

Пусть $f_i^t(w_i)=f_i(w_i)$, $\nu_i^t=\nu_i$, $i=0,\ldots,m$; $t=0,1,\ldots$ В этом случае расширенная модель $\{\mathcal{Z}_t\}$ представляет собой модель Неймана - Гейла $\mathcal{Z}$. Предположим, что выполняется (У).

ТЕОРЕМА I. Расширенная модель $\mathcal{Z}$ имеет единственное неймановское состояние равновесия $\langle\tilde{\alpha},(s,\tilde{\alpha}s),p\rangle$, где

$$s=\left(\frac{\nu_0}{\tilde{\alpha}},\ \frac{\nu_0\nu_1}{\tilde{\alpha}^2},\ldots,\ \frac{\nu_0\ldots\nu_{m-1}}{\tilde{\alpha}^m},\ 1+\tilde{w}_0+\frac{\nu_0\tilde{w}_1}{\tilde{\alpha}}+\ldots+\frac{\nu_0\ldots\nu_{m-1}\tilde{w}_m}{\tilde{\alpha}^m}\right),$$

$$\frac{\partial f_i(\tilde{w}_i)}{dw_i} \quad \text{при } \tilde{w}_i\neq 0, \quad \frac{\partial f_i(0)}{dw_i}\leqslant\alpha \text{ при } \tilde{w}_i=0,\ i=0,\ldots,m, \tag{I5}$$

$$\tilde{\alpha}^{m+1}(1+\tilde{w}_0)-\tilde{\alpha}^m(f_0(\tilde{w}_0)-\nu_0\tilde{w}_1)-\tilde{\alpha}^{m-1}\nu_0(f_1(\tilde{w}_1)-\nu_1\tilde{w}_2)-$$
$$-\ldots-\tilde{\alpha}\nu_0\nu_1\ldots\nu_{m-2}(f_{m-1}(\tilde{w}_{m-1})-\nu_{m-1}\tilde{w}_m)-\nu_0\nu_1\ldots\nu_{m-1}f_m(\tilde{w}_m)=0,$$

$$p=(p_1,\ldots,p_m,1), \tag{I6}$$
$$p_1=\frac{\tilde{\alpha}(1+\tilde{w}_0)-f_0(\tilde{w}_0)}{\nu_0},\quad p_i=\frac{\tilde{\alpha}p_{i-1}-f_{i-1}(\tilde{w}_{i-1})}{\nu_{i-1}},\ i=2,\ldots,m.$$

Неймановская грань модели совпадает с конической оболочкой элементарных процессов $l_i(\tilde{w}_i)$, $i=0,\ldots,m$, соответствующих управлению $\tilde{w}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если управление w известно, то по состоянию S^t однозначно определяется S^{t+1}. Из условия $S^{t+1}=\tilde{\alpha}S^t$ с точностью до множителя определяется вектор S^t. Предположим, что существует неймановское равновесие. Поскольку $S>0$, справедлива система (9). Из (9.I),(9.2) выте-

кает (I5), а из (9.4), (9.5) - выражение для p_i, $i=1,\ldots,m$. Из (У), (I5) следует, что $\tilde{w}_m \neq 0$, тогда из (9.3)-(9.5) получаем (I6).

Покажем, что система (I5), (I6) имеет решение, притом единственное. Зафиксируем некоторое $\tilde{w} \geqslant 0$. Левая часть уравнения (I6) непрерывна по α, отрицательна при $\tilde{\alpha} = 0$ и положительна при достаточно больших α, следовательно, (I6) разрешимо относительно α. В [3] показано, что среди всех $\tilde{\alpha}$, удовлетворяющих (I6) при каком-либо $\tilde{w}$, существует максимальное; только оно удовлетворяет (I5). Поскольку функции f_i, $i=0,1,\ldots,m$, строго вогнутые, из (I5) однозначно определяется $\tilde{w}$, соответствующее этому значению $\tilde{\alpha}$.

Докажем утверждение о неймановской грани. Из (9.4), (9.5) следует, что (7) выполняется для элементарных процессов $l_i(\tilde{w}_i)$, $i=0,\ldots,m$, а значит, для их комбинаций. Предположим, что неймановской грани принадлежит процесс l, не являющийся конической комбинацией процессов $l_i(\tilde{w}_i)$, $i=0,\ldots,m$. Тогда l представима в виде $l = l' + z\, l_i(w_i)$, где $l' \in \mathfrak{Z}$, $z>0$, $w_i \neq \tilde{w}_i$. Поскольку f_i строго вогнутая, $(\alpha p, -p)\, l_i(w_i) > 0$. Поскольку $(\alpha p, -p)\, l' \geqslant 0$ в силу (6), имеем $(\alpha p, -p)\, l > 0$, и процесс l не входит в неймановскую грань. Теорема доказана.

Очевидно, что управление $\tilde{w}$ определяет эффективную траекторию с началом S, проходящую по неймановскому лучу. Из предложения 3 следует, что если управление $\tilde{w}$ продуктивно, то для любого начального состояния $S^\circ \geqslant 0$ траектория, определяемая порожденным $\tilde{w}$ управлением, эффектна.

Сузим класс допустимых управлений, наложив дополнительные условия:

а) В модели (I) допустимо лишь конечное число правильных управлений, в том числе $\tilde{w}$.

Тем самым расширенная модель $\mathfrak{Z}$ превращается в модель Неймана - Гейла, наймановская грань которой совпадает с неймановской гранью только что рассматривавшейся модели Неймана - Гейла.

б) Управление $\tilde{w}$ продуктивно, причем $\tilde{w}_m^t > 0$, $t=0,1,\ldots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория $\{S^t\}$ модели (I) имеет средний темп роста α, если $\lim \alpha^t x_0^\tau > 0$.

ТЕОРЕМА 2. При условиях а),б) для любой траектории $\{S^t\}$ модели (I), имеющей средний темп роста $\tilde{\lambda}$, существует такое число $c>0$, что $\frac{1}{\tilde{\lambda}^t} S^t \xrightarrow[t\to\infty]{} cS$, где S – найденный в теореме I неймановский вектор.

В отличие от общих теорем о магистрали для модели Неймана, теорема 2 гарантирует сходимость к неймановскому лучу, а не к неймановской грани.

При доказательстве используется доказанная В.Л.Макаровым [4]

ТЕОРЕМА 3 (о магистрали в сильнейшей форме). Пусть модель Неймана $\mathcal{Z}$ обладает невырожденным темпом роста $\tilde{\lambda}$. Тогда у любой базисной траектории $\{S^t\}$, имеющей средний темп роста $\tilde{\lambda}$, все процессы (S^t, S^{t+1}), за исключением, может быть, лишь конечного числа, лежат в неймановской грани.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Проверим, что модель $\mathcal{Z}$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Поскольку $\{\bar{S}^t\}$ является траекторией модели (I), отличны от 0 не более $m+1$ коэффициентов разложения процесса $(\bar{S}^t, \bar{S}^{t+1})$ по элементарным процессам в период t. Траектория является базисной [4,с.259].

Покажем, что темп роста $\tilde{\lambda}$ модели $\mathcal{Z}$ является невырожденным [4,с.261]. Действительно, по теореме I неймановская грань представляет собой коническую комбинацию в точности $m+1$ элементарных процессов, причем ни один из них не входит в коническую оболочку остальных образующих модели $\mathcal{Z}$; существует такое натуральное L, что для любой N-траектории, лежащей в неймановской грани, справедливо $S^t>0,\ t=L, L+1, \dots, N-1$.

Условия теоремы 3 выполняются. Для рассматриваемой нами модели заключение теоремы 3 означает, что всякая траектория модели (I), имеющая средний темп роста $\tilde{\lambda}$, получается применением во всех периодах, за исключением, может быть, их конечного числа, управления $\tilde{w}$.

Рассмотрим соответствующую траектории $\{\bar{S}^t\}$ последовательность $\{K^t\}$, $K^t=(x_0^t, x_1^t, \dots, x_m^t)$. Для $t \geq 4$ имеем $K^t > 0$. В [3] показано, что при фиксированном $\tilde{w}$, удовлетворяющем условию б), имеет место $K^{t+1} = A K^t$, где A – матрица Лесли, у которой наибольшее по модулю собственное число равно λ, и

$$\frac{1}{\lambda^t} K^t \longrightarrow c K ,$$

где $K = (1, \frac{\nu_0}{\lambda}, \dots, \frac{\nu_0 \dots \nu_{m-1}}{\lambda^m})$ – собственный вектор матрицы A, $c > 0$. Тем самым, установлена сходимость для первых m компонент вектора $\bar{S}^t$. Заметим теперь, что $M^t = f K^t$; здесь $f K^t$ – скалярное произведение $(m+1)$-мерных векторов; $f = (f_0(\tilde{w}_0), \dots, f_m(\tilde{w}_m))$. Отсюда $\frac{1}{\lambda^t} M^t \longrightarrow c M$, где $M = f K$. Осталось показать, что $f K = 1 + \tilde{w}_0 + \frac{\nu_0 \tilde{w}_1}{\lambda} + \dots$
$\dots + \frac{\nu_0 \dots \nu_{m-1} \tilde{w}_m}{\lambda^m}$. Это немедленно следует из (16). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГОРЬКОВ Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели. – Докл. АН СССР, 1959, т.129, №4, с.732-73
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЖИЯНОВ В.И., ХОВАНСКИЙ А.Г. Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики. – Сиб. мат. журн., 1978, т.19, №5, с.1053-1064.
3. МАТВЕЕНКО В.Д. Дискретная модель с фондами, различающимися по срокам службы. – Оптимизация, 1981, вып.26(43), с. 90-102,
4. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.
5. БЕЛЛМАН Р., ДРЕЙФУС С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
6. РУБИНОВ А.М. Дискретный вариант простейшей модели экономического прогнозирования. Односекторная модель. – Оптимизация, 1980, вып. 25(42), с.139-151.

Поступила в ред.-изд. отдел
26.10. 1981 г.