Выпуск 3I(48) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 5I9.95

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛЯХ НЕЙМАНА – ГЕЙЛА

О.И.Пак

Предлагаемая работа посвящена моделям экономической динамики Неймана – Гейла. В ней проводится исследование множества всех траекторий, растущих средним темпом α. В частности, доказано, что если α не совпадает ни с одним из квазитемпов роста модели $\mathfrak{Z}$, это множество всегда пусто, если α является квазитемпом, но не темпом роста $\mathfrak{Z}$, оно может быть пусто или непусто в зависимости от свойства $\mathfrak{Z}$, если же α есть темп роста модели $\mathfrak{Z}$, траектории, растущие средним темпом α, всегда существуют, но не имеет места какая-либо однозначная связь между множеством $A_{\mathfrak{Z}}$ всех предельных по угловому расстоянию точек всех оптимальных траекторий $\mathfrak{Z}$ и множеством $B_{\mathfrak{Z}}^{\alpha}$ всех предельных по угловому расстоянию точек всех траекторий, растущих средним темпом α. Эти вопросы рассматривались ранее в [I,2]. В [2], в частности, были выведены условия, когда $B_{\mathfrak{Z}}^{\alpha} = A_{\mathfrak{Z}}$ и $B_{\mathfrak{Z}}^{\alpha} \subset A_{\mathfrak{Z}}$, и разработан аппарат для описания $B_{\mathfrak{Z}}^{\alpha}$. В дальнейшем используется терминология, принятая в [I,2].

Рассматриваются правильная нормальная модель Неймана – Гейла $\mathfrak{Z}$ с производственным отображением a и двойственная к ней модель $\mathfrak{Z}'$ с производственным отображением a'.

Говорят, что траектория $\chi = (x_t)$ модели $\mathfrak{Z}$ имеет средний темп роста α, где $\alpha > 0$, если для некоторого $p \in ri\,\pi_\alpha$, где $\pi_\alpha = \{p > 0 \mid p \in \alpha a'(p)\}$, выполнено $\lim \alpha^{-t} p(x_t) > 0$; иными словами, если χ согласована с траекторией двойственной модели $\mathfrak{Z}'$ вида $f_p = (p, \alpha^{-1}p, \ldots, \alpha^{-t}p, \ldots)$ при $p \in ri\,\pi_\alpha$. В случае, когда α – темп роста, это определение приведено в [I].

Обозначим через G_α множество всех индексов i из $\mathcal{J}=\{1,\ldots,n\}$, для которых $p^i>0$ при $p\in z_i \mathcal{\tilde{Z}}_\alpha$. Через B_Z^α обозначим множество всех предельных по угловому расстоянию точек всех траекторий, растущих средним темпом α, через A_Z - множество всех предельных по угловому расстоянию точек всех оптимальных траекторий.

В [3] было дано следующее определение квазитемпа роста модели Неймана - Гейла: "Число α называется квазитемпом роста модели Неймана - Гейла, если существует процесс $(x,y)\in Z$ такой, что $\alpha x\leq y$, и неравенство $y\leq(y'-\alpha x')$ не имеет решения $(x',y')\in Z$ ". В [I] описывается некая конструкция, результатом построения которой является конечное упорядоченное множество конусов $g(Z)=\{Z_1=Z, Z_2,\ldots, Z_N\}$, каждый из которых представляет собой проекцию предыдущего на некоторую грань конуса $R_+^n\times R_+^n$. Неймановские темпы роста $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ конусов $Z_1,\ldots,Z_N$ и только они являются квазитемпами роста модели Z [3,4]. Заметим, что темп роста модели всегда является квазитемпом Z [4]. Построим множества конусов $g(Z)$ и $g(Z')$ для моделей Z и Z' с квазитемпами $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ и $\alpha_1',\ldots,\alpha_{N'}'$ соответственно. Через I_ν обозначим множество всех индексов i из $\mathcal{J}=\{1,\ldots,n\}$ таких, что существует неймановская последовательность $(x_{k,\nu}, y_{k,\nu})$ конуса Z_ν с тем свойством, что $x^i_{k,\nu}>0_N$ при $i\in I_\nu$. По построению $I_\mu\cap I_\nu=\emptyset$ при $\mu\neq\nu$ и $\bigcup\limits_{\mu=1} I_\mu=\mathcal{J}=\{1,\ldots,n\}$.

Для двойственной модели аналогичным образом определим множества индексов $I_1',\ldots,I_{N'}'$. Обозначим $\mathcal{J}_\nu=\bigcup\limits_{\mu=\nu} I_\mu$ и $\mathcal{J}_{N-\nu+1}'=\bigcup\limits_{\mu=1}^{\nu} I_\mu$. Если R_ν, R_ν' - пространства, натянутые на орты с номерами из $\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_\nu'$ соответственно, то по построению [I] конусов Z_ν, $Z_{N-\nu+1}'$ эти конусы телесны в $R_\nu\times R_\nu$ и $R_\nu'\times R_\nu'$ соответственно и $Z_\nu\subset R_\nu\times R_\nu$, $Z_{N-\nu+1}'\subset R_\nu'\times R_\nu'$.

ЛЕММА А [I]. Для любого номера ν и любого $\varepsilon>0$ найдется процесс $(x,y)\in Z$ такой, что

а) $\alpha_\mu-\min\limits_{i\in J}\frac{y^i}{x^i}\leq\varepsilon$,

б) если $\nu<N$, то $x^i=y^i$ для всех $i\in\bigcup\limits_{\mu=\nu+1}^{N} I_\mu$ и $y^i>0$ для всех $i\in\bigcup\limits_{\mu=1}^{\nu} I_\mu$; если $\nu=N$, то $y'>0$ для всех $i\in\mathcal{J}$.

ТЕОРЕМА А [4]. $N=N'$, $\frac{1}{\alpha_\nu}=\alpha_{N-\nu+1}'$, $I_\nu=I_{N-\nu+1}'$.

Перейдем к изложению результатов данной работы.

Пусть $\alpha < \alpha_N$. По теореме А число $\frac{1}{\alpha_N}$ является неймановским темпом роста двойственной модели $\mathcal{Z}'$. Но тогда $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\alpha_N} = \alpha_1'$, и, следовательно, множество Π_α пусто согласно определению неймановского темпа роста модели. Таким образом, при $\alpha < \alpha_N$ определение траектории, имеющей средний темп роста α, вообще не имеет смысла.

ЛЕММА I. Для любого номера $1 \le \nu \le N-1$ и любого $\alpha_{\nu+1} < \alpha < \alpha_\nu$ имеет место $G_\alpha = \bigcup_{\mu=\nu+1}^{N} I_\mu$, для любого $\alpha > \alpha_1$ имеет место $G_\alpha = \bigcup_{\mu=1}^{N} I_\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\alpha_{\nu+1} < \alpha < \alpha_\nu$ при некотором $1 \le \nu \le N-1$. Из этого предположения и из леммы А вытекает, что $\alpha'_{N-\nu+1} < \frac{1}{\alpha} < \alpha'_{N-\nu}$. Поскольку $\alpha'_{N-\nu+1}$ является неймановским темпом роста конуса $\mathcal{Z}'_{N-\nu+1}$, очевидно, что $G_\alpha \cap \cap \mathcal{I}_{\mathcal{Z}'_{N-\nu+1}} = \varnothing$, т.е.

$$G_\alpha \subset \bigcup_{\mu=\nu+1}^{N} I_\mu . \tag{I}$$

С другой стороны, согласно лемме А найдется вектор $p \in R^n_+$ такой, что $(p, (\alpha'_{N-\nu} - \varepsilon)p) \in \mathcal{Z}'$ при $\varepsilon = \alpha'_{N-\nu} - \frac{1}{\alpha}$ и $p^i > 0$ для любого $i \in \bigcup_{\mu=1}^{N-\nu} I'_\mu = \bigcup_{\mu=\nu+1}^{N} I_\mu$, следовательно, множество Π_α непусто и $\bigcup_{\mu=\nu+1}^{N} I_\mu \subset G_\alpha$. Отсюда, пользуясь (I), немедленно получаем $\bigcup_{\mu=\nu+1}^{N} I_\mu = G_\alpha$ для всех $\alpha_{\nu+1} < \alpha < \alpha_\nu$ при $1 \le \nu \le N-1$. Пусть теперь $\alpha > \alpha_1$. Так же, как это сделано для $\alpha_{\nu+1} < \alpha < \alpha_\nu$, можно показать, что множество Π_α непусто и $G_\alpha = \bigcup_{\mu=1}^{N} I_\mu$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. Пусть α не совпадает ни с одним из квазитемпов α_ν модели $\mathcal{Z}$, тогда $B^\alpha_{\mathcal{Z}} = \varnothing$.

ДОКАЗАТЬЛЬСТВО. Пусть $\alpha > \alpha_1$, тогда, согласно лемме I, $G_\alpha = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$. Предположим, найдется траектория $\chi = (x_t)$ модели $\mathcal{Z}$, растущая средним темпом α. По определению это означает, что существует $i \in \mathcal{I}$, для которого $\lim \alpha^{-t} x^i_t > 0$. Зафиксируем некоторое $\alpha_1 < \tilde{\alpha} < \alpha$. По лемме I, $G_\alpha = G_{\tilde{\alpha}} = \mathcal{I}$. Выберем $p \in ri\, \Pi_{\tilde{\alpha}}$. Поскольку $\tilde{\alpha} < \alpha$ и $G_\alpha = G_{\tilde{\alpha}}$, очевидно, $p \in ri\, \Pi_\alpha$. Тогда по определению траектории, растущей средним темпом α, выполнено $\lim \alpha^{-t} p(x_t) > 0$. Но $\tilde{\alpha} < \alpha$, и

потому $\lim \tilde{\alpha}^{-t} p(x_t) = \infty$, что невозможно, поскольку $(p, \tilde{\alpha}^{-1}p) \in \mathcal{Z}$, и, следовательно, должно быть выполнено $\lim \alpha^{-t} p(x_t) \leq p(x_0)$. Итак, не существует траектории, растущей средним темпом $\alpha > \alpha_1$, т.е. $B_{\mathcal{Z}}^{\alpha} = \varnothing$ при $\alpha > \alpha_1$.

Пусть теперь $\alpha_{\nu+1} < \alpha < \alpha_\nu$ при $N-1 \leq \nu \leq 1$. В этом случае, согласно лемме I, $G_\alpha = J_{\nu+1}$. По определению траектория χ растет средним темпом α тогда и только тогда, когда найдется такой номер $i \in G_\alpha$, что $\lim \alpha^{-t} x_t^i > 0$, т.е. когда в модели $\mathcal{Z}_{\nu+1}$ траектория $\bar{\chi} = (x_t)$, у которой каждая пара (x_t, x_{t+1}) есть проекция процесса (x_t, x_{t+1}) на грань $R_{\nu+1}^{+} \times R_{\nu+1}^{+}$, имеет средний темп роста α. Но такой траектории в модели $\mathcal{Z}_{\nu+1}$ не существует, поскольку $\alpha > \alpha_{\nu+1}$ и $\alpha_{\nu+1}$ – неймановский темп роста $\mathcal{Z}_{\nu+1}$. Теорема доказана.

Пусть α – квазитемп роста модели $\mathcal{Z}$, но не темп роста этой модели. Нижеследующий пример покажет, что в зависимости от свойств модели $\mathcal{Z}$ траектории, растущие средним темпом α, могут существовать и не существовать.

ПРИМЕР I. Пусть f – строго вогнутая функция, определенная на $[0, +\infty)$ и такая, что $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. В конусе $R_+^2 \times R_+^2$ рассмотрим множество Ω, состоящее из пар $((u,1),(v,\lambda))$, где $u+1 \geq v \geq 0$, $f(u) \geq \lambda \geq 0$. Очевидно, что Ω выпукло. Конус $\mathcal{Z}$, совпадающий с замыканием конической оболочки $Co(\Omega)$ множества Ω, является, как нетрудно проверить, моделью Неймана – Гейла. Непосредственно проверяется, что кроме лучей $(\mu z)_{\mu \geq 0}$, где $z \in \Omega$, конус $\mathcal{Z}$ содержит лишь луч, проходящий через точку $((1,0),(1,0))$. Модель $\mathcal{Z}$ имеет единственный квазитемп $\alpha_1 = 1$ с множеством индексов $G_{\alpha_1} = \{2\}$ [I, с.II3]. Следовательно, траектория χ имеет средний темп роста α_1 тогда и только тогда, когда $\lim x_t^2 > 0$. Покажем, что в зависимости от свойств функции f модель $\mathcal{Z}$ может иметь или не иметь траектории, растущие средним темпом $\alpha = \alpha_1$.

а) Пусть функция f такова, что произведение $\prod\limits_{t=1}^{\infty} (2^{t+1} + 2t(t-1) + 2)$ расходится. Допустим, найдется траектория $\chi = (x_t)$, растущая средним темпом α_1. Так как $G_{\alpha_1} = \{2\}$, то в условиях данного примера для любого t будет выполнено $x_t^2 > 0$. Тогда траектория χ имеет вид:

$$x_0=(u_0, v_0) \quad \text{, где} \quad u_0>0,\ v_0>0,$$

$$x_1=v_0 v_1 \left(\frac{u_1}{v_1}, 1\right) \quad \text{, где } 0<u_1 \leq \frac{u_0}{v_0}+1,\ 0<v_1 \leq f\left(\frac{u_0}{v_0}\right),$$

. . . .

$$x_t=v_0 \cdots v_t\left(\frac{u_t}{v_t}, 1\right), \text{ где } 0<u_t \leq \frac{u_{t-1}}{v_{t-1}}+1, 0<v_t \leq f\left(\frac{u_{t-1}}{v_{t-1}}\right),$$

. . . .

Так как траектория λ имеет средний темп роста α_1, произведение $\prod_{t=0}^{\infty} v_t$ сходится, и, следовательно, $v_t \to 1$, но тогда, начиная с некоторого t_0, выполнены неравенства

$$f\left(\frac{u_t}{v_t}\right)<f(2u_t), \tag{2}$$

$$u_t<2u_{t-1}+1<2^{t-t_0}u_{t_0}+\sum_{m=1}^{t-t_0-1} 2m+1.$$

Найдем τ такое, что $u_{t_0}<2^{\tau}$, тогда очевидно $u_{\tau}<2^{t+\tau-t}+\sum_{m=1}^{t+\tau-t_0-1} 2m+1$. Принимая во внимание (2) и ограничения для v_τ, получаем

$$v_{t+1} \leq f\left(\frac{u_t}{v_t}\right)<f(2u_t)<f\left(2^{t+\tau+1-t_0}+\sum_{m=1}^{t+\tau-t_0-1} 4m+2\right).$$

Итак,

$$\prod_{t=0}^{\infty} v_t \leq \prod_{t=0}^{t_0-1} v_t \cdot \prod_{t=0}^{\infty} f\left(2^{t+\tau+1}+2(t+\tau)(t+\tau-1)+2\right).$$

По условию примера произведение $\prod_{\tau=1}^{\infty}\left(2^{\tau+1}+2t(t-1)+2\right.$ расходится, следовательно, произведение $\prod_{t=0}^{\infty} v_t$ также расходится, именно, равно 0, что противоречит росту x средним темпом α_1. Таким образом, рассматриваемая модель не имеет траекторий, растущим средним темпом α_1.

б) Пусть функция f обладает тем свойством, что произведение $\prod_{t=0}^{\infty} f(t)$ сходится. Рассмотрим траекторию $x=(x_t)$ вида

$$x_0=(1,1),$$

$$x_1 = (2, f(1)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_t = (x^1_{t-1} + x^2_{t-1}, f(1)\cdot\ldots\cdot f(t)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

По условию $\prod\limits_{t=0}^{\infty} f(t)$ сходится, следовательно, $\overline{\lim}\, x_t^2 > 0$, т.е. x имеет средний темп роста $\alpha_1 = 1$. Итак, в этом случае существует траектория, растущая средним темпом α_1 .

Пусть α - темп роста. При этом, очевидно, траектории, растущие средним темпом α, всегда существуют, и, следовательно, множество $B_{\mathfrak{X}}^{\alpha}$ всегда непусто. В этом случае интересен вопрос о связи множеств $B_{\mathfrak{X}}^{\alpha}$ и $A_{\mathfrak{X}}$. При выполнении определенных условий [I,2] можно гарантировать включение $B_{\mathfrak{X}}^{\alpha} \subset A_{\mathfrak{X}}$ и даже равенство $B_{\mathfrak{X}}^{\alpha} = A_{\mathfrak{X}}$. Приведенный ниже пример показывает, что в общем случае эти соотношения не имеют места и, вообще говоря, не исключена возможность, когда $B_{\mathfrak{X}}^{\alpha} \setminus A_{\mathfrak{X}} \neq \emptyset$.

ПРИМЕР 2. Пусть f - строго вогнутая функция с областью определения $[0, +\infty)$, обладающая следующими свойствами: $\lim\limits_{w\to\infty} f(w) = 1,\ f(0) = 0$, произведение $\prod\limits_{w=1}^{\infty} f^2(w)$ сходится. В конусе $R^4_+ \times R^4_+$ определим множество $\Omega = \{((u,v,0,1), (u_1,v_1,0,\lambda))\}$, где $u \geq 0,\ v \geq 0,\ 0 \leq u_1 \leq \frac{u+v}{2} + 1$, $0 \leq v_1 \leq \frac{u+v}{2} + 1,\ 0 \leq \lambda \leq f(u+v)$. Очевидно, что множество Ω выпукло. Пусть $\mathfrak{X}$ - замыкание конической оболочки множества Ω и векторов $w_1 = ((0,0,1,0), (0,0,1,0))$ и $w_2 = ((0,0,0,1), (0,0,1,0))$, т.е. $\mathfrak{X} = \overline{Co(\Omega \cup \{w_1\} \cup \{w_2\})}$. Кроме лучей $\{\mu z\}_{\mu \geq 0}$, где $z \in co(\Omega \cup \{w_1\} \cup \{w_2\}$, конус $\mathfrak{X}$ содержит лишь лучи вида $\{\mu((x^1, x^2, x^3, 0), (x^1_1, x^2_1, x^3_1, 0))\}_{\mu \geq 0}$ где $x^1 \geq 0,\ x^2 \geq 0,\ x^3 \geq 0,\ 0 \leq x^1_1 \leq \frac{x^1 + x^2}{2},\ 0 \leq x^2_1 \leq \frac{x^1 + x^2}{2},\ 0 \leq x^3_1 \leq x^3$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{X}$ обладает всеми свойствами модели Неймана - Гейла. Непосредственная проверка устанавливает, что $\mathfrak{X}$ имеет единственный квазитемп роста $\alpha = 1$ с множеством индексов $G_{\alpha} = \{3, 4\}$, который является также и темпом роста.

Опишем множество $A_{\mathfrak{X}}$. Пусть траектория $x = (x_t)$ оптимальна, тогда, согласно принципу оптимальности, каждый ее τ -

кусок оптимален в смысле некоторых цен p_t. Сделаем несколько предварительных замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для каждого $x > 0$ определим на $[0, +\infty)$ функцию $g_x(\lambda)$, положив $g_x(\lambda) = \lambda f(\frac{x}{\lambda})$ при $\lambda > 0$ и $g_x(\lambda) = 0$ при $\lambda = 0$. Очевидно, что $g_x(\lambda)$ непрерывна. Кроме того, $g_x(\lambda)$ строго вогнута на $(0, +\infty)$, так как $\frac{d^2}{d\lambda^2} g_x(\lambda) = \frac{2x^2}{\lambda^3} \left.\frac{d^2 f(w)}{dw^2}\right|_{w=\frac{x}{\lambda}}$, и функция $f(w)$ строго вогнута. Принимая во внимание то, что $g_x(0) = 0$ и $g_x(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$, приходим к выводу, что функция $g_x(\lambda)$ монотонно возрастает по λ на $[0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любая траектория модели $\mathcal{Z}$ имеет вид

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_t = (x_t^1, x_t^2, x_t^3, x_t^4)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

где

$$x_0^1 \geq 0, \quad x_0^2 \geq 0, \quad x_0^3 \geq 0, \quad x_0^4 \geq 0,$$

$$0 \leq x_t^1 \leq \frac{x_{t-1}^1 + x_{t-1}^2}{2} + x_{t-1}^4 - y_{t-1}^4,$$

$$0 \leq x_t^2 \leq \frac{x_{t-1}^1 + x_{t-1}^2}{2} + x_{t-1}^4 - y_{t-1}^4,$$

$$0 \leq x_t^3 \leq x_{t-1}^3 + y_{t-1}^4,$$

$$0 \leq x_t^4 \leq g_{x_{t-1}^1 + x_{t-1}^2}(x_{t-1}^4 - y_{t-1}^4),$$

$$0 \leq y_{t-1}^4 \leq x_{t-1}^4.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если траектория x на некотором шаге t попала в точку вида $x_t = (x_t^1, x_t^2, x_t^3, 0)$, то ни на каком последующем шаге $\tau > t$ она уже не сможет попасть в точку вида $x_\tau = (x_\tau^1, x_\tau^2, x_\tau^3, x_\tau^4)$, где $x_\tau^4 > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если какой-либо t -кусок траектории x оптимален в смысле цен вида $p_t = (0, 0, p_t^3, 0)$, то траектория x имеет вид $x = (x_t)$, где $0 \leq x_t^1 \leq \frac{x_0^1 + x_0^2}{2}$, $0 \leq x_0^2 \leq$

$\leqslant \dfrac{x_0^1+x_0^2}{2}$, $x_t^3=x_0^3+x_0^4$, $x_t^4=0$ для любого $t \geqslant 1$.

Рассмотрим несколько случаев.

I) Если оптимальная траектория исходит из точки вида $x_0=(x_0^1, x_0^2, x_0^3, 0)$, то χ , как нетрудно заметить, имеет единственную предельную по угловому расстоянию точку вида $x=(\beta, \beta, \gamma, 0)$, $\|x\|=1$.

2) Если оптимальная траектория χ на некотором шаге t попадает в точку вида $x_t=(x_t^1, x_t^2, x_t^3, 0)$, то мы получаем ситуацию, рассмотренную в первом случае.

3) Пусть теперь оптимальная траектория χ такова, что для любого t имеет место $x_t^4>0$. Очевидно, что в этом случае всегда $x_t^1+x_t^2>0$ для любого t . Предположим, что для любого $t \geqslant 1$ выполнены соотношения

$$
\begin{aligned}
& x_t^1=x_t^2=\frac{x_{t-1}^1+x_{t-1}^2}{2}+x_{t-1}^1, \\
& x_t^4=x_{t-1}^4 f\left(\frac{x_{t-1}^1+x_{t-1}^2}{x_{t-1}^4}\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Тогда, как нетрудно заметить, любой t – кусок χ оптимален в смысле любых цен вида $p_t=(p_t^1, p_t^2, 0, p_t^4)$, где $p_t^1+p_t^2+p_t^4>0$. Если при некотором $t=\tau$ соотношения (3) нарушаются, то никакой t -кусок χ при $t>\tau$ уже не будет оптимален в смысле цен вида $p_t=(p_t^1, p_t^2, 0, p_t^4)$. Согласно замечанию 3, ни на каком шаге t -кусок этой траектории не может быть оптимален в смысле цен вида $p_t=(0, 0, p_t^3, 0)$. Отсюда вытекает, что если τ -кусок траектории χ оптимален в смысле цен вида $p_\tau=(p_\tau^1, p_\tau^2, p_\tau^3, p_\tau^4)$, то либо для любого $t<\tau$ выполнены соотношения (3), либо при $\tau=t$ траектория χ попадает в точку вида $x_\tau=(x_\tau^1, x_\tau^2, x_\tau^3, 0)$, что противоречит предположению $x_t^4>0$ для любого t . Таким образом, для каждой оптимальной траектории χ такой, что $x_t^4>0$ для любого t , имеют место соотношения (3) , из которых вытекает, что χ имеет единственную предельную по угловому расстоянию точку вида $x=(\beta, \beta, \gamma_1, \gamma_2)$, $\|x\|=1$, $\beta>0$.

Итак, какова бы ни была оптимальная траектория χ в модели Z , она имеет единственную предельную по угловому расстоянию точку x с тем свойством, что $x^1=x^2$.

Построим траекторию χ , растущую средним темпом α и имеющую предельную по угловому расстоянию точку $x \notin A_Z$.

Зафиксируем последовательность четных натуральных чисел M_j таких, что $M_{j+1} > 4M_j$, $M_0 = 0, M_1 \geq 4$. Положим

$$x_0 = (1, 1, 0, 1),$$

$$x_{M_j} = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{M_j}{2}+1\right)x^4_{M_j-1}, \frac{1}{3}\left(\frac{M_j}{2}+1\right)x^4_{M_j-1}, 0, x^4_{M_j-1}f\left(M_j - \frac{M_{j-1}}{2}\right)\right)$$

и при $M_{j-1} < t < M_j$

$$x_t = \left(\frac{x^1_{t-1}+x^2_{t-1}}{2} + x^4_{t-1}, \frac{x^1_{t-1}+x^2_{t-1}}{2} + x^4_{t-1}, 0, x^4_{t-1} f\left(t - \frac{M_{j-1}}{2}\right)\right).$$

Непосредственная проверка, опущенная из-за громоздкости выкладок, устанавливает, что последовательность $x = (x_t)$ является траекторией модели $\mathcal{Z}$, причем, по построению, $x^4_t \geq \geq \prod_{w=1}^{\infty} f^2(w) > c > 0$, т.е. x растет средним темпом $\alpha = 1$. С другой стороны, последовательность $\frac{x_{M_j}}{\|x_{M_j}\|}$ сходится к точке $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0) \notin A_{\mathcal{Z}}$. Итак, x является искомой траекторией и, таким образом, $B^{\alpha}_{\mathcal{Z}} \subset A_{\mathcal{Z}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Примеры построены на основе примера из [I, с.II3].

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.; Наука, 1973.

2. РУБИНОВ А.М. Многозначные суперлинейные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.

3. BROMEK T., KANIEWSKA I., LOS I. Contributions to theory of existence of von Neuman equilibria. - In: Computing equilibria: How and why. Amsterdam, 1976, p. 203-216.

4. ПАК О.И. Квазитемпы роста и ε,δ-состояния равновесия в модели экономической динамики Неймана - Гейла.

Поступила в ред.-изд. отдел
13.07. 1981 г.