Выпуск 31(48) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.

Модели функционирования экономики

УДК 51.330.115

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РАВНОЭФФЕКТИВНЫХ ПЛАНОВ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕСУРСОВ

В.А.Булавский, В.Д.Маршак

Характерной чертой модели функционирования является включение в сферу исследования не только объектов планирования, но прежде всего процессов взаимодействия этих объектов при формировании общесистемных плановых решений. Естественно, что при таком подходе необходимо прежде всего выделить основные связи объектов, возникающие в процессе принятия решений. В данном случае модели процессов взаимодействия в экономических системах должны имитировать в содержательном смысле реальные связи, но в то же время принимаемые решения должны быть оптимальны по заданному критерию или набору критериев. Основным видом связей, возникающих в процессе формирования перспективных планов развития экономических систем (отраслей, объединений, предприятий), является взаимодействие между отдельными объектами и органами централизованного управления при распределении централизованных общесистемных ресурсов, в первую очередь капиталовложений.

Подход к формированию оптимальных планов развития сложных экономических систем, когда в основе согласования планов отдельных подсистем лежит процесс распределения централизованных ресурсов, был реализован в разработанной в Институте математики СО АН СССР системе математического обеспечения "Перспективное планирование развития отрасли" (СМО "Перспектива") [1,2], функционирующей в промышленном режиме в ряде машино-

строительных отраслей на уровне министерства в целом и отдельных подотраслей (главков). В системе математического обеспечения "Перспектива" план экономической системы, который необходимо сформировать, рассматривается как совокупность оптимальных равноэффективных планов подсистем (объектов планирования - главков, предприятий). Равноэффективность в экономическом смысле как критерий формирования общесистемного плана может принимать различные конкретные выражения при тех или иных постановках: достижение максимально возможного и равного для всех подсистем уровня удовлетворения потребностей народного хозяйства в продукции системы (в номенклатуре) при заданных общесистемных ресурсах; достижение максимально возможного и равного по подсистемам уровня развития их в смысле значений различных технико-экономических показателей (уровня производительности труда, рентабельности продукции и фондов и т.п.) при выполнении заданий на выпуск продукции и ограничений на ряд ресурсов по системе в целом.

Реализованный в СМО "Перспектива" алгоритм распределения централизованных ресурсов всегда обеспечивает достижение поставленной перед ним задачи - формирование общесистемного плана как совокупности оптимальных равноэффективных планов подсистем. В случае распределения одного общесистемного ресурса равноэффективность и оптимальность эквивалентны [I]. Практические расчеты по построению общесистемных планов при распределении нескольких ресурсов показали эффективность реализованного в СМО "Перспектива" алгоритма. Однако в общем случае (при распределении нескольких ресурсов) не любая совокупность оптимальных равноэффективных планов подсистем оказывается оптимальной в общесистемном смысле.

В настоящей работе этот подход развивается для случая, когда общесистемный план формируется в процессе распределения нескольких видов централизованных ресурсов между подсистемами. Для более четкого изложения алгоритма рассмотрим процесс формирования общесистемного плана при некоторых упрощающих предположениях. Именно, полагаем, что каждый вид продукции выпускается только в одной из подсистем и продукция одной подсистемы не служит затратами для другой.

Итак, пусть каждая из подсистем с номером k находит свой оптимальный план в результате решения следующей задачи

линейного программирования: определить вектор $X^k=\{x_j^k\}$, $j=1,\dots,S_k$, $k=1,\dots,\ell$, и число z^k при условиях:

$$
\begin{aligned}
&X^k \geqslant 0,\\
&\Phi^k X^k \leqslant N^k,\\
&A^k X^k - d^k z^k \geqslant 0, \qquad\qquad (1)\\
&R^k X^k \leqslant c^k,\\
&z^k \rightarrow max.
\end{aligned}
$$

Здесь

$X^k=\{x_j^k\}$, $j=1,\dots,S_k$, - вектор объемов (интенсивностей) использования производственных способов подсистемы k ;

z^k - количество ассортиментных наборов конечной продукции подсистемы k ;

Φ^k - матрица коэффициентов использования производственных мощностей технологическими способами подсистемы k ;

A^k - матрица коэффициентов выпуска продукции технологическими способами подсистемы k при единичной интенсивности их использования;

R^k - матрица коэффициентов использования общих для всей системы ресурсов технологическими способами подсистемы k при единичной интенсивности их использования;

$d^k=(d_1^k,\dots,d_m^k)$ - заданный ассортиментный набор выпуска конечной продукции подсистемы;

N^k - вектор ограничений по производственным мощностям подсистемы k ;

$c^k=(c_1^k,\dots,c_n^k)$ - вектор ограничений по общесистемным ресурсам, выделенным подсистеме.

В целом по системе имеются централизованные ресурсы в объеме b_i , $i=1,\dots,n$, которые необходимо распределить между подсистемами таким образом, чтобы выполнялись условия:

I. Централизованные ресурсы распределены в количествах, не больших, чем они имеются

$$\sum_k c_i^k \leqslant b_i, \quad i=1,\dots,n. \qquad (2)$$

2. Совокупность оптимальных планов подсистем дает оптимальный общесистемный план, т.е. достигает максимума значение общесистемного функционала

$$z = \min_k z^k. \qquad (3)$$

Для оценки рассматриваемого ниже процесса введем понятие глобального общесистемного оптимума, понимаемого как значение целевой функции общесистемной задачи линейного программирования, в которой максимизируется выпуск продукции в общесистемном ассортименте. Это значение глобального оптимума определяется при решении следующей задачи линейного программирования:

определить набор векторов $X = (X^1, \ldots, X^k)$ и число z при условиях:

$$\left.\begin{aligned} & X^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, \ell, \\ & \Phi^k X^k \leq N^k, \; k = 1, \ldots, \ell, \\ & A^k X^k - d^k z \geq 0, \; k = 1, \ldots, \ell, \\ & \sum_{k=1}^{\ell} R^k X^k \leq b, \\ & z \to \max, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где z - уровень производства общесистемного ассортимента конечной продукции.

Алгоритм решения задачи (1)-(3) состоит в следующем. Выбирается начальное распределение ресурсов при условиях:

$$\begin{aligned} & c_i^k \geq 0 \quad \forall k, i; \; \sum_{k=1}^{\ell} c^k \leq b, \\ & c^k = \{c_i^k\}, \; i = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,\ell}, \end{aligned} \qquad (5)$$

и при данном распределении решаются задачи (I). Оценки ограничений (неотрицательные строки надлежащей длины), полученные при решении k-й задачи (I), обозначим соответственно очередности этих ограничений, через u^k, v^k и π^k. Таким образом, строка π^k - это оценки общесистемных ресурсов в k-й подсистеме при данном распределении c^k, $k = \overline{1,\ell}$.

Для оптимального плана $\bar{z}^k, \bar{X}^k$ и оценок каждой под-

системы выполняются следующие соотношения:

$$u^k \Phi^k - v^k A^k + \pi^k R^k \geq 0, \quad v^k d^k = 1, \tag{6}$$

$$u^k \Phi^k \hat{X}^k = u^k N^k \quad v^k A^k \hat{X}^k = \hat{z}^k, \quad \pi^k R^k \hat{X}^k = \pi^k c^k, \tag{7}$$

$$\hat{z}^k = u^k N^k + \pi^k c^k. \tag{8}$$

В то же время для допустимого общесистемного уровня z выполнены ограничения задачи (4):

$$\Phi^k X^k \leq N^k, \quad A^k X^k - d^k z \geq 0.$$

Умножив их на оценки u^k и v^k с учетом (6) и (7), получим

$$z \leq v^k A^k X^k \leq u^k \Phi^k X^k + \pi^k R^k X^k \leq u^k N^k + \pi^k R^k X^k,$$

т.е.

$$z \leq \hat{z}^k + \pi^k [R^k X^k - c^k], \quad k = \overline{1, \ell}. \tag{9}$$

Таким образом, добавив к неравенствам (9) условия

$$\sum_{k=1}^{\ell} R^k X^k \leq b, \tag{10}$$

мы можем получить оценку сверху для допустимого системного уровня z, если решим задачу на максимум z при ограничениях (9) и (10). Решение этой задачи обозначим через $\tilde{z}$ и $\tilde{X}^k$, $k = \overline{1, \ell}$. В силу определения $\tilde{z}$ любой допустимый общесистемный план удовлетворяет неравенству $z \leq \tilde{z}$, в то время как полученные оптимальные планы подсистем обеспечивают общесистемный уровень выпуска набора $\hat{z} = \min \hat{z}^k$.

Если разность $\tilde{z} - \hat{z}$ невелика (меньше некоторого положительного ε), то можно считать, что задача решена : сделанное распределение общих ресурсов обеспечивает уровень производства, близкий к максимально возможному. Если же вилка размером $\tilde{z} - \hat{z}$ нас не устраивает, то нужно перераспределить общие ресурсы так, чтобы подтянуть подсистемы с малыми уровнями $\hat{z}^k$. Сделать это можно следующим образом.

Введем параметр $t \in [0, 1]$ и рассмотрим распределения общих ресурсов

$$c^k(t) = c^k + t\,[R^k \tilde{X}^k - c^k], \quad k = \overline{1,l}. \tag{11}$$

Известно, что оптимальное значение целевой функции $z^k(t)$ в k-й подсистеме является вогнутой функцией параметра t. Поэтому и достигнутый общесистемный уровень

$$z(t) = \min_k z^k(t) \tag{12}$$

также является вогнутой функцией. Тогда для поиска максимума $z(t)$ на промежутке $[0,1]$ можно применить метод золотого сечения.

Если оптимальный план $\hat{z}^k, \hat{X}^k$ в подсистеме с номером k невырожденный, то для некоторого $t_0 > 0$ при $t \in [0, t_0]$ оптимальный базис задачи этой подсистемы меняться не будет, и оптимальное значение целевой функции будет равно величине

$$z^k(t) = \hat{z}^k + t\,\pi^k [R^k X^k - c^k].$$

Так как план $\tilde{z}, \tilde{X}^k;\ k = \overline{1,l}$, удовлетворяет неравенствам (9), а оценки оптимального плана подсистемы зависят только от базиса, но не от правых частей ограничений, то при движении в пределах базисов, для которых построены ограничения (9), будут выполнены неравенства

$$z^k(t) \geq \hat{z}^k + t\,[\tilde{z} - \hat{z}^k]. \tag{13}$$

Мы видим, что увеличение уровня k-й подсистемы тем сильнее, чем дальше достигнутый уровень от оценки $\tilde{z}$. Отметим, что подтягиваются уровни не только в тех подсистемах, у которых $\hat{z}^k$ наименьшее, но во всех, в которых уровень $\hat{z}^k$ меньше оценки $\tilde{z}$.

Если оптимальный план $\hat{z}^k, \hat{X}^k$ вырожденный, то в подсистеме может оказаться несколько оптимальных базисов, один из которых сохранится при возрастании параметра t от нуля. Формально, чтобы обеспечить в этом случае существование $t_0 > 0$, до которого выполнено неравенство (13), для k-й подсистемы при определении $\tilde{z}$ нужно построить не одно неравенство (9), а несколько аналогичных неравенств, написанных с различными оценками π^k, которые соответствуют разным оптимальным базисам в k-й подсистеме. Отметим, что при смене

оптимального базиса как в вырожденном, так и в невырожденном случаях скорость роста уровня k -й подсистемы уменьшится.

Поскольку мы заговорили о вырождении, то стоит сразу отметить следующее. Произведенная нами декомпозиция ограничений (10) ведет к вырождению в оптимальных планах задач (I). Однако это касается лишь оптимального распределения общих ресурсов по подсистемам, т.е. конца всего процесса их распределения. Если же мы еще далеки от оптимального распределения, то встретить вырождение в задачах (I), по-видимому, не более вероятно, чем в общей задаче (4), не подвергнутой декомпозиции.

Займемся теперь обоснованием сходимости предложенного алгоритма. С этой целью приведем его компактную формулировку.

I. Выбирается некоторое начальное распределение (5) общих ресурсов.

2. При заданном распределении (5) решаются задачи подсистем (I) и получаются их оптимальные планы $\hat{z}^k, \hat{X}^k$, а также оценки общих ресурсов $\hat{\pi}^k$.

3. Для всех подсистем формируются ограничения (9). При этом если оптимальный план подсистемы, полученный в п. 2, вырожденный, то этой подсистеме соответствует не одно, а несколько ограничений вида (9): каждому оптимальному базису соответствуют свои оценки $\hat{\pi}^k$ и соответственно свое ограничение (9).

4. Решается задача центра о максимизации z при ограничениях (9) и (I0) и определяются $\tilde{z}, \tilde{X}^k, k=\overline{1,l}$. Если оказалось, что $\tilde{z} - \min_k \hat{z}^k \le \varepsilon$, то процесс окончен. В противном случае переходим к следующему пункту.

5. На отрезке $[0,1]$ ищется максимум вогнутой функции (I2). Если делать это по схеме золотого сечения, то для вычисления $z(t)$ нужно по формулам (II) задать распределение общих ресурсов и обратиться к решению задач в подсистемах.

6. Если t^* - значение параметра, определенное в п. 5, т.е. значение, при котором $z(t^*)$ максимально, то делается новое распределение общих ресурсов по формулам (II) с $t = t^*$, и процесс повторяется, начиная с п. 2.

Описанный процесс является, конечно, лишь идеальной схемой. При его практической реализации возможны и, видимо, целесообразны те или иные модификации. Некоторые замечания на этот счет будут сделаны ниже. Однако одну модификацию мы вынуждены сде-

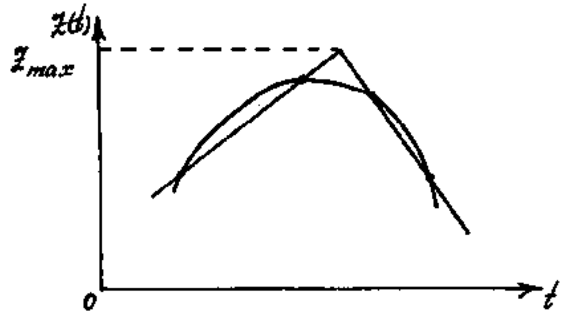
лать сразу. Дело в том, что изложенный алгоритм по своей структуре близок к методу возможных направлений, и для избежания зигзагообразного движения нужно принимать обычные меры предосторожности на тот случай, если оптимальный план какой-либо подсистемы окажется близок к вырожденному и это повлечет за собой слишком малое смещение по t, т.е. значение t^* окажется близким к нулю. С этой целью выберем число $\delta \in (0,1]$ и модифицируем процесс следующим образом. Определив $z(t^*)$, проверим неравенство

$$z(t^*) - \min_k \hat{z}^k > \delta[\tilde{z} - \min_k \hat{z}^k] \geq \delta\varepsilon. \qquad (14)$$

Если оно нарушено, то найдется подсистема, для которой порог t_0 сохранения оптимального базиса меньше δ. В этом случае для базиса, который становится оптимальным при переходе через t_0, мы возьмем соответствующие ему оценки и уровень $z^k(t_0)$ и построим дополнительное ограничение (9) в задаче центра. После этого заново выполним п. 4. При этом увеличивается число базисов в задаче k-й подсистемы, при движении по которым с ростом t соблюдается неравенство (13). Поскольку различных базисов конечное число, то через конечное число таких уточнений задачи центра (если они вообще понадобятся) мы либо получим оценку $\tilde{z} < \varepsilon + \min_k \hat{z}^k$ и закончим процесс, либо осуществим сдвиг с соблюдением неравенства (14). Таким образом обеспечивается конечность процесса.

Сделаем теперь несколько замечаний о практической реализации процесса. Во-первых, начальное распределение общих ресурсов целесообразно делать с учетом возможностей подсистем по их использованию. Например, можно сначала найти равноэффективный план распределения, а затем если он окажется не оптимальным по системе в целом (что покажет оценка $\tilde{z}$), приступить к его улучшению описанным алгоритмом. Во-вторых, при возникновении вырождения в какой-либо подзадаче не обязательно выписывать сразу ограничения (9) для всех оптимальных базисов. Их можно пополнять по мере необходимости так же, как это сделано в модификации с параметром δ. В-третьих, нет необходимости искать очень точно максимум функции $z(t)$. Можно остановиться на таком t, при котором приращение $z(t) - \min_k \hat{z}^k$ достаточно велико или, наоборот, оценка максимально возможного

роста $z(t)$ при продолжении метода золотого сечения уже мала. Эта оценка может быть сделана на основании свойств графика вогнутой функции. Способ получения такой оценки показан на рисунке.



Наконец, задачу центра можно еще более огрубить, заменив ограничения (9) и (10) условиями

$$z \leq \hat{z}^{k} + \pi^{k}[\tilde{c}^{k} - c^{k}], \qquad (9')$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \tilde{c}^{k} \leq b, \quad \tilde{c}^{k} \geq 0. \qquad (10')$$

Здесь неизвестными являются $\tilde{c}^{k}$, $k = \overline{1,\ell}$, и максимизируемый уровень z. В этом случае задача центра не учитывает структуру потребления общих ресурсов в подсистемах, так что ход процесса должен быть, вообще говоря, худшим, чем в описанном ранее варианте.

Выше был рассмотрен базовый алгоритм построения оптимального плана в больших экономических системах при ряде упрощающих предположениях, принятых для более четкого изложения процесса. В практических расчетах, как правило, вводится ряд дополнительных условий и ограничений, в частности, отсутствие валовой заменимости ресурсов. Это приводит к модификациям алгоритма, в которых общесистемная целевая функция заменяется последовательностью таких функций, для которой ищется лексикографический максимум (минимум). Конкретные модификации процесса приведены в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., МАРШАК В.Д. Модели оптимального функционирования отраслевых систем. - М.: Экономика, I979.

2. Математическое обеспечение перспективного отраслевого планирования / Анциз С.М., Макаров В.Л., Маршак В.Д., Фефелов В.Ф. - Новосибирск: Наука, I979.

Поступила в ред.-изд. отдел
26.I2.I982 г.