Выпуск 39(42) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Выпуклый анализ

УДК 513.88

БИНАРНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

И.В.Лашкин

Свойство бинарного пересечения выпуклых множеств применяется при представлении выпуклых множеств векторного пространства в качестве порядковых отрезков пространства Канторовича [1-3].

В настоящей заметке изучается свойство бинарного пересечения выпуклых множеств в абелевой группе.

1. Обозначения и терминология. Рассмотрим точки x, y, z из абелевой группы X. Будем писать $z \in seg(x,y)$, если существуют натуральные числа m и n такие, что $(m+n)z = mx + ny$.

Множество E называется выпуклым в абелевой группе X, если $seg(x,y) \subseteq E$ для всех $x, y \in E$. Множество E называется центрально-симметричным в X, если существует элемент $c \in X$ такой, что $E-c = c-E$. При этом элемент $c \in X$ называется центром симметрии множества E. Выпуклое множество E называется абсолютно выпуклым в X, если $E = -E$. Точка z из выпуклого множества E называется его крайней точкой, если для любых $x, y \in E$ из $z \in seg(x,y)$ следует $x = y = z$. Множество E, содержащее нуль, называется архимедовым в X, если для любого $x \in E$ такого, что

$$\{nx : n \in N\} \subseteq E$$

(N - совокупность всех натуральных чисел) выполняется $x = 0$. Множество E, содержащее нуль, называется формально-замкнутым в абелевой группе X, если для любого $x_0 \in X$ из условия $E \cap (\{x \in X : \mu x \in E\} + x_0) \neq \emptyset$ для каждого $\mu \in N$ следует $x_0 \in E$.

Множество G в X поглощает множество E из X, если существует $n \in N$ такое, что $E \subseteq nG$.

Семейство множеств $\mathcal{E}$ в X называется сцепленным, если для любых множеств $E, F \in \mathcal{E}$ выполняется $E \cap F \neq \emptyset$. Семейство множеств $\mathcal{E}$ в X обладает свойством бинарного пересечения, если для любого сцепленного семейства $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ выполняется $\cap\{E : E \in \mathcal{E}'\} \neq \emptyset$. Семейство множеств $\mathcal{E}$ в X называется направленным, если для произвольных множеств $E, F \in \mathcal{E}$ существует множество $G \in \mathcal{E}$, поглощающее множества E и F.

Пусть Z - совокупность всех целых чисел, X_E - наименьшая подгруппа группы X, содержащая множество E, $X_{\mathcal{E}} = \cup\{X_E : E \in \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{E}$ - некоторое семейство множеств в X.

Напомним, что стертыми K-пространствами называются группы, получающиеся из пространств Канторовича при игнорировании умножений на действительные числа.

2. Основной результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для абсолютно выпуклого архимедова формально-замкнутого множества E в абелевой группе X эквивалентны утверждения:

(1) семейство множеств

$$\{x + nE : x \in X,\ n \in Z\}$$

обладает свойством бинарного пересечения, а множество E имеет крайнюю точку;

(2) существует порядок $\leqslant_E$ на X_E такой, что $(X_E, \leqslant_E)$ - стертое K-пространство ограниченных элементов, и $E = [-1_E, 1_E]_{\leqslant_E}$, где 1_E - сильная единица в $(X_E, \leqslant_E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.1 проведем в несколько этапов, которые удобно оформить в виде вспомогательных предложений. В следующих предложениях 2.2-2.6 множество E является абсолютно выпуклым архимедовым формально-замкнутым и имеет крайнюю точку в абелевой группе X. При этом семейство множеств $\{x+nE : x\in X, n\in Z\}$ обладает свойством бинарного пересечения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для любого $y\in X_E$ и любого $n\in N$ существует единственный элемент $x\in X_E$ такой, что $nx=y$, т.е. группа X_E делимая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $y\in X_E$ является крайней точкой множества E. Рассмотрим семейство из трех множеств:

$$\{E, (n-1)E+ny, nE\} \quad (n\in N\setminus\{1\}).$$

Заметим, что

$$ny\in((n-1)E+ny)\cap nE,$$

$$0\in E\cap nE,$$

$$y\in E\cap((n-1)E+ny).$$

Отсюда следует, что семейство множеств

$$\{E, (n-1)E+ny, nE\}$$

сцепленное. Покажем, что

$$\{y\}=E\cap((n-1)E+ny).$$

Рассмотрим $x\in E\cap((n-1)E+ny)$, тогда $x=(n-1)\cdot z+n\cdot y$ для некоторого z из E. Следовательно, получаем $1\cdot x+(n-1)\cdot(-z)=n\cdot y$. Учитывая, что y – крайняя точка множества E, заключаем $x=-z=y$. Далее, из сцепленности семейства множеств

$$\{E, (n-1)E+ny, nE\}$$

вытекает

$$E\cap((n-1)E+ny)\cap nE\neq\emptyset.$$

Отсюда, с учетом

$$\{y\}=E\cap((n-1)E+ny),$$

получаем $y\in nE$. Таким образом, для y существует единственный элемент y/n из E такой, что $y=n\cdot(y/n)$.

Аналогично может быть показано, что для любого $n \in N\setminus\{1\}$ единственным образом определен элемент $(2y)/n$.

Имеет место следующее представление:

$$2\cdot y = n\cdot((2y)/n) = 2\cdot y + (n-2)\cdot 0 \quad (n\in N\setminus\{1\}).$$

Абсолютная выпуклость множества E дает $(2y)/n\in E$.

Пусть теперь e – произвольный элемент из E . Заметим, что

$$0\in(E-e)\cap nE,$$

$$(y-e)\in(E-e)\cap((E-e)+2y),$$

$$2y\in((E-e)+2y)\cap nE,$$

где y – крайняя точка множества E , а $n\in N\setminus\{1\}$. Отсюда заключаем, что семейство из трех множеств

$$\{E-e,(E-e)+2y, nE\}$$

сцепленное. Покажем, что

$$\{(y-e)\}=(E-e)\cap((E-e)+2y).$$

В самом деле, рассмотрим

$$x\in(E-e)\cap((E-e)+2y),$$

т.е. $x=\bar{x}-e=\bar{y}-e+2y$ для некоторых $\bar{x},\bar{y}\in E$. Таким образом, получаем $1\cdot\bar{x}+1\cdot(-\bar{y})=2y$. Так как y – крайняя точка множества E , то $\bar{x}=-\bar{y}=y$. Сцепленность семейства множеств

$$\{E-e,(E-e)+2y, nE\}$$

дает

$$(E-e)\cap((E-e)+2y)\cap nE\neq\varnothing.$$

Теперь понятно, что $(y-e)\in nE$. Таким образом, существует единственный элемент $(y-e)/n$ из E такой, что $(y-e)=n((y-e)/n)$. Поэтому $e=n(y/n-(y-e)/n)$. Итак, X_E – делимая группа. Предложение 2.2. доказано.

На группе X_E определим топологию τ_E следующим образом. Множество $\mathcal{U}$ является окрестностью точки x из X_E

в топологии τ_E, если существует рациональное число q такое, что $\mathcal{U} \supseteq qE+x$. Отметим, что (X_E, τ_E) – топологическая абелева группа, а $\{x \in X : \mu x \in E\} = 1/\mu\, E$ для всех $\mu \in N$. Таким образом, формально-замкнутое множество E является замкнутым относительно топологии τ_E.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для любого $n \in N$ выполняется

$$1/n\, E = \cap \{(E-(1-1/n)y) : y \in E\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выпуклости множества E, $1/n\, E \subseteq E-(1-1/n)y$ для всех $y \in E$. Пусть $x \in E-(1-1/n)y$ для всех $y \in E$. Тогда, учитывая абсолютную выпуклость множества E, получим $\left(\sum_{k=0}^{m}(1-1/n)^k\right)x \in E$ для всех $m \in N$. Устремляя m к бесконечности и учитывая замкнутость множества E относительно топологии τ_E, получим $\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1-1/n)^k\right)x = nx \in E$. Предложение 2.3 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Семейство множеств

$$\{x + \tfrac{m}{n} E : x \in X,\ m, n \in Z \setminus \{0\}\}$$

обладает свойством бинарного пересечения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сцепленное семейство множеств $\{\tilde{x}(\alpha) + \frac{\tilde{m}(\alpha)}{\tilde{n}(\alpha)} E : \alpha \in A\}$, где A – некоторое множество, $\tilde{x} : A \to X$, $\tilde{m}, \tilde{n} : A \to Z \setminus \{0\}$ – некоторые отображения. Нетрудно заметить, учитывая абсолютную выпуклость множества E, что $\tilde{x}(\alpha) + \frac{\tilde{m}(\alpha)}{\tilde{n}(\alpha)} E \subseteq \tilde{x}(\alpha) E - \tilde{m}(\alpha)(1-1/\tilde{n}(\alpha))y$ для всех $y \in E$. Поэтому существует элемент ξ из X такой, что $\xi \in (\tilde{x}(\alpha) + \tilde{m}(\alpha)E - \tilde{m}(\alpha)(1-1/\tilde{n}(\alpha))y)$ для всех $\alpha \in A$, $y \in E$. Отсюда, учитывая предложение 2.3, получим $\frac{\xi - \tilde{x}(\alpha)}{\tilde{m}(\alpha)} \in \cap\{(E-(1-1/\tilde{n}(\alpha))y) : y \in E\} = 1/\tilde{n}(\alpha) E$ для всех $\alpha \in A$. Поэтому семейство множеств $\{x + \frac{m}{n} E : x \in X, m, n \in Z \setminus \{0\}\}$ обладает свойством бинарного пересечения. Предложение 2.4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. (X_E, τ_E) – полная топологическая абелева группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ – фундаментальная последовательность относительно топологии τ_E в (X_E, τ_E). Отсюда следует, что можно определить функцию $\tilde{n} : N\setminus\{1\} \to N$ следующим образом. Произвольному натуральному числу $\mu \geqslant 2$ сопоставим натуральное число $\tilde{n}(\mu)$ таким образом, что $(x_n - x_m) \in 1/\mu E$ для всех натуральных чисел $n, m \geqslant \tilde{n}(\mu)$. Покажем, что $(x_n - 1/\mu E) \cap (x_m - 1/\nu E) \neq \emptyset$ для всех $\mu, \nu \in N\setminus\{1\}$, $m, n \in N$, $n \geqslant \tilde{n}(\mu)$, $m \geqslant \tilde{n}(\nu)$. Действительно, пусть, например, $\tilde{n}(\nu) \geqslant \tilde{n}(\mu)$. Тогда $m \geqslant \tilde{n}(\mu)$, поэтому $(x_n - x_m) \in 1/\mu E$. А отсюда получим $x_m \in (x_n - 1/\mu E) \cap \cap (x_m - 1/\nu E)$. Поэтому, согласно предложению 2.4, существует $\xi \in (x_n - 1/\mu E)$ для всех $\mu \in N\setminus\{1\}$ и $n \in N$, $n \geqslant \tilde{n}(\mu)$. А это означает, что $\xi = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \in X_E$. В силу архимедовости множества E такой элемент ξ единственный. Предложение 2.5 доказано.

Рассмотрим последовательность рациональных чисел $\{q_n\}_{n\in N}$, сходящуюся к вещественному числу t. Для любого x из X_E последовательность $\{q_n x\}_{n\in N}$ является фундаментальной в полной топологической абелевой группе (X_E, τ_E). Поэтому корректным образом можно определить умножение любого элемента x из X_E на вещественное число t, т.е. $tx = (\lim\limits_{n\to\infty} q_n x) \in X_E$. Таким образом, X_E есть векторное пространство над полем вещественных чисел R.

С учетом предложения 2.5 справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Семейство множеств

$$\{x + tE : x \in X,\quad t \in R\}$$

обладает свойством бинарного пересечения.

Отметим, что из архимедовости множества E вытекает, что $rec_X(E) = \{x \in X : E + R^+ x \subseteq E\} = \{0\}$, где R^+ – совокупность всех вещественных положительных чисел.

Предложение 2.1 получается из вспомогательных предложений 2.2–2.6 и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА (Л.Нахбин [1,2]). Для выпуклого множества E в векторном пространстве Y такого, что $rec_Y(E) = \{y \in Y : E + R_y^+ \subseteq E\} = \{0\}$, эквивалентны утверждения:

(I) семейство множеств

$$\{y+tE : y\in Y,\ t\in R\}$$

обладает свойством бинарного пересечения, а множество E имеет крайнюю точку;

(2) на Y_E (Y_E – наименьшее векторное подпространство Y, содержащее E) существует порядок $\leqslant_E$ такой, что $(Y_E, \leqslant_E)$ – K-пространство ограниченных элементов и $E = [-1_E, 1_E]_{\leqslant_E}$, где 1_E – сильная единица в $(Y_E, \leqslant_E)$.

3. СЛЕДСТВИЕ. Для направленного семейства $\mathscr{E}$ центрально-симметричных выпуклых архимедовых формально-замкнутых множеств в абелевой группе X эквивалентны утверждения:

(I) семейство множеств

$$\{x+nE : x\in X,\ n\in Z,\ E\in\mathscr{E}\}$$

обладает свойством бинарного пересечения, а каждое множество E из $\mathscr{E}$ имеет крайнюю точку.

(2) на $X_{\mathscr{E}}$ существует порядок $\leqslant_{\mathscr{E}}$ такой, что $(X_{\mathscr{E}}, \leqslant_{\mathscr{E}})$ – стертое K пространство, а $\mathscr{E}$ – некоторая совокупность ограниченных порядковых отрезков в $(X_{\mathscr{E}}, \leqslant_{\mathscr{E}})$.

Автор признателен Г.П.Акилову и А.Г.Кусраеву за советы и полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. NACHBIN L. A theorem of the Hahn - Banach type for linear transformations. - Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, p.28-46.

2. NACHBIN L. Some problems in extending and lifting continuous linear transformations. - Proc. Intern. Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1960, p. 340-350.
3. LINDENSTRAUSS J. Extension of compact operators. - Mem. Amer. Math. Soc., 1964, №48.
4. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
5. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. - М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в ред.-изд. отдел
6.04.1983 г.