

УДК 519.852.64:67

УПОРЯДОЧЕНИЕ БЛОКОВ ПРИ ОБНОВЛЕНИИ БАЗИСА  
С БЛОЧНОЙ СТРУКТУРОЙ

Р.А.Звягина

В вычислительных процессах блочного программирования преобразование базисной матрицы в блочно-треугольную основывается на некоторой последовательности ее разбиений на клетки с учетом в той или иной мере следующих условий:

- а) хорошей обусловленности главных подматриц (т.е. квадратных клеток на главной диагонали) в блочно-треугольной матрице;
- б) минимизации количества ненулевых элементов, появляющихся в процессе преобразований дополнительно к заполненности исходной матрицы.

Для матрицы с разветвленной блочностью [1-3] построенное здесь частичное упорядочение некоторого подмножества в множество блоков дает возможность учитывать оба эти условия при разбиении крупных базисных клеток, начиная с самой матрицы, на более мелкие. При этом в вычислительном алгоритме для решения систем используется другое, определенное ранее [1,3], частичное упорядочение всего множества блоков, выявляющее блочную треугольность матрицы за один его просмотр в прямом или обратном порядке.

1. Частичное упорядочение семейства зон структурного графа. Предположим, что все ненулевые элементы квадратной невырожденной матрицы  $A[M, N]$  заключены в подматрицах (блоках)

$$A[M_k, N_k], \quad k \in P = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}. \quad (I)$$

с попарно-непересекающимися множествами  $M_k \times N_k, k \in P$ .

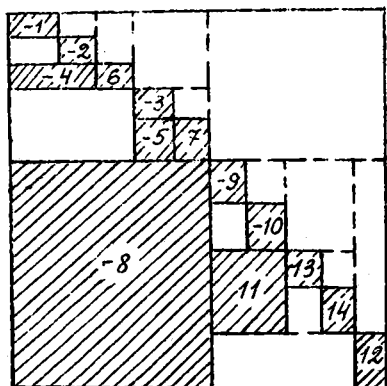


Рис. 1

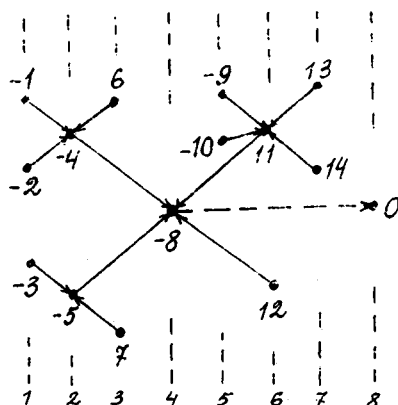


Рис. 2

Например, блокам (I) на рис.1 соответствуют заштрихованные части при

$$P = \{-1, -2, -3, -4, -5, 6, 7, 14, -9, -10, 11, 12, 13, -8\}.$$

Блочная структура матрицы  $A[M, N]$  имитируется связным ориентированным деревом с корнем  $\bar{k} = k_p$  и множеством вершин  $P$ , а множество дуг можно задать списком  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{p-1}\}$  их конечных вершин соответственно списку начальных вершин  $\{k_1, k_2, \dots, k_{p-1}\}$ . Например,  $k_p = -8$  на рис. 1 и 2, а

$$G = \{-4, -4, -5, -8, -8, -4, -5, 11, 11, 11, -8, -8, 11\}.$$

Зоной  $P_\sigma^k$  вершины  $k$  назовем множество тех вершин  $t \in P$ , из которых имеется путь в  $k$ , проходящий лишь через вершины одного и того же знака  $\sigma$ . Сложность алгоритма, преобразующего  $A[M, N]$  в блочно-треугольную матрицу

$$B[M, N] = T[M, M] \cdot A[M, N] \cdot R[N, N]$$

с главными подматрицами  $B[I_k, J_k]$ ,  $k \in P$ , существенно зависит от наличия зон  $P_\sigma^k$  со знаком  $\sigma = -\text{sign } k$ . Преодолевается эта сложность специальным упорядочением таких вершин  $k$ , а тем самым и упорядочением семейства примыкающих к ним зон противоположного знака. Предположим, что  $\bar{k} < 0$ , и дополним список  $G$  фиктивной вершиной  $g_p = 0$ , введя фик-

тивную дугу  $(\bar{k}, 0)$ . Тогда  $P_{-1}^0 = P_{-1}^k \cup \{\bar{k}\}$ , а  $P_1^0 = \emptyset$ .  
Положим

$$L_1 = \{0\}, L_s = \{k \in \bigcup_{\tau \in L_{s-1}} P_{\sigma(s-1)}^{\tau} : P_{\sigma(s)}^k \neq \emptyset\},$$

$$\sigma(s) = (-1)^s, s = 2, 3, \dots, z,$$

где  $z \geq 1$  определяется как наименьший номер, для которого  $L_{z+1} = \emptyset$ . Частичный порядок в объединении множеств  $L_s$ ,  $1 \leq s \leq z$ , устанавливается возрастанием  $s = 1, 2, \dots, z$ .

Обозначим через  $P(k)$  множество тех вершин  $k_i \in P$ , для которых  $g_i = k$ , и разобьем его на два подмножества:  
 $P_{\sigma}(k) = \{\tau \in P(k) : \text{sign } \tau = \sigma\}$ ,  $\sigma = -1, 1$ . Положим

$$M^k = \bigcup_{\tau \in P_{-1}^k \cup \{k\}} M_{\tau}, \quad N^k = \bigcup_{\tau \in P_1^k \cup \{k\}} N_{\tau}, \quad k \in P.$$

Учет блочной структуры в алгоритмах основывается на соотношениях  $M = M^k = M^0$ ,  $N = N^k = N^0$  и

$$M^{\tau} \cap M^{\alpha} = N^{\tau} \cap N^{\alpha} = \emptyset, \alpha \neq \tau; \alpha, \tau \in P(k),$$

$$N^{\alpha} \subset N_{\tau}, \alpha \in P_{-1}(\tau), M^{\alpha} \subset M_{\tau}, \alpha \in P_1(\tau), \quad (2)$$

эквивалентных согласованности [I-3] структурного графа  $(P, G)$  с расположением (I) ненулевых элементов в матрице  $A[M, N]$ .

2. Обновление базиса. Предположим по индукции, что для некоторого  $s \geq 1$  определена блочно-треугольная матрица

$$B_{s-1}[M, N] = T_{s-1} \dots T_2 T_1 A[M, N] R_1 R_2 \dots R_{s-1}$$

с главными подматрицами

$$B_{s-1}[I_{\sigma(s)}^k, J_{\sigma(s)}^k], \sigma(s) = (-1)^s, k \in L_s, \quad (3)$$

$$B_{s-1}[I_k, J_k] = B[I_k, J_k], k \in \bar{L}_{s-1},$$

где  $I_{\sigma(s)}^k \subset M^k$ ,  $J_{\sigma(s)}^k \subset N^k$ , а

$$\bar{L}_{s-1} = \bigcup_{1 \leq t < s} \{L_t \cup (\bigcup_{\tau \in L_t} P_{\sigma(t)}^{\tau}) \setminus L_{t+1}\}.$$

При этом блоки (3), подлежащие дальнейшему разбиению на клетки, наследуют структуру соответствующих вырезов из матрицы

$A[M, N]$ . Более того, для  $k \in L_s$  соответственно случаю нечетного или четного  $s$  верна первая или вторая группа

соотношений:

$$\begin{aligned} B_{\beta-1}[M_{\alpha} \cap I_{-1}^k, J_{-1}^k] &= A[M_{\alpha} \cap I_{-1}^k, J_{-1}^k], \quad \alpha \in P_{-1}^k, \\ B_{\beta-1}[I_{-1}^k, N_{\alpha} \cap J_{-1}^k] &= A[I_{-1}^k, N_{\alpha} \cap J_{-1}^k], \quad \alpha \in P_{-1}^k. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку  $\bar{L}_0 = \emptyset$ , а  $L_1 = \{0\}$ , то при  $\beta = 1$  все предположения выполняются, если положить  $B_0[I_{-1}^0, J_{-1}^0] = A[M, N]$ .

Основу описываемого ниже алгоритма составляет вычисление некоторых невырожденных матриц

$$R_{\tau}[J_{-1}^k, J_{-1}^k], \tau \in P_{-1}^k, k \in L_{2i-1}, T_{\tau}[I_{-1}^k, I_{-1}^k], \tau \in P_{-1}^k, k \in L_{2i}, \quad (5)$$

в порядке возрастания  $i = 1, 2, \dots, \bar{z} \leq (\tau+1)/2$ , позволяющих построить при  $k \in L_{2i-1}$  невырожденные преобразования

$$R_k(P_{-1}^{\tau} U\{\tau\}) = R_k(P_{-1}^{\tau}) \cdot R_{\tau}[J_{-1}^k, J_{-1}^k], \quad \tau \in P_{-1}^k,$$

а при  $k \in L_{2i}$  - невырожденные преобразования

$$T_k(P_{-1}^{\tau} U\{\tau\}) = T_{\tau}[I_{-1}^k, I_{-1}^k] \cdot T_k(P_{-1}^{\tau}), \quad \tau \in P_{-1}^k,$$

в порядке приближения  $\tau \in P_{\sigma}^k$  ( $\sigma = -1, 1$ ) к корню  $k$  зоны  $P_{\sigma}^k$ , начиная с ее концевых вершин, для которых  $P_{\sigma}^{\tau} = \emptyset$ .

При этом

$$\begin{aligned} R_k(P_{-1}^{\tau}) &= \prod_{\alpha \in P_{-1}(\tau)} R_k(P_{-1}^{\alpha} U\{\alpha\}), \quad \tau \in P_{-1}^k U\{k\}, \\ T_k(P_{-1}^{\tau}) &= \prod_{\alpha \in P_{-1}(\tau)} T_k(P_{-1}^{\alpha} U\{\alpha\}), \quad \tau \in P_{-1}^k U\{k\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где произведение по пустому множеству  $P_{-1}(\tau) \subset P_{-1}^{\tau}$  или  $P_{-1}(\tau) \subset P_{-1}^{\tau}$  равно единичной матрице  $E[J_{-1}^k, J_{-1}^k]$  или  $E[I_{-1}^k, I_{-1}^k]$  соответственно.

Таким образом, для всех  $k \in L_{2i-1}$  можно определить в произвольном порядке матрицы  $R_k(P_{-1}^k)$  и положить преобразование  $T_{2i-1}$  равным единичной матрице  $E[M, M]$ , а  $R_{2i-1}$  получить заменой в единичной матрице  $E[N, N]$  для каждого  $k \in L_{2i-1}$  блока  $E[J_{-1}^k, J_{-1}^k]$  матрицей  $R_k(P_{-1}^k)$ . Аналогично для всех  $k \in L_{2i}$  определим матрицы  $T_k(P_{-1}^k)$  и положим  $R_{2i} = E[N, N]$ , а  $T_{2i}$  получим заменой в  $E[M, M]$  для каждого  $k \in L_{2i}$  блока

$E[I_1^k, I_1^k]$  матрицей  $T_k(P_1^k)$ . Полагая  $s = 1, 2, \dots, z+1$ , придем к матрице  $B[M, N] = B_z[M, N]$  с  $L_z = P$ .

С целью определения матриц (5) предположим, что при некотором  $\tau \in P_1^k \cup \{k\}$  ( $k \in L_s$ ,  $s = 2i-1 \geq 1$ ) имеем блочно-треугольную матрицу

$$B_s^\tau[I_{-1}^k, J_{-1}^k] = B_{s-1}[I_{-1}^k, J_{-1}^k] \cdot R_k(P_{-1}^\tau) \quad (7)$$

с главными подматрицами (при  $I_1^\alpha \subset M_\alpha$ ,  $J_1^\alpha \subset N^\alpha$ ,  $\alpha \in P_1^\tau$ )

$$B_s^\tau[I_1^\alpha, J_1^\alpha], \alpha \in P_1^\tau, B_s^\tau[I_1^k(\bigcup_{\alpha \in P_1^\tau} I_1^\alpha), J_{-1}^k(\bigcup_{\alpha \in P_1^\tau} J_1^\alpha)]. \quad (8)$$

В конечных вершинах  $\tau$  зоны  $P_{-1}^k$  эти предположения, очевидно, выполняются. Если  $\tau \neq k$ , то, учитывая (4) и (7), в полосе

$$B_s^\tau[M_\tau \cap I_{-1}^k, J_{-1}^k] = A[M_\tau \cap I_{-1}^k, J_{-1}^k] \cdot R_k(P_{-1}^\tau)$$

рассмотрим вырезку  $B_s^\tau[I_1^\tau, \tilde{J}_{k\tau}]$ , строки которой при

$$I_1^\tau = M_\tau \cap I_{-1}^k, \tilde{J}_{k\tau} = (N^\tau \cap J_{-1}^k) \setminus (\bigcup_{\alpha \in P_1^\tau} J_1^\alpha)$$

линейно-независимы в силу невырожденности матриц (3) и (8).

Следовательно, в ней можно выбрать базисную матрицу  $B_s[I_1^\tau, J_1^\tau] = B_s^\tau[I_1^\tau, J_1^\tau]$  и исключить [2] остальные столбцы, умножив матрицу (7) справа на преобразование  $R_\tau[J_{-1}^k, J_{-1}^k]$ , которое отличается от  $E[J_{-1}^k, J_{-1}^k]$  разве лишь блоком

$$R_\tau[J_1^\tau, J_{k\tau}] = -(B_s[I_1^\tau, J_1^\tau])^{-1} \cdot B_s^\tau[I_1^\tau, J_{k\tau}], J_{k\tau} = \tilde{J}_{k\tau} J_1^\tau. \quad (9)$$

Если при этом  $P_1^\tau = \rho'$ , то  $B[I_\tau, J_\tau] = B_s[I_\tau, J_\tau] = B_s^\tau[I_1^\tau, J_1^\tau]$ . В противном случае  $\tau \in L_{s+1}$ , а учет блочной структуры при выборе базисного множества  $J_1^\tau$  тем эффективнее, чем больше его элементов попадает в подмножество  $J_1^\tau \cap N_\alpha$ ,  $\alpha \in P_1^\tau$ , с удалением  $\alpha$  от корня зоны  $P_1^\tau$ .

Аналогично (по симметрии) для  $k \in L_s$ ,  $s = 2i \geq 2$ , в полосе

$$B_s^\tau[I_1^k, N_\tau \cap J_1^k] = T_k(P_1^\tau) \cdot A[I_1^k, N_\tau \cap J_1^k], \tau \in P_1^k,$$

рассмотрим вырезку  $B_s^\tau[\tilde{I}_{k\tau}, J_1^\tau]$  с линейно-независимыми столбцами при

$$\tilde{I}_{k\tau} = (M^\tau \cap I_1^k) \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \rho_1^\tau} I_{-1}^\alpha \right), \quad J_{-1}^\tau = N_\tau \cap J_1^k.$$

В ней можно выбрать базисную матрицу  $B_s[I_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau] = B_s^\tau[I_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau]$  и исключить [2] остальные строки, умножив

$$B_s^\tau[I_1^k, J_1^k] = T_k(\rho_1^\tau) \cdot B_{s-1}[I_1^k, J_1^k]$$

слева на преобразование  $T_k[I_1^k, I_1^k]$ , которое отличается от  $E[I_1^k, I_1^k]$  разве лишь блоком

$$T_k[I_{k\tau}, I_{-1}^\tau] = -B_s^\tau[I_{k\tau}, J_{-1}^\tau] \cdot (B_s[I_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau])^{-1}, \quad I_{k\tau} = \tilde{I}_{k\tau} I_{-1}^\tau. \quad (10)$$

Если при этом  $\rho_{-1}^\tau = \emptyset$ , то  $B[I_\tau, J_\tau] = B_s[I_\tau, J_\tau] = B_s^\tau[I_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau]$ . В противном случае  $\tau \in L_{s+1}$ , а учет блочной структуры тем эффективнее, чем больше элементов в множествах  $I_{-1}^\tau \cap M_\alpha$ ,  $\alpha \in \rho_{-1}^\tau$ , с удалением  $\alpha$  от корня зоны  $\rho_{-1}^\tau$ .

В силу соотношений (2) выбранная при  $\tau \in L_{s+1}$  базисная матрица  $B_s[I_{\sigma(s+1)}^\tau, J_{\sigma(s+1)}^\tau]$  отличается от соответствующей вырезки из  $A[M, N]$  разве лишь полосой  $B_s[I_1^\tau, N_\tau \cap J_1^\tau]$  при нечетном  $s$  или полосой  $B_s[M_\tau \cap I_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau]$  при четном  $s$ . Другими словами, выполняется одна из групп условий (4) с заменой  $k$  на  $\tau$  и  $s$  на  $s+1$ .

В результате перебора всех вершин  $\tau \in \rho_{\sigma(s)}^k$  в порядке приближения к корню зоны для вершины  $k \in L_s$  ( $s \geq 1$ ) получают множества

$$I_k = I_{\sigma(s)}^k \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \rho_{\sigma(s)}^k} I_{\sigma(s+1)}^\alpha \right), \quad J_k = J_{\sigma(s)}^k \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \rho_{\sigma(s)}^k} J_{\sigma(s+1)}^\alpha \right),$$

пустые при  $k=0$ , и матрица  $B[I_k, J_k] = B_s[I_k, J_k] = B_s^k[I_k, J_k]$ .

Исходя из семейства пар  $I_\tau, J_\tau$ ,  $\tau \in P \cup \{0\}$ , определим множества

$$I_\sigma^\tau = I_\tau \cup \left( \bigcup_{\alpha \in \rho_\sigma^\tau} I_{-\sigma}^\alpha \right), \quad J_\sigma^\tau = J_\tau \cup \left( \bigcup_{\alpha \in \rho_\sigma^\tau} J_{-\sigma}^\alpha \right), \quad \sigma = -1, 1,$$

в порядке приближения  $\tau \in P \cup \{0\}$  к корню 0, начиная с концевых вершин графа, для которых  $\rho_\sigma^\tau = \emptyset$ ,  $\sigma = -1, 1$ . Это представление, очевидно, согласуется с определенными выше множествами  $I_{\sigma(s)}^\tau, J_{\sigma(s)}^\tau$  для  $\tau \in L_s$ ,  $1 \leq s \leq \tau$ . Тог-

да, распространяя определения (6) при  $\tau = k$  на все  $k \in P$ , получим представление матрицы

$$B[I_k, J_k] = E[I_k, I_1^k] \cdot T_k(P_1^k) \cdot A[I_1^k, J_1^k] \cdot R_k(P_1^k) \cdot E[J_1^k, J_k].$$

3. Решение систем. Предположим, что каждая из матриц  $B[I_k, J_k]$ ,  $k \in P$ , приведена к форме, удобной для решения систем (например, к обратной, треугольной, двухдиагональной и др). Кроме того, известно [3] упорядоченное семейство  $U_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, \ell$ , — разбиение множества  $P$ , задающее частичный порядок перебора вершин  $\tau \in P$ , при котором проявляется блочная треугольность матрицы  $B[M, N]$ . Например,  $\ell = 7$  на рис. 2, а множество  $U_t$  состоит из вершин, расположенных на одной и той же вертикали с номером  $t$ :

$$U_1 = \{-1, -2, -3\}, U_2 = \{-4, -5\}, U_3 = \{6, 7\}, U_4 = \{-8\}, \\ U_5 = \{-9, -10\}, U_6 = \{11, 12\}, U_7 = \{13, 14\}.$$

Используя матрицы (9)–(10), можно определить для любого  $\tau \in P$  преобразования

$$R_\tau(P_1^\tau) = R_\tau(U_1 \cap P_1^\tau) \cdot R_\tau(U_2 \cap P_1^\tau) \cdot \dots \cdot R_\tau(U_\ell \cap P_1^\tau), \\ T_\tau(P_1^\tau) = T_\tau(U_1 \cap P_1^\tau) \cdot T_\tau(U_2 \cap P_1^\tau) \cdot \dots \cdot T_\tau(U_\ell \cap P_1^\tau)$$

следующим образом: положим матрицу  $T_\tau(U_t \cap P_1^\tau)$  равной произведению матриц  $T_\alpha[I_1^\tau, I_1^\tau]$ ,  $\alpha \in U_t \cap P_1^\tau$ , а матрицу  $R_\tau(U_t \cap P_1^\tau)$  — произведению матриц  $R_\alpha[J_1^\tau, J_1^\tau]$ ,  $\alpha \in U_t \cap P_1^\tau$  (в произвольном порядке). Заметим, что эти определения также согласуются с введенными ранее определениями (6). При этом попутно получается алгоритмическое определение частично упорядоченной зоны  $P_\sigma^\tau$  ( $\sigma = \pm 1$ ) как объединения непустых множеств  $U_{t_i} \cap P_\sigma^\tau$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell_\tau \leq \ell$ . Перебор этих множеств в порядке возрастания  $t_i$  соответствует при  $\sigma = -1$  приближению их элементов  $\alpha$  к корню зоны, а при  $\sigma = 1$  — удалению от него. Наоборот, перебор непустых множеств  $U_{t_i} \cap P_\sigma^\tau$  в порядке убывания  $t_i$  соответствует при  $\sigma = 1$  приближению вершин  $\alpha$  к корню зоны, а при  $\sigma = -1$  — удалению от него. Порядок перебора  $\alpha$  в

множестве  $U_t \cap P_\sigma^z$  произвольный.

Вычислительный процесс решения системы

$$A[M, N] \cdot x[N] = b[M], \quad (II)$$

эквивалентной соотношениям

$$B[M, N] \cdot g[N] = T[M, M] \cdot b[M], \quad x[N] = R[N, N] \cdot g[N],$$

сводится к решению подсистем

$$B[I_t, J_t] \cdot g[J_t] = E[I_t, I_t^z] \cdot T_t(P_t^z) \cdot b_t[I_t^z], \quad t \in U_t, \quad (12)$$

в порядке возрастания  $t = 1, 2, \dots, \ell$ . Здесь

$$b_t[I_t^z] = u_{t-1}[I_t^z] - A[I_t^z, J_{t-1}^z] \cdot x_{t-1}[J_{t-1}^z \setminus J_t^z], \quad (13)$$

а столбцы  $u_{t-1}[M]$  и  $x_{t-1}[N]$  определяются по индукции, начиная с  $u_0[M] = b[M]$ ,  $x_0[N] = 0$ . Решив при некотором  $t \geq 1$  системы (12) в произвольном порядке, вычислим столбцы

$$x_t[N] = x_{t-1}[N] + \sum_{\tau \in U_t} E[N, J_\tau^z] \cdot R_\tau(P_\tau^z) \cdot E[J_\tau^z, J_t^z] \cdot g[J_t^z], \quad (14)$$

$$u_t[M] = u_{t-1}[M] - \sum_{\tau \in U_t} E[M, I_\tau^z] \cdot A[I_\tau^z, J_t^z] \cdot x_t[J_t^z]. \quad (15)$$

Решение системы (II) совпадает с вектором (14) при  $t = \ell$ .

Процесс решения транспонированной системы

$$y[M] \cdot A[M, N] = c[N], \quad (16)$$

эквивалентной соотношениям

$$h[M] \cdot B[M, N] = c[N] \cdot R[N, N], \quad y[M] = h[M] \cdot T[M, M],$$

получается по симметрии и сводится к последовательному решению подсистем

$$h[I_t] \cdot B[I_t, J_t] = c_t[J_t^z] \cdot R_t(P_t^z) \cdot E[J_t^z, J_t^z], \quad t \in U_t, \quad (17)$$

в порядке убывания  $t = \ell, \ell-1, \dots, 1$ . Здесь

$$c_t[J_t^z] = v_{t+1}[J_t^z] - y_{t+1}[I_t^z \setminus I_t] \cdot A[I_t^z \setminus I_t, J_t^z], \quad (18)$$

а строки  $v_{t+1}[N]$ ,  $y_{t+1}[M]$  определяются по индукции, начиная с  $v_{\ell+1}[N] = c[N]$ ,  $y_{\ell+1}[M] = 0$ . Решив при некотором

$t \leq \ell$  системы (I7) в произвольном порядке, вычислим строки

$$y_t[M] = y_{t+1}[M] + \sum_{\tau \in U_t} h[I_\tau] \cdot E[I_\tau, I_1^\tau] \cdot T_\tau(P_1^\tau) \cdot E[I_1^\tau, M], \quad (I9)$$

$$v_t[N] = v_{t+1}[N] - \sum_{\tau \in U_t} y_t[I_1^\tau] \cdot A[I_1^\tau, J_1^\tau \setminus J_\tau] \cdot E[J_1^\tau \setminus J_\tau, N]. \quad (20)$$

Решение системы (I6) совпадает с вектором (I9) при  $t = 1$ .

Симметричность описанных вычислительных процессов позволяет ограничиться обоснованием разве лишь равенства  $x[N] = x_p[N]$ .

Семейство  $U_p, 1 \leq p \leq \ell$ , дополним множеством  $U_{\ell+1} = \{0\}$  и, полагая

$$I^\tau = I_{-1}^\tau \cup I_1^\tau, J^\tau = J_{-1}^\tau \cup J_1^\tau, \quad \tau \in U_p \quad (1 \leq p \leq \ell+1),$$

заметим, что множества  $I^\tau, \tau \in U_p$ , равно как и множества  $J^\tau, \tau \in U_p$ , попарно не пересекаются. Для любого  $p$  в пределах  $1 \leq p \leq \ell+1$  обозначим через  $n_\sigma(p)$  наиболее удаленный от  $p$  номер, при котором  $(P_\sigma^\tau \cup \{\tau\}) \cap U_{n_\sigma(p)} \neq \emptyset$ , а через  $k_\sigma(p)$  - ближайший к  $p$  номер, при котором  $P_\sigma^\tau \cap U_{k_\sigma(p)} \neq \emptyset$ , хотя бы для одного  $\tau \in U_p$ . Тогда в случае  $P_\sigma^\tau \neq \emptyset$  верны представления

$$I_\sigma^\tau \cdot I_\tau = \bigcup_{\alpha \in P_\sigma^\tau \cap U_{k_\sigma(p)}} I_\alpha, \quad J_\sigma^\tau \cdot J_\tau = \bigcup_{\alpha \in P_\sigma^\tau \cap U_{k_\sigma(p)}} J_\alpha, \quad \tau \in U_p, \sigma = 1, -1.$$

Основу доказываемого здесь алгоритма составляет следующее утверждение: если  $x_{p-1}[J_{-1}^\tau \setminus J_\tau]$  - решение системы

$$A[I_{-1}^\tau \setminus I_\tau, J_{-1}^\tau \setminus J_\tau] \cdot x_{p-1}[J_{-1}^\tau \setminus J_\tau] = u_{n_{-1}(p)-1}[I_{-1}^\tau \setminus I_\tau], \quad (21)$$

то часть  $x_p[J_{-1}^\tau]$  вектора (I4) при  $t = p$  совпадает с частью  $g_p[J_{-1}^\tau]$  решения системы

$$A[I^\tau, J^\tau] \cdot g_p[J^\tau] = u_{n_{-1}(p)-1}[I^\tau] \quad (22)$$

при каждом  $\tau \in U_p, 1 \leq p \leq \ell+1$ .

Заметим, что в случае  $n_{-1}(p) < p$  совокупность условий (21) при всех  $\tau \in U_p$  эквивалентна равенствам

$$x_{p-1}[J^\alpha] = g_{k_{-1}(p)}[J^\alpha], \quad \alpha \in U_{k_{-1}(p)}, \quad (23)$$

так как  $I_{-1}^{\tau} \setminus I_{\tau} = J_{-1}^{\tau} \setminus J_{\tau} = \emptyset$ , если  $P_{-1}^{\tau} = \emptyset$ , а в противном случае матрица системы (21) распадается на независимые блоки  $A[I_{-1}^{\alpha}, J_{\tau}^{\alpha}]$ ,  $\alpha \in P_{-1}^{\tau} \cap U_{k_{-1}(\rho)}$ , при этом

$$n_{-1}(k_{-1}(\rho)) = n_{-1}(\rho).$$

Из определений (14), (15) при  $t = \rho - 1$  и из неравенства  $n_{-1}(\rho) \leq \rho$  следует, что  $x_{\rho-1}[J_{\tau}^{\tau}] = 0$  и

$$u_{\rho-1}[I_1^{\tau}] = u_{n_{-1}(\rho)-1}[I_1^{\tau}], \quad \tau \in U_{\rho}, \quad (24)$$

поскольку  $x_0[N] = 0$ , а множества

$$I_1^{\tau} \cap \left( \bigcup_{n_{-1}(\rho) \leq t < \rho} \bigcup_{\alpha \in U_t} (I_1^{\alpha} \setminus I_{\alpha}) \right), \quad J_{\tau} \cap \left( \bigcup_{1 \leq t < \rho} \bigcup_{\alpha \in U_t} J_1^{\alpha} \right)$$

пусты при каждом  $\tau \in U_{\rho}$ . Клетку  $A[I_{-1}^{\tau} \setminus I_{\tau}, J_{\tau}^{\tau}]$  в матрице  $A[I^{\tau}, J^{\tau}]$  можно исключить правосторонним преобразованием  $\tilde{R}[J^{\tau}, J^{\tau}]$ , которое отличается от единичной матрицы разве лишь блоком

$$\tilde{R}[J_{-1}^{\tau} \setminus J_{\tau}, J_{\tau}^{\tau}] = - (A[I_{-1}^{\tau} \setminus I_{\tau}, J_{-1}^{\tau} \setminus J_{\tau}])^{-1} \cdot A[I_{-1}^{\tau} \setminus I_{\tau}, J_{\tau}^{\tau}].$$

Тогда, как известно (например, [1, 3]),

$$\Delta[J_{-1}^{\tau}] = g_{\rho}[J_{-1}^{\tau}] - x_{\rho-1}[J_{-1}^{\tau}] = \tilde{R}[J_{-1}^{\tau}, J_{\tau}^{\tau}] \cdot g_{\rho}[J_{\tau}^{\tau}],$$

а вектор  $g_{\rho}[J_{-1}^{\tau}]$  с учетом (24) совпадает с решением системы

$$\{A[I_{-1}^{\tau}, J^{\tau}] \cdot \tilde{R}[J^{\tau}, J_{-1}^{\tau}]\} \cdot g_{\rho}[J_{-1}^{\tau}] = \mathcal{C}_{\rho}[I_{-1}^{\tau}].$$

С другой стороны, умножение матрицы  $A[I_{-1}^{\tau}, J_{-1}^{\tau}]$  справа на преобразование  $R_{\tau}(P_{-1}^{\tau})$  также исключает клетку  $A[I_{-1}^{\tau} \setminus I_{\tau}, J_{\tau}^{\tau}]$ , что равносильно соотношению

$$\tilde{R}[J_{-1}^{\tau} \setminus J_{\tau}, J_{\tau}^{\tau}] = E[J_{-1}^{\tau} \setminus J_{\tau}, J_{-1}^{\tau}] \cdot R_{\tau}(P_{-1}^{\tau}) \cdot E[J_{-1}^{\tau}, J_{\tau}^{\tau}]. \quad (25)$$

Последнее равенство позволяет легко доказать, что  $g_{\rho}[J_{\tau}^{\tau}]$  совпадает с частью  $\tilde{g}_{\rho}[J_{\tau}^{\tau}]$  решения системы

$$\{A[I_{-1}^{\tau}, J^{\tau}] \cdot \tilde{R}_{\tau}[J^{\tau}, J_{-1}^{\tau}]\} \cdot \tilde{g}_{\rho}[J_{-1}^{\tau}] = \mathcal{C}_{\rho}[I_{-1}^{\tau}], \quad (26)$$

где матрица  $\tilde{R}_{\tau}[J^{\tau}, J_{-1}^{\tau}]$  отличается от единичной разве лишь блоком  $\tilde{R}_{\tau}[J_{-1}^{\tau}, J_{-1}^{\tau}] = R_{\tau}(P_{-1}^{\tau})$ . Отсюда и из (25) следует выражение

$$\Delta[J_{-1}^{\tau}] = R_{\tau}(P_{-1}^{\tau}) \cdot E[J_{-1}^{\tau}, J_{\tau}] \cdot \tilde{g}_{\rho}[J_{\tau}].$$

Вектор  $\tilde{g}_{\rho}[J_{\tau}]$  совпадает с решением системы (12) при  $t = \rho$ , так как умножение системы (26) слева на преобразование  $T_{\tau}(\rho^{\tau})$  во всяком случае исключает в ее матрице клетку  $A[I_{\tau}, J_{-1}^{\tau}, J_{\tau}]$ .

Подставляя  $x_{\rho}[J_{-1}^{\tau}] = g_{\rho}[J_{-1}^{\tau}]$  в (22) и учитывая (24), для определения остальной части вектора  $g_{\rho}[J^{\tau}]$  в случае  $\rho^{\tau} \neq \emptyset$  получим системы

$A[I^{\alpha}, J^{\alpha}] \cdot g_{\rho}[J^{\alpha}] = u_{\rho}[I^{\alpha}]$ ,  $\alpha \in \rho_1^{\tau} \cap U_{k_1(\rho)}$ , аналогичные исходной, поскольку  $n_{-1}(k_1(\rho)) = \rho + 1$  и, следовательно,

$$g_{\rho}[J^{\alpha}] = g_{k_1(\rho)}[J^{\alpha}], \quad \alpha \in U_{k_1(\rho)}. \quad (27)$$

Таким образом, условия (21) при всех  $\tau \in U_{\rho}$  (или условия (23) в случае  $n_{-1}(\rho) < \rho$ ) достаточны для согласованности  $\rho$ -го шага алгоритма (12)–(15) с частью  $g_{\rho}[J_{-1}^{\tau}]$  ( $\tau \in U_{\rho}$ ) решения системы (22). Если  $n_{-1}(\rho) = \rho$  (рис. 2;  $t = 1, 3, 5, 7$ ), в частности, если  $\rho = 1$ , то равенства (21) очевидны, так как  $I_{-1}^{\tau} \cdot I_{\tau} = J_{-1}^{\tau} \cdot J_{\tau} = \emptyset$  ( $\tau \in U_{\rho}$ ). Считая условия согласованности выполненными при любом  $\rho < t$  ( $1 < t \leq \ell + 1$ ), достаточно рассмотреть случай неравенства  $n_{-1}(t) < t$  (рис. 2;  $t = 2, 4, 6, 8$ ), из которого следует  $k_{-1}(t) \leq t - 1$ . Положим  $\rho_1 = k_{-1}(t)$  и определим возрастающую последовательность  $\rho_i = k_1(\rho_{i-1})$ ,  $i \geq 2$ , при условии  $\rho_{i-1} < t - 1$ , откуда следуют неравенства  $\rho_i < t$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ ,  $i_t \leq t - \rho_1$ , а также представления

$$J^{\alpha} = J_{-1}^{\alpha} \cup \left( \bigcup_{2 \leq i \leq i_t} \left( k \in \bigcup_{\rho_1^{\alpha} \cap U_{\rho_i}} J_{-1}^k \right) \right), \quad \alpha \in U_{\rho_1}.$$

Кроме того, поскольку  $J_{-1}^{\alpha} \cap J_{-1}^{\alpha'} = \emptyset$ ,  $\alpha \in U_{\rho}$ ,  $\rho_i < \rho < t$ , то

$$x_{\rho_i}[J_{-1}^k] = x_{t-1}[J_{-1}^k], \quad k \in U_{\rho_i}, \quad 1 \leq i \leq i_t.$$

Используя индуктивное предположение относительно  $\rho_i < t$  и доказанное утверждение вместе с соотношениями (27) при каждом  $\rho = \rho_i$ , теперь можно заключить, что равенства (23)

верны при  $\rho = t$ . Отсюда при  $\rho = t = \ell + 1$  следуют равенства  $x[N] = x_{\ell+1}[N] = x_{\ell}[N]$ , поскольку системы (11), (22) и (21) совпадают.

В заключение отметим, что алгоритмы для приведения матрицы  $A[M, N]$  к блочно-треугольному виду и для решения систем (11), (16), выведенные ранее [2,3], лишь числом просмотров семейства  $U_t$  ( $1 \leq t \leq \ell$ ) и порядком перестановочных преобразований отличаются от доказанных здесь формул. Однако последние представляются существенно более эффективными для вычислительной реализации, что, очевидно, является следствием введенного в п.1 упорядочения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании. - Докл. АН СССР, 1977, т.205, № 5, с.993-996.
2. ЗВЯГИНА Р.А. Приведение к блочно-треугольному виду матрицы с симметрично разветвленной блочностью. - Оптимизация, 1981, вып.26(43), с.34-44.
3. ЗВЯГИНА Р.А. Системы линейных уравнений с иерархической симметричной блочностью матриц. - Оптимизация, 1978, вып. 22(39), с.69-82.

Поступила в ред.-изд. отдел  
20.04.1983 г.