Выпуск 34(51) ОПТИМИЗАЦИЯ 1984 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 514.172

О ПРОЕКТИВНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Г.Ш.Рубинштейн

Статья посвящена характеризации проективных изоморфизмов более чем одномерных выпуклых множеств, принадлежащих, вообще говоря, различным аффинным пространствам конечной или бесконечной размерности. Элементарными методами устанавливается совпадение указанных классов изоморфизмов с формально более широкими классами осевых изоморфизмов.

§1. Используемые сведения из аффинной геометрии

Напомним (см.[1]), что отображение $\alpha: E\times E\times R \to E$ называют аффинной структурой на E, а $E=(E,\alpha)$ - аффинным пространством (короче, АП $E=(E,\alpha)$ или АП E), если при некоторой вещественной линейной структуре $\lambda=(0,+,\cdot)$ на E для всех $(x,y,t)\in E\times E\times R$ имеют место равенства

$$\alpha(x,y,t)=(1-t)\cdot x+t\cdot y.$$

При этом аффинно-эквивалентные линейные структуры $\lambda=(0,+,\cdot)$ и $\lambda'=(0',\oplus,\odot)$, порождающие одну и ту же аффинную структуру α, характеризуются тем, что

$$t\odot x=(1-t)\cdot 0'+t\cdot x,\ x\oplus y=2\odot\left(\tfrac{1}{2}\cdot x+\tfrac{1}{2}\cdot y\right).$$

Это означает, в частности, что, какова бы ни была аффинная структура α на E, в соответствующем классе аффинно-эквивалентных линейных структур каждому $\bar{x}\in E$ отвечает одна и только одна линейная структура $\lambda=(\alpha,\bar{x})$, в которой $\bar{x}$ является нулевым элементом. Получаемые таким образом вещественные линейные пространства $E=(E,\alpha,\bar{x})$ (короче, ВЛП $E=(E,\alpha,\bar{x})$), очевидно, являются изоморфными и, следовательно,

имеют одну и ту же размерность, т.е. их линейные базы Хамеля имеют одну и ту же мощность.

Каковы бы ни были АП $E=(E,\alpha)$ и $E'=(E',\alpha')$, отображение $\varphi: E \to E'$ называют аффинным, если

$$\varphi\alpha(x,y,t)=\alpha'(\varphi x, \varphi y, t)$$

для всех $(x,y,t)\in E\times E\times \mathbb{R}$. При этом инъективные, сюръективные и биективные аффинные отображения называют соответственно аффинными мономорфизмами, аффинными эпиморфизмами и аффинными изоморфизмами. В случае произвольных множеств $M\subset E$ и $M'\subset E'$ биективное отображение $\psi: M \to M'$ называют аффинным изоморфизмом, а сами множества аффинно-изоморфными, если ψ является сужением некоторого аффинного мономорфизма $\tilde{\psi}: E \to E'$.

Далее, если АП $E=(E',\alpha')$ совпадает с АП $\mathbb{R}=(\mathbb{R},\alpha_0)$, где α_0 - естественная линейная структура на $\mathbb{R}$, то аффинные эпиморфизмы $f: E \to \mathbb{R}$ называют нетривиальными аффинными функционалами. Если же $(E,\alpha)=(E',\alpha')$, то биективные аффинные изоморфизмы называют аффинными автоморфизмами. Среди последних особо выделим определяемые парами $(x_0,t_0)\in E\times\mathbb{R}$ так называемые параллельные переносы

$$\varphi: x\in E \mapsto \alpha(x_0,x,t_0)\in E.$$

При этом множества M и N в АП $E=(E,\alpha)$ называют параллельными, если $\varphi(M)=N$ при некотором параллельном переносе φ.

Элементы АП $E=(E,\alpha)$ в аффинной геометрии называют точками, а отвечающие точкам $x\neq y$ множества

$$\Pi(x,y)=\alpha(x,y,\mathbb{R}),\ O(x,y)=\alpha(x,y,(0,1)),$$

$$\Lambda(x,y)=\alpha(x,y,(0,+\infty))$$

называют соответственно прямыми, открытыми отрезками и лучами.

С помощью указанных простейших геометрических объектов в АП $E=(E,\alpha)$ выделяют следующие классы множеств:

(i) множество $L\subset E$ называют аффинным, если

$$x\in L,\ y\in L,\ x\neq y \Longrightarrow \Pi(x,y)\subset L,$$

т.е. $\alpha(L,L,\mathbb{R})=L$;

(ii) множество $M\subset E$ называют выпуклым, если

$$x\in M,\ y\in M,\ x\neq y \Longrightarrow O(x,y)\subset M,$$

т.е. $\alpha(M,M,(0,1))=M$;

(iii) выпуклое множество $K\subset E$ называют x_0-конусом (или x_0-коническим), если

$$x\in K,\ x\neq x_0 \Longrightarrow \Lambda(x_0,x)\subset K,$$

т.е. $\alpha(x_0, K, (0,+\infty))=K$.

Аффинные множества $L\subset E$, очевидно, характеризуются тем, что индуцируемые исходной аффинной структурой α отображения $\alpha_L: L\times L\times R\to L$ являются аффинными структурами на L. Получаемые таким образом АП $L=(L,\alpha_L)$ называют подпространствами исходного АП $E=(E,\alpha)$.

Далее, минимальные аффинные, выпуклые и x_0-конические множества, содержащие заданные множества $A\subset E$, обозначают соответственно через $\operatorname{aff} A, \operatorname{conv} A, x_0\text{-}\operatorname{con} A$ и называют аффинными, выпуклыми и x_0-коническими оболочками соответствующих множеств. При этом непустое множество $A\subset E$, очевидно, в том и только в том случае не имеет собственных подмножеств A', для которых $\operatorname{aff} A'=\operatorname{aff} A$, если при некотором (а тогда и любом) $\bar{x}\in A$ множество $A\setminus\{\bar{x}\}$ является линейно-независимым в ВЛП $E=(E,\alpha,\bar{x})$. Выделяемые таким образом множества $A\subset E$ называют аффинно-независимыми. При этом аффинно-независимое подмножество A аффинного множества L называют его аффинной базой, если $\operatorname{aff} A=L$, т.е. при некотором (а тогда и любом) $\bar{x}\in A$ множество $A\setminus\{\bar{x}\}$ является базой Хамеля линейного множества L в ВЛП $E=\{E,\alpha,\bar{x}\}$.

Отмечанная связь аффинных баз с базами Хамеля означает, что все аффинные базы аффинного множества имеют одну и ту же мощность, которая в случае конечности на единицу больше размерности соответствующего линейного множества. Поэтому во избежание недоразумений под размерностью каждого непустого аффинного множества понимают не мощность его аффинной базы, а мощность аффинной базы, из которой исключен один элемент. При этом размерности всех аффинных множеств, в частности одноточечных множеств и прямых, совпадают с размерностями соответствующих линейных множеств.

Далее, под размерностью произвольного непустого множества в аффинном пространстве понимают размерность его аффинной оболочки. Что касается дефектных размерностей аффинных множеств, то в качестве таковых, как и в линейном случае, принимают мощности дополнений соответствующих аффинных баз до аффинных

баз всего пространства.

Наряду с одномерными аффинными множествами важную роль играют множества, имеющие единичную дефектную размерность. Их называют гиперплоскостями. Нетрудно проверить, что аффинное множество H в АП E в том и только в том случае является гиперплоскостью, если множество $E \setminus H$ однозначно представимо в виде объединения двух непустых выпуклых множеств G и G', не имеющих общих точек. При этом отвечающие точкам $x \in G$ и $y \in G'$ отрезки $O(x, y)$ пересекаются с H.

Заметим, теперь, что при рассмотренных выше аффинных эпиморфизмах $\varphi: E \twoheadrightarrow E'$ полные прообразы $\varphi^{-1}(x') \subset E$ точек $x' \in E'$ являются параллельными аффинными множествами, дефектная размерность которых совпадает с размерностью АП E'. А это означает, что при любом нетривиальном аффинном функционале f в АП E множество $f^{-1}(1)$ является гиперплоскостью. В свою очередь, каковы бы ни были параллельные гиперплоскости $H \neq H'$ в АП E, найдется (притом единственный) аффинный функционал f, при котором прообраз единицы совпадает с H, а прообраз нуля совпадает с H'.

В заключение этого вводного параграфа приведем одно из возможных определений интересующих нас проективных отображений выпуклых множеств, а также два замечания относительно аффинных изоморфизмов, которые будут полезными при доказательстве основного результата этой статьи.

Используемое определение проективных изоморфизмов выпуклых множеств базируется на рассмотрении x_0-конусов, не содержащих соответствующих точек x_0. Для каждого из них через K^* обозначим множество нетривиальных аффинных функционалов f, удовлетворяющих условию

$$f(x_0) = 0, \; f(K) \subset (0, +\infty).$$

Функционалам $f \in K^*$ сопоставляются порождаемые ими гиперплоскости $H_f = f^{-1}(1)$ и выпуклые множества $K_f = K \cap H_f$. Последние будем называть сечениями соответствующих x_0-конусов K.

Каковы бы ни были x_0-конус и функционалы f_1 и f_2 из K^*, биективное отображение

$$\varphi : x \in K_{f_1} \longmapsto x' = (f_2(x))^{-1} \cdot x \in K_{f_2} \qquad (1)$$

назовем коническим изоморфизмом.

Далее, каковы бы ни были выпуклые множества M_i в аффинных

пространствах $E_i=(E_i,\alpha_i)$, $i=1,2$, биективное отображение $\varphi: M_1 \to M_2$ назовем проективным изоморфизмом, если биекция φ представима в виде суперпозиции $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$, где φ_1 и φ_3 – некоторые аффинные изоморфизмы, а биекция φ_2 является коническим изоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Конический изоморфизм (I) в том и только в том случае является аффинным, если соответствующие сечения параллельны и, следовательно, $f_2 = cf_1$, где $c>0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если биективное отображение выпуклых множеств M и M' в аффинных пространствах $E=(E,\alpha)$ и $E'=(E',\alpha')$ удовлетворяет условию

$$x\in M, y\in M, x\neq y \Rightarrow \varphi O(x,y)=O(\varphi x, \varphi y), \quad (2)$$

то следующие утверждения равносильны:

(i) указанная биекция является аффинным изоморфизмом;

(ii) образами параллельных открытых отрезков при указанной биекции являются параллельные открытые отрезки;

(iii) для некоторого $A\subset M$ такого, что $\mathrm{aff}\, A = \mathrm{aff}\, M$, при некотором $x_0\in A$ для всех $x\in A\setminus\{x_0\}$ имеют место равенства

$$\varphi\alpha(x_0, x, \tfrac{1}{2}) = \alpha'(\varphi x_0, \varphi x, \tfrac{1}{2}).$$

§2. Осевые структуры и осевые изоморфизмы выпуклых множеств

Рассматриваемые здесь АП $E=(E,\alpha)$ предполагаются более чем одномерными и через $\mathfrak{M}(E,\alpha)$ обозначаются соответствующие семейства выпуклых множеств, аффинные оболочки которых совпадают с E. Далее, отвечающие $M\in\mathfrak{M}(E,\alpha)$ множества $M\times M\setminus\{(x,x)\}_{x\in M}$ обозначаются через $M\otimes M$, а естественным образом упорядоченное множество $\mathbb{R}$ обозначается через $\vec{\mathbb{R}}$.

Каково бы ни было $M\in\mathfrak{M}(E,\alpha)$, парам $(x,y)\in M\otimes M$ сопоставим следующие линейно-упорядоченные множества:

$$\vec{\mathbb{R}}(M,x,y)=\{t\in\vec{\mathbb{R}} \mid \alpha(x,y,t)\in M\},$$

$$\vec{\Pi}(M,x,y)=\{\alpha(x,y,t) \mid t\in\vec{\mathbb{R}}(M,x,y)\}.$$

Последние назовем осями и под осевой структурой каждого $M \in$ $\in \mathfrak{M}(E,\alpha)$ будем понимать семейство $\mathcal{A}(M)$ всех его осей.

Биективное отображение

$$\varphi: M \in \mathfrak{M}(E,\alpha) \to M' \in \mathfrak{M}(E',\alpha')$$

назовем осевым изоморфизмом, если оно удовлетворяет условию (2), т.е. для всех пар $(x,y) \in M \otimes M$ имеют место равенства

$$\varphi \vec{\Pi}(M,x,y) = \vec{\Pi}(M', \varphi x, \varphi y).$$

При этом будем говорить, что рассматриваемые выпуклые множества имеют изоморфные осевые структуры.

Отвечающие выпуклым множествам $M \in \mathfrak{M}(E,\alpha)$ и $M' \in \mathfrak{M}(E',\alpha')$ семейства аффинных, проективных и осевых изоморфизмов будем обозначать соответственно через $AFF(M,M')$, $PR(M,M')$ и $AX(M,M')$. Для указанных классов, очевидно, справедливы следующие включения:

$$AFF(M,M') \subset PR(M,M') \subset AX(M,M').$$

ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каковы бы ни были выпуклые множества $M \in \mathfrak{M}(E,\alpha)$ и $M' \in \mathfrak{M}(E',\alpha')$, соответствующие семейства осевых и проективных изоморфизмов совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая приведенное очевидное включение, а также определение проективных изоморфизмов, достаточно показать, что каждый осевой изоморфизм $\varphi: M \to M'$ представим в виде суперпозиции $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$, где φ_1 и φ_3 – некоторые аффинные изоморфизмы, а φ_2 – конический изоморфизм.

Для построения требуемых изоморфизмов определим на множестве $\hat{E} = E \times R$ аффинную структуру $\hat{\alpha}$, которая следующим образом связана с заданной аффинной структурой α на E и естественной аффинной структурой α_0 на R:

$$\hat{\alpha}((x,r),(y,s),t) = (\alpha(x,y,t), \alpha_0(r,s,t)).$$

В получаемом таким образом АП $\hat{E} = (\hat{E}, \hat{\alpha})$ рассмотрим выпуклое множество $M_1 = \{(x,1) \mid x \in M\}$ и в качестве φ_1 примем аффинный изоморфизм

$$\varphi_1 : x \in M \mapsto (x,1) \in M.$$

Для построения двух других изоморфизмов зафиксируем некоторую точку $x_0 \in E$ и отвечающую ей точку $\hat{x}_0 = (x_0, 0) \in \hat{E}$. Да-

лее, в АП $\tilde{E}$ рассмотрим $\tilde{x}_0$-конус $K=\tilde{x}_0\text{-}\mathrm{cone}\, M_1$, в котором сечение K_{f_1}, отвечающее аффинному функционалу

$$f_1:(x,r)\in\tilde{E}\longmapsto r\in R$$

из K^*, совпадает с M_1. А это означает, что при любом $f_2\in$ $\in K^*$ конический изоморфизм

$$\varphi_2: x_1\in M_1 \longrightarrow (f_2(x_1))^{-1}x_1\in M_2=K_{f_2} \qquad (3)$$

вместе с исходным осевым изоморфизмом $\varphi: M\rightarrow M'$ и фиксированным аффинным изоморфизмом $\varphi_1: M\rightarrow M_1$ порождают следующий осевой изоморфизм:

$$\varphi_3: x_2\in M_2\longmapsto x'=\varphi\circ\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2^{-1}x_2\in M'. \qquad (4)$$

Если последний является аффинным, то порождаемые рассматриваемым функционалом $f_2\in K^*$ изоморфизмы (3) и (4), очевидно, могут быть приняты в качестве искомых.

Построение требуемого функционала $f_2\in K^*$ опирается на приведенные выше замечания I и 2, а также на следующий элементарно проверяемый факт.

Каковы бы ни были точки $y_1\neq z_1$ и $u_1\in O(y_1,z_1)$ выпуклого множества $M_1\subset\tilde{E}$, на луче $\Lambda(\tilde{x}_0,z_1)$ найдется, и притом единственная, такая точка z_2, при которой луч $\Lambda(\tilde{x}_0,u_1)$ содержит точку $\tilde{\alpha}(y_1,z_2,\frac{1}{2})$, т.е. середину отрезка $O(y_1,z_2)$.

Выделим теперь в заданном множестве $M'\subset E'$ некоторое подмножество A', которое является аффинной базой АП E'. Это возможно, так как $\mathrm{aff}\, M'=E'$. Фиксируя затем некоторую точку $y'\in A'$, рассмотрим следующие точки множества M':

$$u'=\alpha'(y',z',\tfrac{1}{2}),\ z'\in A_0'=A'\setminus\{y'\}.$$

Далее, рассмотрим осевой изоморфизм

$$\varphi_4: x'\in M'\longmapsto x_1=\varphi_1\circ\varphi^{-1}x\in M_1,$$

с помощью которого в гиперплоскости $H_{f_1}\subset\tilde{E}$ определяются аффинная база $A_1=\varphi_4 A'\subset M_1$ и ее подмножество

$$A_1^0=\{z_1=\varphi_4 z'\,|\,z'\in A_0'\},$$

а также выделенная точка $y_1=\varphi_4 y'$ и точки

$$u_1=\varphi_4 u'\in O(y_1,z_1),\ z_1\in A_1^0.$$

С помощью последних, учитывая приведенный выше факт, на лучах $\Lambda(x_0,z_1)$ однозначно определяются такие точки z_2, что

$$\tilde{x}(y_1, z_2, \tfrac{1}{2}) \in \Lambda(\tilde{x}_0, u_1).$$

Множество A_2^0 получаемых таким образом точек z_2, дополненное точками y_1 и $\tilde{x}_0$, является, очевидно, аффинной базой АП $\tilde{E}$. Используя уже упоминавшиеся замечания I и 2, нетрудно проверить, что в качестве искомого может быть принят аффинный функционал f_2, который на элементах аффинной базы принимает следующие значения:

$$f_2(\tilde{x}_0) = 0,\ f_2(y_1) = 1,\ f_2(z_2) = 1,\ z_2 \in A_2^0.$$

Это завершает доказательство приведенного утверждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Геометрия выпуклых множеств в аффинных и проективных пространствах. - Оптимизация, 1983, вып. 3I(48), с.5-32.

Поступила в ред.-изд. отдел
I4.06.I984 г.