Выпуск 34(5I) ОПТИМИЗАЦИЯ 1984 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 5I9.853

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА – РУБИНШТЕЙНА

Ю.Н.Владимиров

§I. Необходимые сведения о задаче перемещения массы

В этом вводном параграфе приводятся необходимые сведения об изученном академиком Л.В.Канторовичем бесконечномерном аналоге транспортной задачи линейного программирования (см. [I], а также [2–4; 5, гл.8, §4]).

Рассмотрим произвольный метрический компакт Q с метрикой $r(x,y)$ и систему $\mathcal{B}$ его борелевских множеств. Зафиксируем некоторое число $\alpha>0$ и через Φ обозначим семейство определенных на $\mathcal{B}$ неотрицательных счетно-аддитивных функций φ, для которых $\varphi(Q)=\alpha$. Функции $\varphi\in\Phi$ назовем распределениями массы на Q. Для каждой из них отвечающая $e\in\mathcal{B}$ величина $\varphi(e)$ интерпретируется как количество массы, сосредоточенное на множестве e. Введем в рассмотрение также семейство Ψ определенных на $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ неотрицательных счетно-аддитивных по каждому аргументу функций Ψ. Функции $\psi\in\Psi$ назовем перемещениями массы на Q. Для каждой из них отвечающая паре $(e,e')\in\mathcal{B}^2$ величина $\psi(e,e')$ интерпретируется как количество массы, перемещаемое с e на e'.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА. Пусть имеющееся распределение массы на Q характеризуется функцией $\varphi_1\in\Phi$, а требуемое распределение – функцией $\varphi_2\in\Phi$. Требуется в множестве

$$\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}=\{\psi\in\Psi \mid \psi(e,Q)=\varphi_1(e),\psi(Q,e)=\varphi_2(e),\ e\in\mathcal{B}\} \tag{I}$$

так называемых допустимых перемещений найти оптимальное пере-

мещение, для которого достигает минимума величина

$$\tau(\Psi)=\iint\limits_{Q\,Q} r(x,y)\Psi(de,de'), \tag{2}$$

характеризующая работу, связанную с осуществлением перемещения.

Важно отметить, что в поставленной задаче множество $\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}$ всегда не пусто. В него входит, например, функция

$$\Psi(e,e')=\frac{\varphi_1(e)\,\varphi_2(e)}{\varphi_1(Q)}\ ,\quad (e,e')\in\mathcal{B}^2.$$

Поставленная задача всегда разрешима. Допустимое перемещение $\Psi\in\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}$ в том и только в том случае является оптимальным, если найдется функция $u: Q\rightarrow R$ (называемая потенциалом или потенциальной функцией перемещения Ψ), удовлетворяющая следующему условию: при любых x и y из Q выполняется неравенство

$$u(y)-u(x)\le r(x,y),$$

причем

$$u(y)-u(x)=r(x,y),$$

если пара (x,y) принадлежит носителю перемещения Ψ , т.е. если для любых окрестностей e_x и e_y точек x и y имеют место строгие неравенства $\Psi(e_x,e_y)>0$.

Неотрицательная функция

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\min\{\tau(\Psi)\mid\Psi\in\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}\},\quad(\varphi_1,\varphi_2)\in\Phi^2,$$

является метрикой на множестве распределений Φ . Эту метрику принято называть метрикой Канторовича - Рубинштейна (см., например,[5]).

Рассматриваемая ниже задача формально не является частным случаем приведенной выше основной задачи, так как конечномерное евклидово пространство не компактно. Однако приведенные результаты переносятся и на этот случай [6].

Рассмотрим пространство $Q=R^n$ с евклидовой метрикой $r(x,y)$ и систему $\mathcal{B}$ его борелевских множеств. Для фиксированного $\alpha>0$ обозначим через Φ семейство определенных на $\mathcal{B}$ неотрицательных счетно-аддитивных функций φ , для которых $\varphi(R^n)=\alpha$ и

$$\int\limits_{R^n}\|x\|\,\varphi(de)<+\infty, \tag{3}$$

где $\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Семейство определенных на $\mathcal{B}^2$ неотрицательных счетно-аддитивных по каждому аргументу функций (перемещений) ψ обозначим через Ψ.

ЗАДАЧА I. Для заданных распределений φ_1 и φ_2 из Φ требуется в множестве допустимых перемещений (I) найти оптимальное перемещение, для которого достигает минимума величина (2).

Важно отметить, что в задаче I для любого допустимого перемещения $\psi \in \Psi_{\varphi_1,\varphi_2}$ в силу (3) величина $\tau(\psi)$ конечна:

$$\tau(\psi)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} r(x,y)\psi(de,de')\le\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\|x\|+\|y\|)\psi(de,de')=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|\psi(de,de')+\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|\psi(de,de')=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|\psi(de,\mathbb{R}^n)+\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|\psi(\mathbb{R}^n,de')=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|\varphi_1(de)+\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|\varphi_2(de')<+\infty.$$

§2. Приближения нормального распределения

Рассмотрим следующую задачу наилучшего приближения.

ЗАДАЧА 2. Пусть в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано исходное распределение единичной массы с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\,e^{-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где σ – положительное вещественное число. Требуется в множестве распределений единичной массы с плотностями

$$p_{a,b}(x)=\begin{cases}\dfrac{(n+1)(a-b)}{c_n(a^{n+1}-b^{n+1})}, & \text{если } \|x\|\le b,\\[2ex] \dfrac{n+1}{c_n(a^{n+1}-b^{n+1})}(a-\|x\|), & \text{если } b<\|x\|\le a,\\[2ex] 0, & \text{если } \|x\|>a,\end{cases} \tag{5}$$

найти ближайшее в метрике Канторовича – Рубинштейна.

Здесь через c_n обозначен объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{n/2}}{n(n-2)\dots 2}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \dfrac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\dots 1}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $0<b<a<+\infty$. График функции (5) при $\|x\| \le a$ представляет из себя усеченный круговой конус. Однопараметрические задачи наилучшего приближения равномерными распределениями (случай, когда $a=b$) и "коническими" распределениями (случай, когда $b=0$) изучены в диссертационной работе автора [7].

Распределения масс, отвечающие плотностям (4) и (5), обозначим через φ и $\varphi_{a,b}$ и пусть $\nu(a,b)=\rho(\varphi,\varphi_{a,b})$.

Введем в рассмотрение вспомогательные функции переменной t:

$$\Phi(t)=\varphi(B_t)=\frac{nC_n}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\int_0^t e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}}\theta^{n-1}d\theta,\ t\in[0,+\infty],$$

$$F(a,b,t)=\varphi_{a,b}(B_t)=\begin{cases} \dfrac{(a-b)(n+1)}{a^{n+1}-b^{n+1}}\,t^n, & \text{если } 0\le t\le b, \\ \dfrac{(n+1)at^n-nt^{n+1}-b^{n+1}}{a^{n+1}-b^{n+1}}, & \text{если } b<t\le a, \\ 1, & \text{если } t>a, \end{cases}$$

где B_t - замкнутый шар в R^n с центром в нуле радиуса t.

Сразу заметим, что введенные функции являются непрерывными на промежутке $[0,+\infty]$. Функция $\Phi(t)$, кроме того, является строго возрастающей и удовлетворяет условиям

$$\Phi(0)=0;\ \lim_{t\to+\infty}\Phi(t)=1.$$

Функция $F(a,b,t)$ строго возрастает на отрезке $[0,a]$ и удовлетворяет условиям

$$F(a,b,0)=0;\ F(a,b,t)=1,\ t\geq a.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon\in(0,1)$ и свяжем параметры a и b условием

$$F(a,b,b)=\frac{(a-b)(n+1)}{a^{n+1}-b^{n+1}}\,b^{n}=\varepsilon. \qquad (6)$$

Положим $c=\frac{a}{b}$, тогда (6) равносильно равенству

$$c^{n}+c^{n-1}+\ldots+1=\frac{n+1}{\varepsilon}.$$

Последнее уравнение имеет единственный положительный корень. Следовательно, при выполнении условия (6) отношение $\frac{a}{b}$ является постоянным.

Для фиксированного $\varepsilon\in(0,1)$ и параметров a и b, удовлетворяющих условию (6), введем обозначения

$$c_\varepsilon=\frac{a}{b};\ \nu_\varepsilon(b)=\nu(c_\varepsilon b,b);\ F_\varepsilon(b,t)=F(c_\varepsilon b,b,t),\ t\in[0,+\infty].$$

ТЕОРЕМА. Для функции ν справедливо равенство

$$\nu(a,b)=\int_0^{+\infty}|\Phi(t)-F(a,b,t)|\,dt,\quad 0<b<a<+\infty.$$

Каждая из функций $\nu_\varepsilon(b)$ является выпуклой и обладает единственной точкой минимума $b^*=b^*(\varepsilon)\in(0,+\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем параметры $b<a$ из промежутка $(0,+\infty)$ и найдем значение $\nu(a,b)$. Прежде всего заметим, что в промежутке $[0,a]$ может существовать не более четырех точек t_j таких, что $t_0=0;\ t_j<t_{j+1}$; в каждом интервале (t_j,t_{j+1}) разность

$$\Delta(a,b,t)=\Phi(t)-F(a,b,t) \qquad (7)$$

не меняет знака; при переходе через t_{j+1} знак разности (7) меняется на противоположный.

Рассмотрим, например, случай, когда указанных точек две: $t_0=0<t_1<a$. Тогда в интервале (t_0,t_1) функция (7) положительна, а в интервале $(t_1,+\infty)$ отрицательна. Из геометрических соображений ясно, что в промежутке $(0,+\infty)$ су-

ществует не более трех точек θ_i таких, что при $\|x\|=\theta_i$ разность

$$p(x)-p_{a,b}(x) \tag{8}$$

обращается в нуль. Предположим для определенности, что таких точек две: $t_0<\theta_1<t_1<\theta_2<a$. Тогда разность (8) положительна, если $0<\|x\|<\theta_1$ или $\|x\|>\theta_2$, и отрицательна, если $\theta_1<\|x\|<\theta_2$.

Выберем произвольно в R^n замкнутый луч ℓ, выходящий из нуля. Каждому $x\in\ell$, для которого $0\le\|x\|=t<\theta_1$, поставим в соответствие такой $y\in\ell$, что $\theta_1\le\|y\|=t'<t_1$ и

$$\Delta(a,b,t)=[F(a,b,t')-F(a,b,\theta_1)]-[\Phi(t')-\Phi(\theta_1)]. \tag{9}$$

Для указанных t и t' значение $\Psi(B_t, B_{t'}\setminus B_{\theta_1})$ положим равным (9). Каждому $x\in\ell$, для которого $\theta_2\le\|x\|=t<+\infty$, поставим в соответствие такой $y\in\ell$, что $t_1\le\|y\|=t'<\theta_2$ и

$$[\Phi(t)-\Phi(\theta_2)]-[F(a,b,t)-F(a,b,\theta_2)]=-\Delta(a,b,t'). \tag{10}$$

Для указанных t и t' значение $\Psi(B_t\setminus B_{\theta_2}, B_{t'}\setminus B_{t_1})$ положим равным (10).

В рассматриваемом случае построенная функция Ψ, очевидно, и определяет оптимальное перемещение. Потенциалом этого перемещения может служить, например, функция

$$u(x)=\begin{cases}\|x\| & \text{, если } \|x\|<t_1,\\ 2t_1-\|x\| & \text{, если } \|x\|\ge t_1.\end{cases} \tag{11}$$

Отсюда

$$\nu(a,b)=\tau(\Psi)=\int_0^{t_1}\Delta(a,b,t)dt-\int_{t_1}^{+\infty}\Delta(a,b,t)dt=\int_0^{+\infty}|\Delta(a,b,t)|dt.$$

Заметим, что потенциальная функция (11) принадлежит классу, изученному в работах автора [8,9].

В случаях, когда множество $\{t_i\}$ состоит из одной, трех или четырех точек, рассуждения аналогичны приведенным выше. Соответствующие потенциальные функции также принадлежат классу $U_{\infty}(R^n)$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Для каждого $b\in(0,+\infty)$

обозначим через $\gamma(b)$ график сужения функции $\eta = F_\varepsilon(b,t)$ на отрезок $[0,a]$, где $a = c_\varepsilon b$, а через γ – график функции $\eta = \Phi(t)$. Зафиксируем параметры $b_0 < b_1$ из промежутка $(0,+\infty)$. Тогда, как легко видеть, справедливы соотношения

$$F_\varepsilon(b_0,0) = F_\varepsilon(b_1,0) = 0;$$
$$F_\varepsilon(b_0,t) > F_\varepsilon(b_1,t),\ t\in(0,a_1);$$
$$F_\varepsilon(b_0,t) = 1,\ t\in[a_0,+\infty);\ F_\varepsilon(b_1,t) = 1,\ t\in[a_1,+\infty].$$

Пусть $\Omega(b_0,b_1)$ – множество всех параллельных оси абцисс отрезков с концами, лежащими на $\gamma(b_0)$ и $\gamma(b_1)$.

ЛЕММА. При любом $\lambda\in(0,1)$ кривая $\gamma(b_\lambda)$, где $b_\lambda = b_0 + \lambda(b_1 - b_0)$, делит в отношении $\lambda:(1-\lambda)$ любой отрезок из $\Omega(b_0,b_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно $\theta\in(0,\varepsilon]$ и через δ_i обозначим корень уравнения $F_\varepsilon(b_i,\delta_i) = \theta$, $i=0,1$. Тогда

$$\frac{(a_i - b_i)(n+1)}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}}\,\delta_i^n = \theta,$$

откуда

$$\frac{\delta_i}{b_i} = \left[\frac{\theta(c^{n+1}-1)}{(n+1)(c-1)}\right]^{1/n} = d,\ c = c_\varepsilon,\ i=0,1.$$

Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой $\gamma(b_i)$, осью ординат и прямой $\eta = \theta$:

$$S_i = \theta\delta_i - \int_0^{\delta_i} F_\varepsilon(b_i,t)\,dt = \theta\delta_i - \frac{a_i - b_i}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}}\,\delta_i^{n+1} =$$
$$= \left(\theta d - \frac{c-1}{c^{n+1}-1}\,d^{n+1}\right) b_i = c_\theta' b_i.$$

Следовательно, площадь фигуры, ограниченной кривыми $\gamma(b_0)$ и $\gamma(b_1)$ и прямой $\eta = \theta$, находится по формуле

$$S(b_0,b_1,\theta) = S_1 - S_0 = c_\theta'(b_1 - b_0),\ \theta\in(0,\varepsilon]. \qquad (12)$$

Пусть теперь $\theta\in(\varepsilon,1)$. Как и выше, через δ_i обозначим корень уравнения $F_\varepsilon(b_i,\delta_i) = \theta$, $i=0,1$. Тогда

$$\frac{(n+1)a_i\delta_i^n - n\delta_i^{n+1} - b_i^{n+1}}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}} = \theta,$$

откуда

$$\frac{(n+1)c\left(\frac{\delta_i}{b_i}\right)^n - n\left(\frac{\delta_i}{b_i}\right)^{n+1} - 1}{c^{n+1} - 1} = \theta, c = c_\varepsilon, i = 0,1. \quad (13)$$

Непрерывная функция

$$f(\xi) = \frac{(n+1)c\xi^n - n\xi^{n+1} - 1}{c^{n+1} - 1}$$

является стороrо возрастающей на замкнутом отрезке $[0,c]$, причем $f(0) = -(c^{n+1}-1)^{-1} < 0$, $f(c) = 1 > \theta$. Следовательно, существует единственное число $d \in (0,c)_\theta$, для которого $f(d) = \theta$. Но тогда из (13) вытекает, что $\frac{\delta_i}{b_i} = d, i = 0,1$. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой $\gamma(b_i)$, осью ординат и прямой $\eta = \theta$:

$$S_i = \theta\delta_i - \int_0^{\delta_i} F_\varepsilon(b_i,t)dt = \theta\delta_i - \frac{a_i - b_i}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}} b_i^{n+1} -$$

$$-\left[\frac{a_i}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}}\left(\delta_i^{n+1} - b_i^{n+1}\right) - \frac{n}{n+2}\frac{\delta_i^{n+2} - b_i^{n+2}}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}} - \frac{b_i^{n+1}}{a_i^{n+1} - b_i^{n+1}}(\delta_i - b_i)\right] =$$

$$= \left[\theta d - \frac{cd^{n+1} - d}{c^{n+1} - 1} + \frac{n}{n+2}\frac{d^{n+2} - 1}{c^{n+1} - 1}\right] b_i = c''_\theta b_i.$$

Следовательно, площадь фигуры, ограниченной кривыми $\gamma(b_0)$ и $\gamma(b_1)$ и прямой $\eta = \theta$, находится по формуле

$$S(b_0,b_1,\theta) = S_1 - S_0 = c''_\theta(b_1 - b_0), \quad \theta \in (\varepsilon, 1). \quad (14)$$

Из формул (12) и (14) вытекает, что при любых λ и θ из интервала (0,1) справедливы равенства

$$\frac{S(b_0, b_\lambda, \theta)}{S(b_\lambda, b_1, \theta)} = \frac{b_\lambda - b_0}{b_1 - b_\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

которые и доказывают лемму.

Для фиксированных $b_0 < b_1$ положим

$$\Gamma=\{(t,\eta)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,a_1],\ F_\varepsilon(b_1,t)\le\eta\le F_\varepsilon(b_0,t)\},$$

$$\Gamma_+=\{(t,\eta)\in\Gamma \mid \eta\le\Phi(t)\},\ \Gamma_-=\{(t,\eta)\in\Gamma \mid \eta\ge\Phi(t)\}.$$

Площади фигур Γ_+ и Γ_- обозначим через $\Delta S^+(b_0,b_1)$ и $\Delta S^-(b_0,b_1)$. Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$\nu_\varepsilon(b_1)=\nu_\varepsilon(b_0)+\Delta S^+(b_0,b_1)-\Delta S^-(b_0,b_1).$$

Из геометрических соображений ясно, что в промежутке $(0,+\infty)$ существует такое b', что если $b\in(0,b')$, то разность (7) не обращается в нуль ни при каком $t\in(0,+\infty)$, а если $b>b'$, то найдутся точки $t\in(0,+\infty)$, в которых эта разность обращается в нуль.

Пусть $b_\lambda=(1-\lambda)b_0+\lambda b_1,\ \lambda\in(0,1)$. Если $b_1\in(0,b']$, то на основании леммы имеем

$$\Delta S^+(b_\lambda,b_1)=0,\ \Delta S^-(b_\lambda,b_1)=\frac{1-\lambda}{\lambda}\Delta S^-(b_0,b_\lambda).$$

Отсюда следует, что на промежутке $(0,b']$ функция $\nu_\varepsilon(b)$ является строго убывающей аффинной функцией. Если же $b_1>b'$, то на основании леммы и свойства строгой монотонности функции $\eta=\Phi(t)$ имеем

$$\Delta S^+(b_\lambda,b_1)>\frac{1-\lambda}{\lambda}\Delta S^+(b_0,b_\lambda),$$

$$\Delta S^-(b_\lambda,b_1)<\frac{1-\lambda}{\lambda}\Delta S^-(b_0,b_\lambda).$$

Следовательно,

$$\Delta S^+(b_\lambda,b_1)-\Delta S^-(b_\lambda,b_1)>\frac{1-\lambda}{\lambda}\left[\Delta S^+(b_0,b_\lambda)-\Delta S^-(b_0,b_\lambda)\right].$$

Это означает, что функция $\nu_\varepsilon(b)$ является выпуклой на всем промежутке $(0,+\infty)$, причем строго выпуклой на промежутке $[b',+\infty)$.

С другой стороны, при любом $t\in(0,+\infty)$ справедливо равенство

$$\lim_{b\to+\infty}F_\varepsilon(b,t)=0.$$

Отсюда

$$\lim_{b\to+\infty}\nu_\varepsilon(b)=+\infty.$$

Следовательно, функция $y_\varepsilon(b)$ обладает единственной точкой минимума $b^* = b^*(\varepsilon) \in (b', +\infty)$. Это завершает доказательство теоремы.

Гипотезу о квазивыпуклости функции

$$\mu(\varepsilon) = \min\{y_\varepsilon(b) \mid b \in (0, +\infty)\}, \varepsilon \in (0,1),$$

доказать не удалось. В связи с этим были проведены численные эксперименты для размерностей $n =$ I,2,3. В первом случае сначала вычислялись значения функции $\mu(\varepsilon)$ в узлах сетки с шагом $h = 0{,}01$; эти вычисления подтвердили указанную гипотезу. Затем из полученных значений было выбрано минимальное. Во втором случае при нахождении минимума функции $\mu(\varepsilon)$ на основании указанной гипотезы был применен метод золотого сечения. Результаты обоих экспериментов полностью согласуются.

Заметим, что минимизируемая функция $y(a,b)$ пропорциональна параметру σ. Чтобы в этом убедиться, достаточно перейти к параметрам $\bar{a} = \frac{a}{\sigma}$, $\bar{b} = \frac{b}{\sigma}$, $\bar{t} = \frac{t}{\sigma}$.

В табл. I приведены минимальные значения функций $y(a,b)$, $0 < b < a < +\infty$, а также отвечающие им значения параметров a и b для разностей $n =$ I,2,3. Для сравнения в этой же таблице приводятся минимальные значения соответствующих функций в задачах наилучшего приближения нормального распределения равномерными распределениями и "коническими" распределениями; эти функции условно обозначены через $y(a,a)$ и $y(a,0)$, $a \in (0,+\infty)$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.Ш.Рубинштейну за постоянное внимание к данной работе.

Таблица I

Оптимальные значения функций и параметров

n	$\min y(a,b)$	a_{min}	b_{min}	$\min y(a,a)$	$\min y(a,0)$
I	0,030309xσ	2,318557xσ	0,163512xσ	0,119910xσ	0,030620xσ
2	0,076238xσ	2,418858xσ	0,014728xσ	0,187597xσ	0,076239xσ
3	0,118421xσ	2,576735xσ	0,035866xσ	0,231904xσ	0,118423xσ

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. - Докл. АН СССР, 1942, т.37, № 7-8, с.227-229.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. - Докл. АН СССР, 1957, т.115, № 6, с.1058-1061.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестник ЛГУ, 1958, № 7, с.52-59.
4. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - Успехи мат. наук, 1970, т.25, с.171-201.
5. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
6. FRIEDRICH V. Stetige Transportoptimierung, ihre Beziehungen zur Theorie der hölderstetiden Funktionen und einige ihrer Anwendungen.- Berlin:VEB Deutscher Verlag Wissenschaften,1972.
7. ВЛАДИМИРОВ Ю.Н. О квазивыпуклых функциях и функциях Липшица, связанных с бесконечномерной задачей перемещения массы в евклидовом пространстве: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1982.
8. ВЛАДИМИРОВ Ю.Н. Об одном классе функций Липшица в конечномерном евклидовом пространстве. - Оптимизация, 1980, вып. 24(41), с.60-69.
9. ВЛАДИМИРОВ Ю.Н. Добавление к статье. - Оптимизация, 1981, вып. 26(43), с.141-142.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.04.1984 г.