Выпуск 34(51) ОПТИМИЗАЦИЯ 1984 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

РЕШЕТОЧНО-НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КЛАССЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

А.Г.Кусраев, В.З.Стрижевский

Решеточно-нормированные пространства были введены Л.В. Канторовичем [1,2]. Такие структуры естественно возникают при изучении классов вектор-функций, векторных мер, операторов со значениями в векторных решетках, а также в выпуклом анализе [2-7]. Решеточно-нормированные пространства неявно появлялись в работах разных авторов (см., например, [6-10]). Эти пространства, как правило, снабжались смешанной нормой (мультинормой) и изучались средствами теории (мульти)нормированных пространств. Однако представляет самостоятельный интерес изучение решеточных норм и связанных с ними геометрических и топологических понятий. Принципиально новые возможности в этом направлении связаны с методом булевозначных реализаций [11,12].

Настоящая работа посвящена изучению некоторых структурных свойств общих решеточно-нормированных пространств, а также пространств непрерывных вектор-функций. В первом параграфе статьи доказывается критерий полноты решеточно-нормированных пространств. Во втором - рассматриваются пространства непрерывных вектор-функций и исследуются вопросы их полноты. В третьем параграфе изучается связь между пространствами непрерывных по норме и слабо непрерывных функций и устанавливается аналог теоремы Петтиса об измеримости вектор-функций.

1. Пусть X - векторное пространство, E является K-пространством. Отображение $p: X \to E$ называется E-значной нормой, если для p выполнены все аксиомы нормы:

(1) $\rho(x)\geq\mathbb{0}$ $(x\in X)$, $\rho(x)=\mathbb{0}\Longleftrightarrow x=\mathbb{0}$;

(2) $\rho(x_1+x_2)\leq\rho(x_1)+\rho(x_2)$ $(x_1,x_2\in X)$;

(3) $\rho(\lambda x)=|\lambda|\cdot\rho(x)$ $(x\in X,\lambda\in R)$.

Говорят, что ρ – норма Канторовича, если кроме того выполнено следующее условие разложимости:

(4) для любых $x\in X$ и $e_1,e_2\in E^+$, $e_1 d\, e_2$ из $\rho(x)=e_1+e_2$ следует существование представления $x=x_1+x_2$, где $x_1,x_2\in X$ и $\rho(x_i)=e_i$, $i=1,2$.

Векторное пространство X, снабженное нормой Канторовича ρ, будем называть K-нормированным пространством и обозначать (X,ρ). K-нормированное пространство (X,ρ) называется

(а) (bo)-полным, если для любой сети $(x_\alpha)\subset X$ из $\rho(x_\alpha-x_\beta)\xrightarrow{(o)}\mathbb{0}$ следует существование такого $x\in X$, что $\rho(x_\alpha-x)\xrightarrow{(o)}\mathbb{0}$;

(б) (br)-полным, если для любой последовательности $(x_n)\subset X$ из $\rho(x_n-x_m)\xrightarrow{(r)}\mathbb{0}$ следует существование такого $x\in X$, что $\rho(x_n-x)\xrightarrow{(r)}\mathbb{0}$;

(в) дизъюнктно-полным, если для любого полного семейства $\{\pi_\xi:\xi\in\Xi\}$ попарно-дизъюнктных проекторов в E и любого ограниченного семейства $\{x_\xi:x_\xi\in X,\rho(x_\xi)\leq e\in E,\ \xi\in\Xi\}$ существует такой $x\in X$ (обозначаемый $x=\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi x_\xi$), что $\pi_\xi\rho(x-x_\xi)=\mathbb{0}$ для каждого $\xi\in\Xi$.

Докажем следующий полезный признак (bo)-полноты, полученный первым автором.

ТЕОРЕМА I.I. Для (bo)-полноты K-нормированного пространства необходимо и достаточно, чтобы оно было дизъюнктно-полно и (br)-полно.

◁ Пусть (X,ρ) является K-нормированным пространством, где $\rho:X\to E$ и $\mathfrak{B}(E)$ – булева алгебра дизъюнкных компонент E. Прообраз $\rho^{-1}[K]$ каждой компоненты $K\in\mathfrak{B}(E)$ есть линейное подпространство X. При этом $\rho^{-1}[K_1\wedge K_2]=\rho^{-1}[K_1]\cap\rho^{-1}[K_2]$ и $\rho^{-1}[K_1\vee K_2]=\rho^{-1}[K_1]+\rho^{-1}[K_2]$ ($K_i\in\mathfrak{B}(E)$, $i=1,2$). По очевидным соображениям, $\rho^{-1}[K^d]$ является алгебраическим дополнением $\rho^{-1}[K]$: $\rho^{-1}[K]+\rho^{-1}[K^d]=X$, $\rho^{-1}[K]\cap\rho^{-1}[K^d]=\rho^{-1}[K\wedge K^d]=\{\mathbb{0}\}$.

Отождествим $\mathfrak{B}(E)$ с булевой алгеброй дизъюнкных проекто-

ров в E, а с каждым подпространством $\rho^{-1}[\pi]$ ($\pi \in \mathfrak{B}(E)$) свяжем оператор $h(\pi)$ проектирования на $\rho^{-1}[\pi]$ параллельно $\rho^{-1}[\pi^d]$ ($\operatorname{Ker} h(\pi)=\rho^{-1}[\pi^d]$). Возникает отображение $h:\pi \to h(\pi)$ булевой алгебры $\mathfrak{B}(E)$ во множество линейных проекторов пространства X. Если $\pi_1 \,d\, \pi_2$, то $\pi_2 \subset \pi_1^d$ и $\operatorname{Im} h(\pi_2) \subset \operatorname{Ker} h(\pi_1)$, т.е. $h(\pi_1)\circ h(\pi_2)=0$. Далее, для произвольных $x \in X$ и $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x=x_1+x_2$, $\pi\rho(x)=\rho(x_1)$, $\pi^d\rho(x)=\rho(x_2)$. Поэтому $h(\pi)x_2=0$ и, следовательно, $\pi\rho(x)=\rho(x_1)=\rho(h(\pi)x_1)=$ $=\rho(h(\pi)x)$. Покажем коммутативность линейных проекторов $h(\pi_1)$ и $h(\pi_2)$ для произвольных $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{B}(E)$:

$$\rho(h(\pi_1)h(\pi_2)x-h(\pi_2)h(\pi_1)x)=(\pi_1+\pi_1^d)\rho(h(\pi_1)h(\pi_2)x-$$
$$-h(\pi_2)h(\pi_1)x)=\rho(h(\pi_1)h(\pi_2)x-h(\pi_1)h(\pi_2)h(\pi_1)x)+$$
$$+\rho(h(\pi_1^d)h(\pi_1)h(\pi_2)x-h(\pi_1^d)h(\pi_2)h(\pi_1)x)\leq$$
$$\leq \pi_1\pi_2\rho(x-h(\pi_1)x)+\pi_1^d\pi_1\pi_2\rho(x)+\pi_1^d\pi_2\pi_1\rho(x)=\pi_1\pi_2\pi_1^d\rho(x)=$$
$$=0.$$

Пусть теперь (X,ρ) - (bo)-полное K-нормированное пространство. Тогда (X,ρ) является и (br)-полным. Покажем дизъюнктную полноту. Пусть $\{\pi_\xi : \xi \in \Xi\}$ - полное семейство попарно-дизъюнктных проекторов в E и $\{x_\xi : \rho(x_\xi) \leq$ $\leq e \in E, \xi \in \Xi\} \subset X$. Множество Θ всех конечных подмножеств множества Ξ направлено по возрастанию. Для каждого $\theta \in \Theta$ положим $\bar{x}_\theta=\sum_{\xi\in\theta} h(\pi_\xi)x_\xi$ и $e_\theta=e-[\sup_{\xi\in\theta}\pi_\xi](e)$. Ясно, что $e_\theta \downarrow 0$ и для $\theta_1, \theta_2 \geq \theta$

$$\rho(\bar{x}_{\theta_1}-\bar{x}_{\theta_2})=\rho\Big(\sum_{\xi\in\theta_1} h(\pi_\xi)x_\xi-\sum_{\xi\in\theta_2} h(\pi_\xi)x_\xi\Big)=\rho\Big(\sum_{\xi\in\theta_1\setminus\theta_2} h(\pi_\xi)x_\xi-$$
$$-\sum_{\xi\in\theta_2\setminus\theta_1} h(\pi_\xi)x_\xi\Big)\leq\sum_{\xi\in\theta_1\triangle\theta_2}\rho(h(\pi_\xi)x_\xi)=\sum_{\xi\in\theta_1\triangle\theta_2}\pi_\xi\rho(x_\xi)\leq$$
$$\leq\sum_{\xi\in\theta_1\triangle\theta_2}\pi_\xi e\leq e_\theta\downarrow 0.$$

Существует $x \in X$ такой, что $\rho(\bar{x}_\theta-x)\to 0$. Покажем, что для каждого $\mu \in \Xi$ $\pi_\mu\rho(x_\mu-x)=0$. Если $\theta \geq \{\mu\}$, то из неравенства $\rho(\bar{x}_\theta-x)\leq e_\theta$ следует $\pi_\mu\rho(\bar{x}_\theta-x)\leq\pi_\mu e_\theta=0$. С другой стороны,

$$\pi_\mu\rho(\bar{x}_\theta-x)=\rho\Big(\sum_{\xi\in\theta} h(\pi_\mu)h(\pi_\xi)x_\xi-h(\pi_\mu)x\Big)=$$
$$=\rho(h(\pi_\mu)x_\mu-h(\pi_\mu)x)=\pi_\mu\rho(x_\mu-x).$$

Дизъюнктная полнота доказана.

Пусть теперь (X,ρ) является $(b\sigma)$ - и дизъюнктно-полным. Для (bo) -фундаментальной сети $\{x_\gamma : \gamma \in \Xi\}$ существует убывающее к 0 направление $\{l_\gamma : l_\gamma \geqslant 0, \gamma \in \Xi\}$ элементов E такое, что $\rho(x_\alpha - x_\beta) \leqslant l_\gamma$ для всех $\alpha, \beta \geqslant \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$). Через $B(\Xi)$ обозначим множество отображений $\nu : \Xi \to \mathfrak{P}(E)$, удовлетворяющих требованиям:

(а) $\beta \neq \gamma \Longrightarrow \nu(\beta) \wedge \nu(\gamma) = 0$;

(б) $\sup\limits_{\gamma\in\Xi} \nu(\gamma) = 1$ (1 - единица булевой алгебры $\mathfrak{P}(E)$).

Иначе говоря, каждый элемент $\nu \in B(\Xi)$ задает дизъюнктное разложение булевой алгебры $\mathfrak{P}(E)_{def}$ с индексным множеством Ξ. Введем в $B(\Xi)$ порядок: $\nu_1 \leqslant \nu_2 \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \beta, \gamma \in \Xi \ \ \nu_1(\beta) \wedge \nu_2(\gamma) \neq 0 \Rightarrow \beta \leqslant \gamma)$, который превращает $B(\Xi)$ в направленное множество. Без ограничения общности можно предполагать наличие единицы 1 в E . Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\nu(\varepsilon) = (\pi_\alpha)_{\alpha\in\Xi} \in B(\Xi)$ такое, что $\pi_\alpha l_\beta \leqslant \varepsilon 1$ для всех $\beta \geqslant \alpha$. Действительно, существует полное семейство попарно-дизъюнктных проекторов $\{\rho_\xi : \xi \in \Xi'\}$ и отображение $\varphi : \Xi' \to \Xi$ такие, что $\rho_\xi e_{\varphi(\xi)} \leqslant \varepsilon 1$ для каждого $\xi \in \Xi'$. Остается положить $\pi_\alpha = \sup\{\rho_\xi : \varphi(\xi) = \alpha, \xi \in \Xi'\}$ $(\alpha \in \Xi)$. С каждым элементом $\nu \in B(\Xi)$ ($\nu = (\pi_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$) свяжем вектор $x_\nu = \sum\limits_{\alpha\in\Xi} \pi_\alpha x_\alpha$. Предполагая, что $\nu', \nu'' \geqslant \nu(\varepsilon)$, покажем справедливость неравенства $\rho(x_{\nu'} - x_{\nu''}) \leqslant \varepsilon 1$. Пусть $\nu' = (\delta_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$ и $\nu'' = (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$. Достаточно установить, что $\pi_{\alpha_0} \rho(x_{\nu'} - x_{\nu''}) \leqslant \varepsilon 1$ для каждого $\alpha_0 \in \Xi$. Рассмотрим выражение $\pi_{\alpha_0} \delta_\alpha \tau_\beta \rho(x_{\nu'} - x_{\nu''})$ ($\alpha, \beta \in \Xi$). Если $\pi_{\alpha_0} \delta_\alpha \tau_\beta = 0$, то $\pi_{\alpha_0} \delta_\alpha \tau_\beta \rho(x_{\nu'} - x_{\nu''}) = 0 \leqslant \varepsilon 1$. Если же $\pi_{\alpha_0} \delta_\alpha \tau_\beta \neq 0$, то $\alpha_0 \leqslant \alpha, \beta$ и $\pi_{\alpha_0} \delta_\alpha \tau_\beta \rho(x_{\nu'} - x_{\nu''}) = \pi_{\alpha_0} \rho(h(\delta_\alpha) h(\tau_\beta) x_{\nu'} - h(\delta_\alpha) h(\tau_\beta) x_{\nu''}) = \pi_{\alpha_0} \rho(h(\tau_\beta) h(\delta_\alpha) x_\alpha - h(\delta_\alpha) h(\tau_\beta) x_\beta) = \pi_{\alpha_0} \delta_\alpha \tau_\beta \rho(x_\alpha - x_\beta) \leqslant \pi_{\alpha_0} \rho(x_\alpha - x_\beta) \leqslant \pi_{\alpha_0} e_{\alpha_0} \leqslant \varepsilon 1$. Тем самым доказано неравенство $\rho(x_{\nu'} - x_{\nu''}) \leqslant \varepsilon 1$ при всех $\nu', \nu'' \geqslant \nu(\varepsilon)$. Из $(b\sigma)$-полноты (секвенциальной) пространства (X, ρ) следует, что для $(b\sigma)$ -фундаментальной сети $(x_\nu)_{\nu\in B(\Xi)}$ существует предел x : $\rho(x_\nu - x) \leqslant \varepsilon 1$ при $\nu \geqslant \nu(\varepsilon)$.

Пусть $\nu = (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$ и $\nu(\varepsilon) = (\pi_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$. Для фиксированного $\alpha_0 \in \Xi$ имеем: либо $\pi_{\alpha_0} \tau_\alpha = 0$ и $0 = \pi_{\alpha_0} \tau_\alpha \rho(x_\nu - x) = \pi_{\alpha_0} \rho(h(\tau_\alpha) x_\nu - h(\tau_\alpha) x) = \pi_{\alpha_0} \rho(h(\tau_\alpha) x_\alpha - h(\tau_\alpha) x) = \pi_{\alpha_0} \tau_\alpha \rho(x_\alpha - x)$,

либо $\pi_{\alpha_0}\tau_\alpha \neq \mathbb{0}$ и тогда $\alpha_0 \le \alpha$, $\varepsilon\mathbb{1} \ge \pi_{\alpha_0}\tau_\alpha \rho(x_\gamma - x) =$ $= \pi_{\alpha_0}\tau_\alpha \rho(x_\alpha - x)$. Получаем $\pi_{\alpha_0}\rho(x_\alpha - x) \le \varepsilon\mathbb{1}$ при $\alpha_0 = \alpha$. Положим $z_\beta = \sup\limits_{\alpha \ge \beta} \rho(x_\alpha - x)$. Тогда $z_\beta \downarrow$ и $\pi_{\alpha_0} z_{\alpha_0} =$ $= \pi_{\alpha_0}(\sup\limits_{\alpha \ge \alpha_0} \rho(x_\alpha - x)) = \sup\limits_{\alpha \ge \alpha_0}(\pi_{\alpha_0}\rho(x_\alpha - x)) \le \varepsilon\mathbb{1}$, т.е. $\pi_{\alpha_0} z_\beta \le \varepsilon\mathbb{1}$ для всех $\beta \ge \alpha_0$. Значит, $\inf z_\beta = \mathbb{0}$ и $\rho(x_\alpha - x) \xrightarrow{(o)} \mathbb{0}$. ▷

Для произвольной архимедовой векторной решетки X и ее $\mathcal{K}$-пополнения E можно определить E-значную норму $\rho : X \to E$ по формуле $\rho : x \mapsto |x| \in E$, $x \in X$. Непосредственно из теоремы I.I вытекает следующий результат (более сильное утверждение см. в [I3]).

СЛЕДСТВИЕ I.2. Для того чтобы архимедова векторная решетка X была $\mathcal{K}$-пространством, необходимо и достаточно, чтобы она была (τ)-полной и дизъюнктно-полной.

ЗАМЕЧАНИЕ I.3. В работах [II,I2] установлено, что (bo)-полное $\mathcal{K}$-нормированное пространство допускает погружение в подходящую булевозначную модель теории множеств, превращаясь при этом в банахово пространство. Из этого реализационного факта можно извлечь нестандартное доказательство теоремы I.I.

2. Пусть X - произвольное банахово пространство, а E - фундамент расширенного $\mathcal{K}$-пространства $C_\infty(Q)$ [3]. Для нормативного множества $\Gamma \subset X^*$ функцию $z : \mathcal{M} \to X$ ($\mathcal{M} \subset Q$) будем называть Γ-слабонепрерывной, если функция $t \mapsto \langle z(t), x^* \rangle$ непрерывна для каждого $x^* \in \Gamma$. Через $E_s(X, \Gamma)$ обозначим векторное пространство всех функций $z : \mathcal{M}_z \to X$ таких, что:

(а) $\mathcal{M}_z \subset Q$ и множество $\mathcal{M}_z$ является дополнением в Q некоторого тощего[ж)] (вообще говоря, для каждой функции своего) множества;

(б) z является Γ-слабонепрерывной;

(в) множество $\{\langle z, x^* \rangle(\cdot) : x^* \in \Gamma, \|x^*\| \le 1\}$ ограничено в E (здесь $\langle z, x^* \rangle(\cdot)$ означает непрерывное продолжение функции $t \mapsto \langle z(t), x^* \rangle, t \in \mathcal{M}_z$ на весь компакт Q).

ж) Такие множества будем называть ko-тощими.

Пусть $E(X)$ является подпространством пространства $E_d(X,\Gamma)$, состоящим из непрерывных функций. Функции, совпадающие на пересечении областей определения, считаем эквивалентными. Пространства типа $E(X)$ изучались А.В.Бухваловым в [6], где определялись как пространства функций, заданных на открытых плотных подмножествах компакта Q. В [9,10] рассматривались аналогичные пространства измеримых и скалярно измеримых функций и было получено аналитическое представление операторов с абстрактной нормой, действующих в пространство измеримых функций. Эти пространства исследовались с точки зрения смешанных норм, хотя в них естественным образом возникает решеточнозначная норма. Именно с этой точки зрения пространства $E(X)$ и $E_d(X,\Gamma)$ рассматриваются в настоящей работе.

Рассмотрим отображение $\rho: E_d(X,\Gamma)\to E$, задаваемое соотношением $\rho(z)=\sup\{|\langle z_1,x^*\rangle(\cdot)|: x^*\in\Gamma, \|x^*\|\le 1\}$, где z_1 – произвольный представитель класса эквивалентности z. Отображение ρ задано корректно. Действительно, если $z_1, z_2\in z$, то $z_i: m_i\to X$ и существуют k_0-тощие множества $n_1, n_2\subset Q$ такие, что

$$[\sup\{|\langle z_i,x^*\rangle(\cdot)|: x^*\in\Gamma, \|x^*\|\le 1\}](t)=$$
$$=\sup\{|\langle z_i,x^*\rangle(t)|: x^*\in\Gamma, \|x^*\|\le 1\}$$

для всех $t\in n_i, i=1,2$. Поэтому

$$[\sup\{|\langle z_i,x^*\rangle(\cdot)|: x^*\in\Gamma, \|x^*\|\le 1\}](t)=\sup\{|\langle z_i(t),$$
$$x^*\rangle|: x^*\in\Gamma, \|x^*\|\le 1\}=\|z_i(t)\| \quad (t\in n_i\cap m_i,\ i=1,2).$$

Остается лишь заметить, что $\|z_1(t)\|=\|z_2(t)\|$ для всех $t\in m_1\cap m_2$.

Пространства $(E_d(X,\Gamma),\rho)$ и $(E(X),\rho)$ являются $\mathcal{K}$ - нормированными пространствами. Действительно, выполнение первых трех аксиом нормы очевидно. Если $\rho(z)=e_1+e_2$ $(e_1,e_2\in E^+)$ и $\bar z\in z$ $(\bar z: m\to X)$, то естественным образом можно осмыслить выражение $\frac{e_i(\cdot)}{e_1(\cdot)+e_2(\cdot)}\cdot\bar z(\cdot)$ ($i=1,2$). Положив $\bar z_i = \frac{e_i(\cdot)}{e_1(\cdot)+e_2(\cdot)}\cdot\bar z(\cdot)$ ($i=1,2$), заметим, что $z_1+z_2=z$, $\rho(z_i)=e_i$ ($i=1,2$), где z_i - класс эквивалентности, порождаемый функцией $\bar z_i$ ($i=1,2$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Нетрудно заметить, что пространства $E(X)$ и $E_s(X,\Gamma)$ не зависят от способа реализации E в качестве фундамента $\mathcal{K}$-пространства $C_\infty(Q)$. Точнее, если E и F являются изоморфными фундаментами расширенных $\mathcal{K}$-пространств $C_\infty(Q_1)$ и $C_\infty(Q_2)$, то $\mathcal{K}$-нормированные пространства $E(X)$ ($E_s(X,\Gamma)$) и $F(X)$($F_s(X,\Gamma)$) линейно-изометричны [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $z\in E(X)$ и $\bar{z}\in z$, где $\bar{z}:\mathfrak{M}_{\bar{z}}\to X$, то $\rho(z)$ является распространением по непрерывности функции $t\mapsto\|\bar{z}(t)\|$ ($t\in\mathfrak{M}_{\bar{z}}$) на все Q.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если $z\in E_s(X^*,\Gamma)$, где $\Gamma\subset X\subset X^{**}$, то в классе эквивалентности z существует функция z_1, определенная на открытом плотном подмножестве компакта Q.

◁ Действительно, если $z_0\in z$ и $z_0:\mathfrak{M}_0\to X^*$, то существует k_0-тощее множество $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_0$, для каждой точки t которого выполнено соотношение

$$[\sup\{|\langle x,z_0\rangle(\cdot)|:x\in\Gamma,\|x\|\le 1\}](t)=$$

$$\sup\{|\langle x,z_0(t)\rangle|:x\in\Gamma,\|x\|\le 1\}=\|z_0(t)\|.$$

Положим $\mathfrak{M}_1=\{t\in Q:\|z_0\|(t)<+\infty\}$ ($\|z_0\|(\cdot)$ - непрерывное распространение функции $\|z_0(\cdot)\|:\mathfrak{M}\to R$ на весь компакт Q). Множество $\mathfrak{M}_1$ является открытым и плотным подмножеством Q и $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_1$. Для каждого $x\in\Gamma$ такого, что $\|x\|\le 1$, справедливо неравенство $|\langle x,z_0\rangle(t)|\le\|z_0\|(t)<\infty$ ($t\in\mathfrak{M}_1$). Следовательно, формула $\langle x,z_1(t)\rangle=\langle x,z_0\rangle(t)$ ($t\in\mathfrak{M}_1$) определяет Γ-слабонепрерывную функцию $z_1:\mathfrak{M}_1\to X^*$ и $\sup\limits_{x\in\Gamma,\|x\|\le 1}|\langle x,z_1\rangle(\cdot)|=\sup\limits_{x\in\Gamma,\|x\|\le 1}|\langle x,z_0\rangle(\cdot)|\in E$.

Осталось лишь заметить, что $z_1\in z$. ▷

С каждым элементом $z\in E_s(X^*,X)$ свяжем линейный оператор $T_z:X\to E$, задаваемый по правилу: $T_z x=\langle z_1,x\rangle(\cdot)$, где $x\in X$, $z_1\in z$ и $\langle z_1,x\rangle(\cdot)$ означает непрерывное распространение функции $t\mapsto\langle z_1(t),x\rangle$ на весь компакт Q.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное отображение $T:X\to E$ называется оператором с абстрактной нормой, если существует элемент $|T|=\sup\{|Tx|:\|x\|\le 1\}\in E$, называемый абстрактной нормой оператора T.

Пространство всех операторов с абстрактной нормой обозначим через $\Pi(X,E)$. Нетрудно видеть, что оно является $\mathcal{K}$-

нормированным пространством. Следующее предложение устанавливает связь между $E_s(X^*,X)$ и $\Pi(X,E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Отображение $z \mapsto T_z$ осуществляет линейную изометрию пространства $(E_s(X^*,X),\rho)$ на $(\Pi(X,E),|\cdot|)$.

◁ Линейность и инъективность этого отображения очевидны. Пусть $T\in\Pi(X,E)$. Тогда $|Tx|\leq|T|\|x\|$. Положим $\mathfrak{M}=\{t\in Q: |T|(t)<+\infty\}$. Неравенство $|[Tx](t)|\leq|T|(t)\cdot\|x\|<+\infty$ $(t\in\mathfrak{M})$ показывает, что функция $\bar{z}$, определяемая соотношением $\langle\bar{z}(t),x\rangle=[Tx](t)$ $(t\in\mathfrak{M}, x\in X)$, принимает значения в X^*. При этом ясно, что класс эквивалентности $z\in E_s(X^*,X)$, порождаемый $\bar{z}$, определяет оператор $T_z:X\to E$, совпадающий с T, и $|T|=\rho(z)$. ▷

Теперь установим (bo)-полноту рассматриваемых пространств.

ТЕОРЕМА 2.5. Для произвольных банахова пространства X и фундамента E расширенного $\mathcal{K}$-пространства $C_\infty(Q)$ пространства $(E(X),\rho)$ и $(E_s(X,\Gamma),\rho)$ являются (bo)-полными.

◁ Доказательство проведем для $E(X)$. По критерию (bo)-полноты (теорема I.I) достаточно показать (br)- и дизъюнктную полноту $E(X)$. Пусть $(z_n)\subset E(X)$, $e\in E^+$ и $\rho(z_n-z_m)\leq\varepsilon e$ для каждого $\varepsilon>0$ и всех $n,m\geq N(\varepsilon)$. Выберем по представителю $\bar{z}_n\in z_n$ $(\bar{z}_n:\mathfrak{M}_n\to X)$. Рассмотрим co-тощее множество $\bar{\mathfrak{M}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$ и открытое плотное в Q множество $\mathfrak{M}_e=\{t\in Q: e(t)<+\infty\}$. Для каждой точки $t\in\bar{\mathfrak{M}}\cap\mathfrak{M}_e$ последовательность $(\bar{z}_n(t))\subset X$ является фундаментальной $(\|\bar{z}_n(t)-\bar{z}_m(t)\|=[\rho(z_n-z_m)](t)\leq\varepsilon e(t)<+\infty, t\in\bar{\mathfrak{M}}\cap\mathfrak{M}_e, n,m\geq N(\varepsilon))$ и, следовательно, существует функция $\bar{z}:\bar{\mathfrak{M}}\cap\mathfrak{M}_e\to X$ такая, что $\bar{z}_n(t)\xrightarrow[n]{}\bar{z}(t)$ для каждого $t\in\bar{\mathfrak{M}}\cap\mathfrak{M}_e$. Пусть $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ - максимальная система попарно-дизъюнктных открыто-замкнутых подмножеств множества $\mathfrak{M}_e$. Положим $\bar{\mathfrak{M}}_e=\bigcup_\xi U_\xi$, $K_\xi=\max_{t\in U_\xi} e(t)$ и $\bar{U}=U_\xi\cap\bar{\mathfrak{M}}$. Тогда $\|\bar{z}_n(t)-\bar{z}_m(t)\|\leq\varepsilon K_\xi$ для каждого $t\in\bar{U}_\xi$ и всех $n,m\geq N(\varepsilon)$ и потому $\|\bar{z}_n(t)-\bar{z}(t)\|\leq\varepsilon K_\xi$ $(t\in\bar{U}_\xi, n\geq N(\varepsilon))$. Если $t,s\in\bar{U}_\xi$, то $\|\bar{z}(t)-\bar{z}(s)\|\leq\|\bar{z}(t)-\bar{z}_n(t)\|+\|\bar{z}_n(t)-\bar{z}_n(s)\|+\|\bar{z}_n(s)-\bar{z}(s)\|\xrightarrow[s\to t]{}0$.

Следовательно, функция $\bar{z}$ непрерывна на ko-тощем множестве $\mathfrak{N}=\bigcup_\xi \bar{U}_\xi=\bigcup_\xi(U_\xi\cap\bar{\mathfrak{m}})\cdot\bar{\mathfrak{m}}\bar{\mathfrak{m}}_e$. Далее, $\|\bar{z}(t)\|-\|\bar{z}_n(t)\|\le$ $\le\|\bar{z}(t)-\bar{z}_n(t)\|\le e(t)$ для всех $t\in\bar{\mathfrak{m}}\cap\bar{\mathfrak{m}}_e$ и $n\ge N(1)$, поэтому $\|\bar{z}\|(\cdot)-\|\bar{z}_n\|(\cdot)\le\|\bar{z}-\bar{z}_n\|(\cdot)\le e\in E$ и $\|\bar{z}\|(\cdot)\in E$. Таким образом показано, что класс эквивалентности z, порождаемый функцией $\bar{z}$, входит в $E(X)$. Ясно, что $\rho(z_n-z)\xrightarrow{(o)}0$. Остается показать дизъюнктную полноту $E(X)$. Пусть $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ - полное множество попарно-дизъюнктных проекторов в E и $\{z_\xi:\rho(z_\xi)\le e\in E,\xi\in\Xi\}\subset E(X)$. Выберем по представителю $\bar{z}_\xi\in z_\xi$ ($\bar{z}_\xi:\mathfrak{m}_\xi\to X$) и определим функцию $\bar{z}:\bigcup_\xi(\mathfrak{m}_\xi\cap\pi_\xi)\to X$ (мы мыслим π_ξ и как проектор в E, и как открыто-замкнутое множество в Q) по правилу: $\bar{z}(t)=\bar{z}_\xi(t)$ для $t\in\mathfrak{m}_\xi\cap\pi_\xi$. Нетрудно видеть, что множество $\bigcup_\xi(\mathfrak{m}_\xi\cap\pi_\xi)$ является ko-тощим и $z=\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi z_\xi$, где z - класс эквивалентности, порождаемый $\bar{z}$. ▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Булева алгебра B называется регулярной, если она счетного типа и для всякой двойной последовательности $(x_{n,m})_{n,m}\in N$ элементов B из того, что $(x_{n,m})_{m\in N}$ убывает и (o)-сходится к нулю для каждого $n\in N$, следует существование диагональной последовательности $(x_{n,m(n)})_{n\in N}$, порядково-сходящейся к нулю.

Регулярность булевой алгебры B равносильна следующему условию (в терминах ее стоуновского компакта Q) [3]:

всякое счетное множество замкнутых нигде не плотных подмножеств компакта Q погружается в одно замкнутое нигде не плотное множество типа G_δ.

Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $E\otimes X$, наделенное векторной нормой $\rho_0:E\otimes X\to E$: для каждого $z\in E\otimes X$ положим $\rho_0(z)=\inf\sum|e_i|\cdot\|x_i\|$, где инфимум берется по всевозможным конечным представлениям $z=\sum e_i\otimes x_i$. Эта норма вполне аналогична кросс-норме, введенной в [8] (см. также [6]). Рассмотрим отображение $I:E\otimes X\to E(X)$, сопоставляющее каждому $z=\sum e_i\otimes x_i$ класс эквивалентности непрерывной функции $t\mapsto\sum e_i(t)\cdot x_i$ ($t\in\mathfrak{m}_z=\{t\in Q:\sum|e_i|(t)<+\infty\}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. (а) Вложение $I:(E\otimes X,\rho_0)\to(E(X),\rho)$ есть векторная изометрия.

(б) Если база $\mathfrak{b}(E)$ K-пространства E является произведением ре-

гулярных булевых алгебр, то пространство $I[E\otimes X]$ плотно по векторной норме в $E(X)$;

◁ (а) Действительно, для $z=\sum e_i\otimes x_i$ имеем $\rho(z) = \|\sum e_i x_i\|(\cdot)\le \sum |e_i(\cdot)|\cdot\|x_i\|$ и, следовательно, $\rho(z)\le \rho_0(z)$. Далее, можно считать, что для каждой точки $s\in \mathfrak{M}_z$ существует функция $\varphi_s(\cdot)\in E$ такая, что $\varphi_s(s)=1$. Положим $\bar{x}_s = \sum e_i(s)\cdot x_i\in X$ ($s\in\mathfrak{M}_z$). Тогда

$$[\rho_0(z)](s)=[\inf\sum|e_j'|\cdot\|x_j'\|](s)\le[\sum|e_i(\cdot)-\varphi_s(\cdot)e_i(s)|\cdot\|x_i\|+$$
$$+|\varphi_s(\cdot)|\cdot\|\bar{x}_s\|](s)=|\varphi_s(s)|\cdot\|\bar{x}_s\|=\|\sum e_i(s)x_i\|=\|z(s)\|=[\rho(z)](s)\ (s\in\mathfrak{M}_z),$$

где инфимум берется по всем представлениям z в виде конечных сумм $\sum e_j'\otimes x_j'\in E\otimes X$. Значит, $\rho_0(z)\le\rho(z)$.

(б) Пусть $z\in E(X)$ и $\bar{z}\in z$ ($\bar{z}:\mathfrak{M}_{\bar{z}}\to X$). Без ограничения общности можно считать, что булева алгебра $\mathfrak{B}(E)$ – регулярная, $\mathfrak{M}_{\bar{z}}=Q$ и функция $\mathbb{1}(t)\equiv 1$ ($t\in Q$) принадлежит E. Из компактности множества $\bar{z}[Q]$ следует существование последовательности конечнозначных функций $(\bar{z}_n)\in E\otimes X$, равномерно сходящейся к $\bar{z}$, что и показывает плотность вложения $E\otimes X$ в $E(X)$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Утверждение об измеримых функциях со значениями в банаховом пространстве X, аналогичное предложению 2.6(б), можно найти в [5] (см. также [9]).

3. Следующее утверждение уточняет соотношение между $E(X)$ и $E_s(X,\Gamma)$. Из него можно получить теорему Петтиса об измеримых функциях [14].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть база $\mathcal{K}$-пространства E является произведением регулярных булевых алгебр. Тогда элемент $z\in E_s(X,\Gamma)$ входит в $E(X)$ в том и только в том случае, если существует полное семейство $(Q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно-дизъюнктных открыто-замкнутых подмножеств компакта Q и $\bar{z}\in z$ такие, что сужение функции $\bar{z}$ на Q_ξ имеет сепарабельный образ для каждого $\xi\in\Xi$.

Доказательство теоремы 3.I основано на следующих предложениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если база $\mathcal{B}(E)$ $\mathcal{K}$-пространства E является регулярной булевой алгеброй и банахово пространство X сепарабельное, то пространства $E(X)$ и $E_s(X,\Gamma)$ совпадают.

◁ Так как в предположении регулярности булевой алгебры $\mathcal{B}(E)$ каждое $\mathcal{B}_0$-тощее множество имеет плотную в Q внутренность, то для произвольного элемента $\mathfrak{z}$ пространства $E_s(X,\Gamma)$ существует функция $\bar{\mathfrak{z}}\in\mathfrak{z}$ такая, что область ее определения $\mathfrak{M}$ открыта и плотна в Q и $\|\bar{\mathfrak{z}}\|(t)=\|\bar{\mathfrak{z}}(t)\|$ $(t\in\mathfrak{M})$. Без ограничения общности будем предполагать, что в E есть порядковая единица $\mathbb{1}$ и она совпадает с функцией, тождественно равной единице на Q. Зафиксируем $x\in X$. Для каждой точки $t\in\mathfrak{M}$ и каждого $x^*\in\Gamma$ такого, что $\|x^*\|\leq 1$, имеем

$$|\langle\bar{\mathfrak{z}}(t)-x,x^*\rangle|\leq|\langle\bar{\mathfrak{z}}(t),x^*\rangle|+|\langle x,x^*\rangle|\leq\sup_{x^*\in\Gamma,\|x^*\|\leq 1}|\langle\bar{\mathfrak{z}}(t),x^*\rangle|+$$
$$+\sup_{x^*\in\Gamma,\|x^*\|\leq 1}|\langle x,x^*\rangle|=\|\bar{\mathfrak{z}}(t)\|+\|x\|.$$

Поэтому для распространения функций $|\langle\bar{\mathfrak{z}}(\cdot)-x,x^*\rangle|$ и $\|\bar{\mathfrak{z}}(\cdot)\|$ на весь компакт Q справедливо неравенство

$$|\langle\bar{\mathfrak{z}}-x,x^*\rangle(\cdot)|\leq\|\bar{\mathfrak{z}}\|(\cdot)+\mathbb{1}(\cdot)\|x\|.$$

Значит, в $\mathcal{K}$-пространстве $C_\infty(Q)$ существует $\sup\limits_{x^*\in\Gamma,\|x^*\|\leq 1}|\langle\bar{\mathfrak{z}}-x,x^*\rangle(\cdot)|$. Из регулярности $\mathcal{B}(E)$ следует, что последний супремум является поточечным на некотором открытом плотном множестве $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$:

$$[\sup_{x^*\in\Gamma,\|x^*\|\leq 1}|\langle\bar{\mathfrak{z}}-x,x^*\rangle(\cdot)|](t)=\sup_{x^*\in\Gamma,\|x^*\|\leq 1}|\langle\bar{\mathfrak{z}}(t)-x,x^*\rangle|=$$
$$=\|\bar{\mathfrak{z}}(t)-x\|\qquad(t\in\mathfrak{N}).$$

Тем самым, для произвольного x функция $t\mapsto\|\bar{\mathfrak{z}}(t)-x\|$ определена и непрерывна на некотором (зависящем от x) открытом плотном множестве. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ является счетным плотным множеством в X. Регулярность алгебры $\mathcal{B}(E)$ позволяет выбрать одно открытое плотное множество $\mathfrak{N}\subset Q$, на котором все функции $t\mapsto\|\bar{\mathfrak{z}}(t)-x_j\|$ $(j=\overline{1,\infty})$ определены и непрерывны. Более того, можно считать, что $\mathfrak{N}$ является объединением непересекающихся открыто-замкнутых множеств: $\mathfrak{N}=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$.

Нам достаточно показать, что функция $\bar{\mathfrak{z}}$ непрерывна на каждом

U_i. Зафиксируем i и будем рассматривать $\bar{z}$ как функцию на $Q=U_i$. Для каждого n множества $B_j^n=\{t\in Q: \|\bar{z}(t)-x_j\|<\frac{1}{n}\}$ ($j=\overline{1,\infty}$) являются открытыми. Их замыкания $\bar{B}_j^n$ – открыто-замкнутые. Ясно, что $Q=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bar{B}_j^n$ и $\|\bar{z}(t)-x_j\|\le\frac{1}{n}$ для всех $t\in\bar{B}_j^n$. Из открытого покрытия $\{\bar{B}_j^n\}_{j=1}^{\infty}$ выделим конечное. Пусть это будут множества $\bar{B}_1^n, \bar{B}_2^n, \dots, \bar{B}_m^n$. Положим $\bar{B}_0^n=\emptyset$ и $A_j^n=\bar{B}_j^n\setminus\bigcup_{k=0}^{j-1}\bar{B}_k^n$ ($j=\overline{1,m}$) и определим на Q функцию $\bar{z}_n$ по правилу: $\bar{z}_n(t)=x_j$ при $t\in A_j^n$ ($j=\overline{1,m}$).

Функция $\bar{z}_n: Q\to X$ непрерывна и $\|\bar{z}(t)-\bar{z}_n(t)\|\le\frac{1}{n}$ для всех $t\in Q$ ($n=\overline{1,\infty}$). Из неравенства $\|\bar{z}(t)-\bar{z}(s)\|\le$ $\le\|\bar{z}(t)-\bar{z}_n(t)\|+\|\bar{z}_n(t)-\bar{z}_n(s)\|+\|\bar{z}_n(s)-\bar{z}(s)\|\le\frac{2}{n}+\|\bar{z}_n(t)-\bar{z}_n(s)\|$ ($t,s\in Q$) следует непрерывность функции $\bar{z}$. ▷

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для регулярной булевой алгебры $\mathfrak{b}(E)$ и произвольного $z\in E(X)$ существует функция $\bar{z}\in z$ ($\bar{z}:\mathfrak{M}\to X$) такая, что $\mathfrak{M}$ – открытое плотное множество в Q и образ $\bar{z}[\mathfrak{M}]$ сепарабелен.

◁ При доказательстве предложения 3.2 было показано существование функции $\bar{z}\in z$, область определения которой есть объединение (счетного числа) непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q: $\mathfrak{M}=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$. Для каждого i множество $\bar{z}[U_i]$ компактно и, стало быть, сепарабельно. Таким же будет множество $\bar{z}[\mathfrak{M}]=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{z}[U_i]$. ▷

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.I. Необходимость следует из предложения 3.3. Покажем достаточность. Пусть $\bar{z}\in z\in E_s(X,\Gamma)$ ($\bar{z}:\mathfrak{M}\to X$) и $\bar{z}|_{Q_\xi}$ имеет сепарабельный образ для каждого $\xi\in\Xi$. Можно считать, что Q_ξ ($\xi\in\Xi$) является стоуновым компактом регулярной булевой алгебры. Тогда по предложению 3.2 можно считать, что $\bar{z}$ непрерывна на $\bigcup_{\xi}(\mathfrak{M}\cap Q_\xi)$ и потому $z\in E(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Утверждение теоремы 3.I в части достаточности остается справедливым для произвольного $\mathcal{K}$-пространства E.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kantorovič L.V. The method of successive approximation for functional equations.- Acta Math., 1939, v.71, p.63-97.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
3. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.: Физматгиз, 1961.
4. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
5. Dinculeanu N. Vector measures.- Berlin: Deutscher Verlag Wissenschaften, 1966.
6. БУХВАЛОВ А.В. Пространства вектор-функций и тензорные произведения. - Сиб. мат. журн., 1972, т.13, №6, с.1229-1238.
7. БУХВАЛОВ А.В. О двойственности функторов, порождаемых пространствами вектор-функций. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, т.39, №6, с.1285-1309.
8. ЛЕВИН В.Л. Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые КВ-линеалами. - Тр. Моск. мат. об-ва, 1969, т.20, с.43-82.
9. БУХВАЛОВ А.В. Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.-Изв. вузов. Математика, 1975, №11(162), с.21-32.
10. БУХВАЛОВ А.В. Об аналитическом представлении линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций. - Изв. вузов. Математика, 1977, №7(182), с.21-31.
11. КУСРАЕВ А.Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей. - Докл. АН СССР, 1982, т.267, №6, с.1049-1052.
12. КУСРАЕВ А.Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа. - Докл. АН СССР, 1983, т.27, №2, с.283-286.
13. ВЕКСЛЕР А.И., ГЕЙЛЕР В.А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных упорядоченных пространств. - Сиб. мат. журн., 1972, т.13, №4, с.43-51.
14. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962.

Поступила в ред.-изд. отдел
21.05.1984 г.