Выпуск 34(5I) ОПТИМИЗАЦИЯ 1984 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 5I7.972.57

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИЗЪЮНКТНОСТИ ПОРЯДКОВО-НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.З.Стрижевский

Важные структурные свойства векторной решетки связаны с отношением дизъюнктности в ней. Этим, в частности, объясняется интерес к дизъюнктности порядково-непрерывных операторов в K-пространствах. Признак дизъюнктности порядково-непрерывных функционалов, как известно, не переносится на операторный случай ввиду недостаточной информативности компоненты существенной положительности линейного оператора (см., например, [I,2]). Нетрудно привести пример дизъюнктных операторов с одной и той же ненулевой компонентой существенной положительности. Аналогично, дизъюнктность образов является лишь достаточным условием дизъюнктности операторов, но не необходимым.

В настоящей заметке рассматриваются порядково-непрерывные операторы. Вводится понятие $\mathcal{S}$-соответствия положительного оператора (для функционалов - эквивалентное понятию компоненты существенной положительности), изучаются его свойства. Разработанная техника позволяет получить достаточное условие дизъюнктности операторов, признаки дизъюнктности решеточных гомоморфизмов и операторов Магарам. Доказывается также, что в случае непрерывных K-пространств решеточные гомоморфизмы и операторы Магарам дизъюнктны компоненте почти интегральных операторов.

I. Обозначения и определения. В терминологии мы следуем работам [2,3]. Пусть $\mathcal{L}_0(X, Y)$ является K-пространством порядково-непрерывных операторов из K-пространства X с единицей $\mathbb{1}$ в произвольное K-пространство Y. Реализуем X и Y как фундаменты соответствующих расширенных пространств

$C_\infty(Q_X)$ и $C_\infty(Q_Y)$ [2,3], где Q_X, Q_Y – стоуновские компакты K-пространств X и Y. При этом считаем, что единице $\mathbb{1}$ соответствует непрерывная функция на Q_X, тождественно равная единице. Базу $\mathcal{B}(X)$ $(\mathcal{B}(Y))$ K-пространства $X(Y)$ будем интерпретировать как булеву алгебру открыто-замкнутых множеств компакта $Q_X(Q_Y)$. Решетку замкнутых множеств компакта $Q_X(Q_Y)$ обозначим через $\mathcal{F}(Q_X)(\mathcal{F}(Q_Y))$.
Напомним некоторые определения. Решеточным гомоморфизмом называется оператор [4,5], сохраняющий точные границы конечных множеств. Положительный порядково-непрерывный оператор $T: X \longrightarrow Y$ называется оператором Магарам [4,6], если $T[[0,x]]=[0,Tx]$ для каждого $x \in X_+$. И, наконец, оператор $\varphi \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ называется положительным ортоморфизмом [7], если $\varphi x \in \{x\}^{dd}$ для всех $x \in X_+$. Множество всех операторов Магарам из X в Y обозначим через $Mah(X,Y)$, всех порядково-непрерывных гомоморфизмов из X в Y – через $Hom(X,Y)$, всех положительных ортоморфизмов в X – через $Orth(X)$.

2. $\mathcal{S}$-соответствия. Символом $Supp\,T$ будем обозначать компоненту существенной положительности оператора T. Каждый оператор T порождает отображение компакта Q_Y в решетку замкнутых множеств $\mathcal{F}(Q_X)$ компакта Q_X по формуле

$$\mathcal{S}_T: w \longmapsto \bigcap_{u \in \mathcal{W}_w} Supp(\pi_u \circ T) \quad (w \in Q_Y),$$

где пересечение берется по множеству $\mathcal{W}_w$ всех открыто-замкнутых окрестностей точки w, π_u обозначает оператор проектирования в Y на компоненту, соответствующую открыто-замкнутому множеству u. На отображение $\mathcal{S}_T$ можно смотреть и как на соответствие из Q_Y в Q_X, за которым сохраним прежнее обозначение. $\mathcal{S}_T$ будем называть $\mathcal{S}$-соответствием оператора T. Множество всех $\mathcal{S}$-соответствий упорядочим по включению (как подмножеств произведения $Q_Y \times Q_X$).

ТЕОРЕМА I. Для произвольных $T \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ и $x \in X_+$ верно соотношение $supp(Tx) = \mathcal{S}_T^{-1}[supp(x)]$, где $supp(x) = cl\{t \in Q_X : x(t) \neq 0\}$, cl означает операцию замыкания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интересен лишь случай $T > 0$, $x > 0$. Пусть $t \in supp(x)$ и точка $w \in \mathcal{S}_T^{-1}[t]$ компакта Q_Y не принадлежит носителю элемента $Tx: w \notin supp(Tx)$. Существует отк-

рыто-замкнутое множество $\mathcal{U}\in\mathcal{B}(Y)$ такое, что $w\in\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\cap supp(Tx)=\emptyset$. Значит, x принадлежит нулевой компоненте оператора $\pi_{\mathcal{U}}\circ T$. Тогда $supp(x)\cap Supp(\pi_{\mathcal{U}}\circ T)=\emptyset$ и, следовательно, $supp(x)\cap S_T[w]=\emptyset$, что противоречит включениям $t\in supp(x)$ и $w\in S_T^{-1}[t]$. Тем самым из включения $t\in supp(x)$ следует $S_T^{-1}[t]\subset supp(Tx)$.

Предположим теперь, что $S_T[w]\cap supp(x)=\emptyset$. Тогда существует открыто-замкнутое множество $\mathcal{U}\in\mathcal{B}(Y)$ такое, что $w\in\mathcal{U}$, $Supp(\pi_{\mathcal{U}}\circ T)\cap supp(x)=\emptyset$ и, следовательно, $\mathcal{U}\cap supp(Tx)=\emptyset$. Отсюда $w\notin supp(Tx)$, что и завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ I.I. Пусть $T\in\mathcal{L}_0(X,Y)_+$. Оператор T является нулевым тогда и только тогда, когда соответствие S_T пустое.

СЛЕДСТВИЕ I.2. Прообраз каждого открыто-замкнутого множества относительно соответствия S_T является открыто замкнутым множеством.

Очевидно, умножение положительного оператора на строго положительный скаляр не меняет его S-соответствие. Далее, если $T_1,T_2\in\mathcal{L}_0(X,Y)_+$ и $T_1\leq T_2$, то $S_{T_1}\leq S_{T_2}$. Действительно, $\pi_{\mathcal{U}}\circ T_1\leq\pi_{\mathcal{U}}\circ T_2$ для каждого $\mathcal{U}\in\mathcal{B}(Y)$. Поэтому $Supp(\pi_{\mathcal{U}}\circ T_1)\leq Supp(\pi_{\mathcal{U}}\circ T_2)$ и, следовательно, $S_{T_1}[w]\subset S_{T_2}[w]$ для произвольного ультрафильтра $w\in Q_Y$.

СЛЕДСТВИЕ I.3. Если $T_1,T_2\in\mathcal{L}_0(X,Y)_+$, то

$$S_{T_1+T_2}=S_{T_1\vee T_2}=S_{T_1}\cup S_{T_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств $S_{T_1}\leq S_{T_1+T_2}$, $S_{T_2}\leq S_{T_1+T_2}$ следует включение $S_{T_1}\cup S_{T_2}\subset S_{T_1+T_2}$. Пусть существуют $w\in Q_Y$ и $t\in Q_X$ такие, что $t\in S_{T_1+T_2}[w]\setminus(S_{T_1}[w]\cup S_{T_2}[w])$. Тогда найдется такое открыто-замкнутое множество $v\in\mathcal{B}(X)$, что $v\cap(S_{T_1}[w]\cup S_{T_2}[w])=\emptyset$ и $t\in v$. Значит, по теореме I, $w\in supp(T_1(\pi_v\mathbb{1})+T_2(\pi_v\mathbb{1}))$, $w\notin supp(T_i(\pi_v\mathbb{1}))$ $(i=1,2)$, что невозможно. Тем самым $S_{T_1+T_2}=S_{T_1}\cup S_{T_2}$. Далее, $S_{T_i}\leq S_{T_1\vee T_2}\leq S_{T_1+T_2}$ $(i=1,2)$ и потому $S_{T_1}\cup S_{T_2}\leq S_{T_1\vee T_2}\leq S_{T_1+T_2}=S_{T_1}\cup S_{T_2}$.

СЛЕДСТВИЕ I.4 (достаточный признак дизъюнктности). Для дизъюнктности положительных опе-

раторов $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ достаточно, чтобы множество $\{w \in Q_Y : \mathcal{S}_{T_1}[w] \cap \mathcal{S}_{T_2}[w] \neq \emptyset\}$ имело пустую внутренность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $T_1 \wedge T_2 = T > 0$. Из неравенства $\mathcal{S}_T \leq \mathcal{S}_{T_1} \cap \mathcal{S}_{T_2}$ следует $\mathcal{S}_T^{-1}[Q_X] \subset \{w \in Q_Y : \mathcal{S}_{T_1}[w] \cap \mathcal{S}_{T_2}[w] \neq \emptyset\}$. Но множество $\mathcal{S}_T^{-1}[Q_X]$ открыто-замкнуто и непусто ($\mathcal{S}_T \neq \emptyset$), значит, $\mathrm{int}\{w \in Q_Y : \mathcal{S}_{T_1}[w] \cap \mathcal{S}_{T_2}[w] \neq \emptyset\} \neq \emptyset$, что противоречит условию. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слабой компонентой, порождаемой оператором $T \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$, называется множество $[T] = \{B \in \mathcal{L}_0(X,Y) : Bx \in \{Tx\}^{dd}$ для каждого $x \in X_+\}$.

Ясно, что множество $[T]$ действителньо является компонентой в $\mathcal{L}_0(X,Y)$, но не всякая компонента в $\mathcal{L}_0(X,Y)$ является слабой. Для решеточных гомоморфизмов и операторов Магарам понятия компоненты $\{T\}^{dd}$ и слабой компоненты $[T]$ совпадают [4].

СЛЕДСТВИЕ I.5. Для произвольных операторов $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ включение $T_1 \in [T_2]$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_{T_1} \leq \mathcal{S}_{T_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{S}_{T_1} \leq \mathcal{S}_{T_2}$, то для $x \geq 0$ имеем

$$\mathrm{supp}(T_1 x) = \mathcal{S}_{T_1}^{-1}[\mathrm{supp}(x)] \subset \mathcal{S}_{T_2}^{-1}[\mathrm{supp}(x)] = \mathrm{supp}(T_2 x)$$

и, значит, $T_1 \in [T_2]$.

Пусть теперь $T_1 \in [T_2]$. Предположим, существуют $w \in Q_Y$ и $t \in Q_X$ такие, что $t \in \mathcal{S}_{T_1}[w] \setminus \mathcal{S}_{T_2}[w]$. Тогда найдется открыто-замкнутое множество $v \in \mathcal{C}lop(X)$ такое, что $t \in v$ и $v \cap \mathcal{S}_{T_2}[w] = \emptyset$. Стало быть, $w \in \mathrm{supp}(T_1(\pi_v \mathbb{1}))$ и $w \notin \mathrm{supp}(T_2(\pi_v \mathbb{1}))$, поэтому $T_1(\pi_v \mathbb{1}) \notin \{T_2(\pi_v \mathbb{1})\}^{dd}$, что противоречит включению $T_1 \in [T_2]$.

3. $\mathcal{S}$-соотвествия решеточных гомоморфизмов. В терминах $\mathcal{S}$-соответствий можно исчерпывающе описать множество $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного $h \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ включение $h \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ эквивалентно тому, что соответствие $\mathcal{S}_h$ является однозначным. При этом функция, определяемая соответствием $\mathcal{S}_h$, непрерывна, открыта и имеет отк-

р ы т о - з а м к н у т у ю о б л а с т ь о п р е д е л е н и я $dom(S_h) \subset Q_Y$. *)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in Hom(X,Y)$. Предположим, соответствие S_h не задает функцию, т.е. существуют $w \in Q_Y$ и различные точки $t_1, t_2 \in Q_X$ такие, что $t_1 \in S_h[w]$ и $t_2 \in S_h[w]$. Найдется открыто-замкнутое множество $v \in \mathfrak{B}(X)$, для которого $t_1 \in v$, но $t_2 \notin v$. Если u - дополнение v в алгебре $\mathfrak{B}(X)$, то элементы $\pi_v 1$ и $\pi_u 1$ дизъюнктны. При этом $w \in supp(h(\pi_v 1)) \cap supp(h(\pi_u 1))$ (теорема I) и, значит, $h(\pi_v 1) \wedge h(\pi_u 1) > 0$ что противоречит включению $h \in Hom(X,Y)$. Тем самым соответствие S_h задает функцию, область определения которой является открыто-замкнутым множеством (следствие I.2). За этой функцией мы сохраним обозначение S_h.

Открыто-замкнутые множества образуют базис компакта Q_X. Поэтому непрерывность функции S_h вытекает из следствия I.2. Остается показать, что образ относительно S_h любого открыто-замкнутого множества является открыто-замкнутым. Пусть $U = Supp\, h$. Установим соотношение $S_h[Q_Y] = U$. Если существует точка $t \in S_h[Q_Y] \cap (Q_X \setminus U)$, то найдется открыто-замкнутое множество $v \in \mathfrak{B}(X)$, отделяющее t от U: $t \in v$ и $v \cap U = \emptyset$. При этом $S_h^{-1}[t] \neq \emptyset$ и, стало быть, $h(\pi_v 1) > 0$, что противоречит принадлежности элемента $\pi_v 1$ нулевой компоненте оператора h. Значит, $S_h[Q_Y] \subset U$. Аналогично показывается (с учетом включения $S_h[Q_Y] \in \mathcal{F}(Q_X)$) пустота множества $U \setminus S_h[Q_Y]$. Следовательно, $S_h[Q_Y] = U$ и тем самым образ Q_Y является открыто-замкнутым множеством в Q_X. Пусть теперь u является произвольным открыто-замкнутым множеством в Q_Y и $g = \pi_u \circ h$. Тогда однозначное соответствие S_g определяет функцию (обозначение сохраняем) $S_g : dom(S_g) \to Q_X$, где $dom(S_g) = dom(S_h) \cap u$. При этом $S_g(w) = S_h(w)$ для каждой точки $w \in dom(S_g)$ и потому $S_h[u] = S_g[u] = S_g[Q_Y] \in \mathfrak{B}(X)$. Открытость функции S_h доказана.

Предположим теперь, что соответствие S_h однозначное. Если для положительных дизъюнктных элементов x_1, x_2 существует

---

*) Утверждения, аналогичные необходимому условию теоремы 2 и следствию 3.I, были получены другим методом Ю.А.Абрамовичем в [8].

точка $w \in supp(hx_1) \cap supp(hx_2)$, то по теореме I $w \in dom(S_h)$ и $S_h(w) \in supp(x_1) \cap supp(x_2)$, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. По ходу доказательства теоремы мы показали справедливость соотношения $Supp\, h = S_h[Q_Y]$ для каждого положительного решеточного гомоморфизма. Аналогично показывается, что компонента существенной положительности произвольного положительного оператора T находится по формуле $Supp\, T = = cl\, S_T[Q_Y]$.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. Если $h \in Orth(X)$, то $S_h \leq S_I$, где I – тождественный оператор в X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. S -соответствие тождественного оператора является диагональю квадрата $Q_X \times Q_X$. Если предположить существование различных точек $w, w' \in Q_X$ таких, что $(w, w') \in S_h$, то найдется открыто-замкнутое множество $U \in \in \mathcal{B}(X)$, отделяющее w' от w: $w' \in U$ и $w \notin U$. Тогда $w \in \in supp(h(\pi_U \mathbb{1})), w \notin \pi_U \mathbb{1}$ и, стало быть, h не есть ортоморфизм.

Следующее утверждение вместе с теоремой 2 дает полное описание S -соответствий, порождаемых положительными порядково-непрерывными решеточными гомоморфизмами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть непрерывная и открытая функция $f: dom(f) \to Q_X$ имеет открыто-замкнутую область определения $dom(f) \subset Q_Y$. Тогда существует решеточный гомоморфизм $\tau(f) \in \in Hom(X, C_\infty(Q_Y))$ такой, что $S_{\tau(f)}$ является графиком функции f. Если, кроме того, $Y = X$ и график функции f содержится в S_I, то $\tau(f) \in Orth(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $x \in X_+$ (как элемента $C_\infty(Q_X)$) положим

$$[\tau(f)x](w) = \begin{cases} x(f(w)), & \text{если } w \in dom(f); \\ 0, & \text{если } w \notin dom(f). \end{cases}$$

Из непрерывности f и открыто-замкнутости $dom(f)$ следует непрерывность положительной функции $[\tau(f)x](\cdot)$. Функция $[\tau(f)x](\cdot)$ принадлежит конусу $C_\infty(Q_Y)_+$. Действительно,

если предположить, что $[\tau(f)x](\cdot)$ обращается в $+\infty$ на непустом открыто-замкнутом множестве $u\in dom(f)$, то и $x(\cdot)$ обращается в $+\infty$ на непустом множестве $f[u]\in \mathcal{B}(X)$, что противоречит принадлежности $x(\cdot)\in C_\infty(Q_X)_+$. Оператор $\tau(f)$ является аддитивным отображением X_+ в $C_\infty(Q_Y)_+$. За распространением $\tau(f)$ на все X сохраним прежнее обозначение. Покажем порядковую непрерывность полученного положительного оператора $\tau(f):X\to C_\infty(Q_Y)$. Пусть x_α – убывающее к нулю направление. Если $\inf \tau(f)x_\alpha>0$, то $\inf[\tau(f)x_\alpha](w)>0$ для каждой точки w некоторого непустого открыто-замкнутого множества $v\in\mathcal{B}(Y)$. Тогда $\inf x_\alpha(t)>0$ для всех $t\in f[v]\in$ $\in\mathcal{B}(X)$, что противоречит равенству $\inf x_\alpha = 0$. Значит, $\tau(f)\in \mathcal{L}_0(X, C_\infty(Q_Y))_+$.

Пусть $w\in Q_Y$ и открыто-замкнутое множество $u\in\mathcal{B}(Y)$ принадлежит ультрафильтру w. Тогда $Supp(\pi_u\circ\tau(f)) = f[u]$. Если $w\in dom(f)$, то, учитывая непрерывность f, получаем:

$$S_{\tau(f)}[w] = \bigcap_{u\in \mathfrak{M}_w} Supp(\pi_u\circ\tau(f)) = \bigcap_{u\in\mathfrak{M}_w} f[u] = \{f(w)\}.$$

Если же $w\notin dom(f)$, то $S_{\tau(f)}[w]=\varnothing$. По теореме 2 оператор $\tau(f)$ является решеточным гомоморфизмом. Если $Y=X$ и график функции f содержится в S_I, то $\tau(f)x\le x$ и потому $\tau(f)\in Orth(X)$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Каждый решеточный гомоморфизм $h:X\to Y$ представляется в виде $h=\varphi_h\circ\tau(S_h)$, где φ_h есть оператор умножения в пространстве $C_\infty(Q_Y)$ на функцию $h(\mathbb{1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для дизъюнктности положительных операторов $g,f\in Hom(X,Y)$ необходимо и достаточно, чтобы множество $\{w\in Q_Y: S_g[w]\cap S_f[w]\ne\varnothing\}$ имело пустую внутренность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать надо только необходимость (следствие 1.4). Как обычно, за функциями, определяемыми однозначными (теорема 2) соответствиями S_g и S_f, сохраним те же обозначения. Предположим, что открыто-замкнутое множество $u=int\{w\in Q_Y: S_g(w)=S_f(w)\}$ непусто. По следствию 3.1 $g=\varphi_g\circ\tau(S_g)$ и $f=\varphi_f\circ\tau(S_f)$, где φ_g, φ_f – операторы

умножения в $C_\infty(Q_Y)$ на функции $g(1)$ и $f(1)$. Соответствие $S=\{(w,t)\in Q_Y\times Q_X: w\in U,\ t=S_g(w)=S_f(w)\}$ задает функцию, удовлетворяющую условиям предложения 3. Эта функция порождает гомоморфизм $h\in Hom(X, C_\infty(Q_X))$ такой, что $S_h=S$. При этом $h\le \tau(S_g), h\le\tau(S_f)$ и $h>0$.

По теореме I

$$supp(g(1))\cap supp(f(1))=S_g^{-1}[Q_X]\cap S_f^{-1}[Q_X]\supset S^{-1}[Q_X]\ne\emptyset,$$

и, следовательно, $g(1)\wedge f(1)>0$. Положим $l=g(1)\wedge f(1)$, и пусть Ψ - оператор умножения в $C_\infty(Q_Y)$ на функцию l. Тогда $\Psi\circ h>0$ и $\Psi\circ h\le \Psi_g\circ\tau(S_g)=g, \Psi\circ h\le\Psi_f\circ\tau(S_f)=f$, и потому $f\wedge g>0$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 5 (признак дизъюнктности решеточных гомоморфизмов). Для дизъюнктности операторов $g, f\in Hom(X,Y)$ необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любой ненулевой компоненты $U\in\mathcal{B}(Y)$ существует ненулевая меньшая ее компонента $V\in\mathcal{B}(Y)(0<V\le U)$ такая, что

$$Supp(\pi_V\circ g)\wedge Supp(\pi_V\circ f)=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует такая ненулевая компонента $U\in\mathcal{B}(Y)$, что для каждой меньшей ее ненулевой компоненты V выполнено неравенство $Supp(\pi_V\circ g)\wedge Supp(\pi_V\circ f)>0$. Для произвольной точки $w\in U$ система замкнутых множеств $\{Supp(\pi_V\circ g)\cap Supp(\pi_V\circ f): V\in \mathcal{W}_w\}$ является центрированной и, значит, пересечение всех множеств этой системы непусто:

$$\emptyset\ne\bigcap_{V\in\mathcal{W}_w}\{Supp(\pi_V\circ g)\cap Supp(\pi_V\circ f)\}=S_g[w]\cap S_f[w].$$

Тем самым $int\{w\in Q_Y: S_g[w]\cap S_f[w]\ne\emptyset\}\supset U>0$, т.е. $g\wedge f>0$ (предложение 4).

Достаточность. Если $f\wedge g>0$, то открыто-замкнутое множество $U=int\{w\in Q_Y: S_g[w]\cap S_f[w]\ne\emptyset\}$ непусто и для любого непустого открыто-замкнутого множества $V\in\mathcal{B}(Y)$ такого, что $V\subset U$, выполнено:

$$Supp(\pi_V\circ g)\wedge Supp(\pi_V\circ f)=Supp(\pi_V\circ g)=Supp(\pi_V\circ f)>0.$$

Утверждение доказано.

4. Дизъюнктность решеточных гомоморфизмов и операторов Магарам компоненте почти интегральных операторов. Операторы Магарам также можно охарактеризовать в терминах $\mathcal{S}$-соответствий, но при самых общих предположениях удается получить лишь необходимое условие принадлежности оператора множеству $Mah(X,Y)$.

ТЕОРЕМА 6. Если $T\in Mah(X,Y)$, то соответствие S_T^{-1} является однозначным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S_T^{-1} не есть однозначное соответствие, то существуют различные точки $w, w'\in Q_Y$, для которых $S_T[w]\cap S_T[w']=\emptyset$. Пусть $t\in S_T[w]\cap S_T[w']$ и u - открыто-замкнутая окрестность точки w, не содержащая w', а $v=Q_Y\setminus u$. Точки w и w' принадлежат множеству $supp(T\mathbb{1})$. Далее, T - оператор Магарам, значит, существуют положительные $x_1, x_2\leq \mathbb{1}$ такие, что $Tx_1=\pi_u(T\mathbb{1})$ и $Tx_2=\pi_v(T\mathbb{1})$. Так как $0\leq x_1\vee x_2\leq \mathbb{1}$, то $Tx_1\vee Tx_2\leq T(x_1\vee x_2)\leq T\mathbb{1}$. Но $Tx_1\wedge Tx_2=0$ и потому $Tx_1\vee Tx_2=Tx_1+Tx_2=\pi_u(T\mathbb{1})+\pi_v(T\mathbb{1})=T\mathbb{1}$, т.е. $T(x_1\vee x_2)=T\mathbb{1}$.

Если $t\notin supp(x_1)\cup supp(x_2)$, то существует положительный элемент $x_0\leq \mathbb{1}$ такой, что $t\in supp(x_0)$ и $x_0\wedge(x_1\vee x_2)=0$. По теореме I $Tx_0>0$. Неравенство

$$T\mathbb{1}=T(x_1\vee x_2)<T(x_1\vee x_2)+Tx_0=T(x_1\vee x_2+x_0)=T(x_1\vee x_2\vee x_0)\leq T\mathbb{1}$$

приводит к противоречию. Значит, $t\in supp(x_1)\cup supp(x_2)$. Тогда точки w, w' принадлежат одновременно одному из множеств u, v, чего не может быть. Теорема доказана.

Пусть K-пространство X имеет достаточное число порядково-непрерывных функционалов и X° является порядково-сопряженным к X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компонентой почти интегральных операторов $K(X,Y)$ [9,10] называется компонента, порожденная множеством операторов вида $x\mapsto f(x)\cdot y$, где $f\in X^\circ$, $y\in Y$.

Можно усилить результаты [9,10] и показать, что почти интегральные операторы дизъюнкты таким операторам T, у которых "сечения" $S_T[w]$ ($w\in Q_Y$) не слишком "массивны".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $T\in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ и для каждого $w\in Q_Y$ множество $S_T[w]$ нигде не плотно в Q_X. Тогда опе-

ратор T дизъюнктен компоненте почти интегральных операторов $K(X,Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $T\wedge A=\mathbb{O}$, где $A=f\cdot y$, $f\in X_+^\circ$, $y\in Y_+$. Открытое множество $B_y=\{w\in Q_Y: y(w)<+\infty\}$ всюду плотно в Q_Y. Пусть $w\in B_y$ и Ω_w является системой всех открыто-замкнутых окрестностей замкнутого множества $S_T[w]$. Положим $e_u=\chi_u\mathbb{1}$ для каждого $u\in\Omega_w$. Множество $S_T[w]$ нигде не плотно в Q_X, значит, $\inf_{u\in\Omega_w} e_u=\mathbb{O}$, и так как $f\in X_+^\circ$, то $\inf_{u\in\Omega_w} f(e_u)=0$. Тогда $[f(e_u)\cdot y](w)\neq 0$ и по теореме I $[T(\mathbb{1}-e_u)](w)=0$ $(u\in\Omega_w)$. Тем самым $\inf_{u\in\Omega_w}[f(e_u)\cdot y+T(\mathbb{1}-e_u)](w)=0$ для каждой точки w всюду плотного в Q_Y множества B_y, что и означает справедливость равенства

$$(T\wedge A)(\mathbb{1})=\inf_{0\le e\le \mathbb{1}}[f(e)\cdot y+T(\mathbb{1}-e)]=\mathbb{O}.$$

Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 8. а) Если K-пространство X непрерывно (в X нет минимальных ненулевых компонент), то компоненты $\{Hom(X,Y)\}^{dd}$ и $K(X,Y)$ дизъюнкты.

б) Если K-пространство Y непрерывно, то компоненты $\{Mah(X,Y)\}^{dd}$ и $K(X,Y)$ дизъюнктны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $h\in Hom(X,Y)$, то множество $S_h[w]$ не более чем одноточечное (теорема 2) и тем самым нигде не плотное.

б) Пусть $T\in Mah(X,Y)$. Если предположить, что для некоторой точки $w\in Q_Y$ открыто-замкнутое множество $U=\mathrm{int}\, S_T[w]$ непустое, то по теореме 6 и следствию I.2 одноточечное множество $\{w\}=S_T^{-1}[U]$ является открыто-замкнутым, что противоречит непрерывности пространства Y.

5. Дизъюнктность решеточного гомоморфизма и оператора Магарам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $h\in Hom(X,Y)$, $T\in Mah(X,Y)$. Для дизъюнктности операторов h и T необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$\operatorname{int}\{w\in Q_Y : S_h[w]\cap S_T[w]\neq\emptyset\}=\emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается только необходимость (следствие I.4). Пусть существует непустое открыто-замкнутое множество $e\subset \operatorname{int}\{w\in Q_Y: S_h[w]\cap S_T[w]\neq\emptyset\}$. Положим $\ell=S_h[e]$ и рассмотрим оператор $T_1=\pi_e\circ T\circ\pi_\ell$. Очевидно, $S_{T_1}=(e\times\ell)\cap S_T$. Так как $S_{T_1}\neq\emptyset$, то $0<T_1\leq T$ (следствие I.4). Далее, ясно, что S_{T_1} является однозначным соответствием и, значит, T_1 есть решоточный гомоморфизм (теорема 2). По предложению 4 $h\wedge T_1>0$ и тем более $h\wedge T>0$.

В следующем пункте, при некоторых дополнительных предположениях относительно пространств X и Y, будет приведена более удобная формулировка признака дизъюнктности решеточного гомоморфизма и оператора Магарам.

6. Дизъюнктность операторов Магарам. На протяжении этого пункта будем дополнительно предполагать достаточное число порядково-непрерывных функционалов над X и наличие существенно положительного порядково-непрерывного функционала над Y. Порядково-сопряженные пространства к X и Y обозначим через X° и Y° соответственно.

Реализуем K-пространства $X^\circ(Y^\circ)$ и $X(Y)$ на одном экстремально-несвязном компакте $Q_X\ (Q_Y)$. Если u есть открыто-замкнутое множество в Q_X, то можно говорить о проектировании на "компоненту" u как в пространстве X, так и в пространстве X°. При этом, как нетрудно видеть, для каждого функционала $\psi\in X^\circ_+$ справедливо соотношение $\rho'_u(\psi)=\psi\circ\rho_u$, где ρ' означает оператор проектирования в пространстве X°, а ρ - оператор проектирования в пространстве X.

Пусть $T\in\mathcal{L}_0(X,Y)_+$ и T^* является порядково-сопряженным оператором к T, т.е. $T^*:\varphi\to\varphi\circ T$, где $\varphi\in Y^\circ$.

ТЕОРЕМА 10. $S_{T^*}=S_T^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного функционала $\varphi\in Y^\circ_+$ и каждого открыто-замкнутого множества $u\in\mathcal{B}(X)$ имеем

$$[\rho'_u\circ T^*](\varphi)=\rho'_u(T^*(\varphi))=\rho'_u(\varphi\circ T)=\varphi\circ T\circ\rho_u$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Supp}(\rho'_u\circ T^*)=S^{-1}_{T\circ\rho_u}[Q_X]=S_T^{-1}[u].$$

Поэтому для каждого ультрафильтра $t \in Q_X$

$$S_{T^*}[t] = \bigcap_{u \in \mathcal{W}_t} Supp(\rho'_u \circ T^*) = \bigcap_{u \in \mathcal{W}_t} S_T^{-1}[u].$$

Покажем, что $\bigcap_{u \in \mathcal{W}_t} S_T^{-1}[u] = S_T^{-1}[t]$. Пусть $w \in \bigcap_{u \in \mathcal{W}_t} S_T^{-1}[u]$. Тогда $S_T[w] \cap u \neq \emptyset$ для всех $u \in \mathcal{W}_t$, тем самым t является предельной точкой замкнутого множества $S_T[w]$. Значит, $t \in S_T[w]$ и, следовательно, $w \in S_T^{-1}[t]$. Включение $\bigcap_{u \in \mathcal{W}_t} S_T^{-1}[u] \subset S_T^{-1}[t]$ доказано. Обратное включение является тривиальным.

Сопоставляя результаты [4] с теоремой 10, получаем

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Для произвольного $T \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ включение $T \in Mah(X,Y)$ эквивалентно тому, что соответствие S_T^{-1} является однозначным. При этом функция, определяемая соответствием S_T^{-1}, непрерывна, открыта и имеет открыто-замкнутую область определения $dom(S_T^{-1}) \subset Q_X$.

В условиях этого пункта утверждение предложения 9 допускает более удобную формулировку.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $h \in Hom(X,Y)$, $T \in Mah(X,Y)$. Для дизъюнктности операторов h и T необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для каждой ненулевой компоненты $u \in \mathfrak{B}(Y)$ найдется меньшая ее ненулевая компонента $v \in \mathfrak{B}(Y)$ ($0 < v \leq u$) такая, что

$$Supp(\pi_v \circ h) \wedge Supp(\pi_v \circ T) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Допустим, $h \wedge T > 0$. Тогда существует непустое открыто-замкнутое подмножество u множества $int\{w \in Q_Y : S_h[w] \cap S_T[w] \neq \emptyset\}$ (предложение 10). Если $v \in \mathfrak{B}(Y)$ и $0 < v \leq u$, то $S_{\pi_v \circ h} \subset S_{\pi_v \circ T}$. Учитывая, что $Supp(\pi_v \circ h) = S_{\pi_v \circ h}[Q_Y] \subset S_{\pi_v \circ T}[Q_Y] = Supp(\pi_v \circ T)$ (следствие 10.1 и замечание после теоремы 2), получаем $Supp(\pi_v \circ h) \wedge Supp(\pi_v \circ T) = Supp(\pi_v \circ h) > 0$ (следствие 1.1).

Необходимость. По предложению 9 для каждого непустого отк-

рыто-замкнутого множества $u \subset Q_Y$ существует точка $w \in u$ такая, что $S_h[w] \cap S_T[w] = \emptyset$. Без ограничения общности считаем, что $w \in dom(S_h)$. Тогда $S_h[w] = \{t\}$ (теорема 2) и $t \notin S_T[w]$. Опять же считаем $t \in dom(S_T^{-1})$ и потому $S_T^{-1}[t] = \{w'\}$ (следствие 10.1), где $w' \neq w$. Пусть e и e' есть открыто-замкнутые окрестности, разделяющие точки w и w': $w \in e, w' \in e'$ и $e \cap e' = \emptyset$. При этом можно предполагать, что $e \subset u$. Существует открыто-замкнутая окрестность ℓ точки t, для которой $S_T^{-1}[\ell] \subset e'$ (следствие 10.1). В свою очередь, существует открыто-замкнутая окрестность v точки w ($v \subset e$) такая, что $S_h[v] \subset \ell$. Следовательно, $Supp(\pi_v \circ h) = S_{\pi_v \circ h}[Q_Y] = S_h[v] \subset \ell$ и $Supp(\pi_v \circ T) = S_T[v] \subset Q_X \setminus \ell$. Теорема доказана.

Теорема 10 и следствие 1.2 показывают инвариантность S-соответствия произвольного оператора $T \in \mathcal{L}_0(X,Y)_+$ относительно открыто-замкнутых множеств:

$$S_T \langle \mathfrak{B}(Y) \rangle = \{S_T[u] : u \in \mathfrak{B}(Y)\} \subset \mathfrak{B}(X).$$

Поэтому $Supp\, T = cl\, S_T[Q_Y] = S_T[Q_Y]$. Это соображение позволяет установить признак дизъюнктности операторов Магарам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Для дизъюнктности операторов $T, R \in Mah(X,Y)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$int\{t \in Q_X : S_T^{-1}[t] \cap S_R^{-1}[t] \neq \emptyset\} = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $T \wedge R > 0$, то $\emptyset \neq S_{T \wedge R} \subset S_T \cap S_R$ и $\emptyset \neq S_{T\wedge R}[Q_Y] \subset \{t \in Q_X : S_T^{-1}[t] \cap S_R^{-1}[t] \neq \emptyset\}$. Осталось заметить, что $S_{T \wedge R}[Q_Y] \in \mathfrak{B}(X)$.

Предположим теперь, что открыто-замкнутое множество $u \subset int\{t \in Q_X : S_T^{-1}[t] \cap S_R^{-1}[t] \neq \emptyset\}$ непусто. По следствию

1.5 слабые компоненты, порожденные операторами $T\circ\rho_u$ и $R\circ\rho_u$, совпадают. Тогда и $\{T\circ\rho\}^{dd}=\{R\circ\rho_u\}^{dd}$. Следовательно, $T\circ\rho_u\wedge R\circ\rho_u>\mathbb{O}$ и тем более $T\wedge R>\mathbb{O}$.

Аналогично теореме 5 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 13 (признак дизъюнктности операторов Магарам). Для дизъюнктности операторов $T,R\in$ $\in Mah(X,Y)$ необходимо и достаточно выполнения условия: для каждой ненулевой компоненты $u\in\mathcal{B}(X)$ существует меньшая ее ненулевая компонента $v\in\mathcal{B}(X)$ ($\mathbb{O}<v\leq u$) такая, что

$$\{Im(T\circ\rho_v)\}^{dd}\wedge\{Im(R\circ\rho_v)\}^{dd}=\mathbb{O}.$$

7. Случай отсутствия единичных фильтров в K-пространствах X и Y°. Все приведенные в предыдущих пунктах утверждения о дизъюнктности операторов были получены в предположениях о наличии слабых единиц в пространствах X (теоремы 5, 8,11,13) и Y° (теоремы 11,13). Ниже, на примере признака дизъюнктности решеточных гомоморфизмов, мы покажем несущественность этих требований. Действительно, пусть $g,f\in Hom(X,Y)$ и $g\wedge f=\mathbb{O}$. Существует разбиение $\{X_\xi\}$ пространства X на компоненты с единицами [1,2]. Проекторы в X на компоненты X_ξ обозначим через ρ_ξ. Для каждого ξ операторы $g\circ\rho_\xi$ и $f\circ\rho_\xi$ дизъюнктны. Возьмем произвольное открыто-замкнутое множество $u\in Q_Y$. Если для каждого ξ множества u и $S^{-1}_{g\circ\rho_\xi}[Q_X]$ не пересекаются, то $Supp[\pi_u\circ g]=$ $=\bigvee_\xi Supp[\pi_u\circ g\circ\rho_\xi]=\mathbb{O}$, где π_u есть проектор в Y на компоненту, соответствующую открыто-замкнутому множеству u. Значит, $Supp[\pi_u\circ g]\wedge Supp[\pi_u\circ f]=\mathbb{O}$. Если же существует ξ_0 такое, что $u\cap S^{-1}_{g\circ\rho_{\xi_0}}[Q_X]=u'\neq\varnothing$, то носитель оператора $\pi_{u'}\circ g$ содержится в компоненте X_{ξ_0}. По теореме 5 для открыто-замкнутого множества $u'\subset Q_Y$ существует открыто-замкнутое множество v ($\mathbb{O}<v\leq u'$) такое, что

$$Supp(\pi_v\circ g\circ\rho_{\xi_0})\wedge Supp(\pi_v\circ f\circ\rho_{\xi_0})=Supp(\pi_v\circ g)\wedge Supp(\pi_v\circ f\circ\rho_{\xi_0})=\mathbb{O}.$$

Если через $\bar\rho_{\xi_0}$ обозначить проектор на компоненту $X^d_{\xi_0}$, то

$$Supp(\pi_v\circ f)=Supp(\pi_v\circ f\circ\rho_{\xi_0})\vee Supp(\pi_v\circ f\circ\bar\rho_{\xi_0}),$$

и потому

$$\operatorname{Supp}(\pi_v \circ g) \wedge \operatorname{Supp}(\pi_v \circ f) = \operatorname{Supp}(\pi_v \circ g) \wedge$$
$$\wedge (\operatorname{Supp}(\pi_v \circ f \circ \rho_{\xi_0}) \vee \operatorname{Supp}(\pi_v \circ f \circ \bar{\rho}_{\xi_0})) =$$
$$= (\operatorname{Supp}(\pi_v \circ g) \wedge \operatorname{Supp}(\pi_v \circ f \circ \rho_{\xi_0})) \vee$$
$$\vee (\operatorname{Supp}(\pi_v \circ g) \wedge \operatorname{Supp}(\pi_v \circ f \circ \bar{\rho}_{\xi_0})) = \mathbb{O} \vee \mathbb{O} = \mathbb{O}.$$

Обратное утверждение очевидно.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Г.П. Акилову за постановку задачи и внимание к работе, а также А.Г.Кусраеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.: Физматгиз, 1950.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.: Физматгиз, 1961.
3. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
4. LUXEMBURG W.A.J., SCHEP A.R. A Radon - Nikodym type theorem for positive operators and a dual.- Indag. Math., 1978, v.81, p.357-376.
5. LUXEMBURG W.A.J., ZAANEN A.C. Riesz spaces. V.1. - Amsterdam - London: North-Holland Publ., 1971.
6. КУСРАЕВ А.Г. Общие формулы дезинтегрирования. - ДАН, 1982, т.265, №6, с.1312-1316.
7. ZAANEN A.C. Examples of orthomorphisms.- J. Approx. Theory, 1975, v.13, N 2, p.194-204.
8. ABRAMOVICH Yu.A. Multiplicative representation of disjointness preserving operators. - Indag. Math., 1983, v.86, N 3, p.265-280.

9. ЛОЗАНОВСКИЙ Г.Я. О почти интегральных операторах в КВ-пространствах. - Вестник ЛГУ, 1966, №7, с.35-44.
10. СЫННАЧКЕ Ю. О почти интегральных операторах в К-пространствах. Вестник ЛГУ, 1971, №13, с.81-89.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.02.84 г.